一般化されたフィボナッチ数列とピタゴラスの定理と二項定理を用いた貴金属比の類似比に関する等角螺旋の可視化と幾何学的特性*

中西 真悟**

大阪工業大学・情報センター

(2021 年 12 月 3 日公開)

Visualizations and Geometric Characterizations of Equiangular Spirals about Similar Metallic Ratios Using Generalized Fibonacci Sequences, Pythagorean Theorem, and Binomial Theorem

by

Shingo NAKANISHI

Computing Center, Osaka Institute of Technology

Abstract

This research note deals with equiangular spirals with similar metallic ratios using generalized Fibonacci sequences, the Pythagorean theorem, and binomial theorem. We reconsider the similar metallic ratios based on various right triangles, e.g., Kepler triangles with Fibonacci sequences or right-angled isosceles triangles with Jacobsthal sequences, according to the Pythagorean theorem using related ellipses and simultaneous probabilities of two-dimensional standard normal distribution. We suggest that original or similar metallic ratios also have significant characterizations such as nested radicals, continued fractions, and applied Pascal's triangles. Particularly, we can obtain the Bernoulli's logarithmic spirals on the Gaussian plane using generalized Fibonacci sequences, binomial theorem, and de Moivre's formula. From geometric viewpoints, we also illustrate several beautiful harmonies simultaneously between the golden ratio using Kepler triangles and the silver ratio using right-angled isosceles triangles.

キーワード； 固有値，多重根号，連分数，黄金比，白銀比，楕円，パスカル三角形，正三角形，ケプラー三角形，ガウス平面

Keyword； Eigen Values, Nested Radicals, Continued Fractions, Golden Ratio, Silver Ratio, Ellipses, Pascal's Triangle, Equilateral Triangle, Kepler Triangle, Gaussian Plane

---

＊ 大阪工業大学イノベーションデイズ 2020 で発表（2020 年 9 月 28 日，大阪工業大学）
日本オペレーションズ・リサーチ学会 2021 年春季研究発表会で 2 件発表（2021 年 3 月 3 日，東京工業大学）
第 31 回欧州オペレーショナル・リサーチ学会国際会議（EURO2021）で発表（2021 年 7 月 12 日，ギリシャ・アテネ）
日本オペレーションズ・リサーチ学会 2021 年秋季研究発表会で発表（2021 年 9 月 16 日，九州大学）
大阪工業大学イノベーションデイズ 2021 で発表（2021 年 9 月 7 日，大阪工業大学）いずれもオンライン発表

** 大阪工業大学情報センター　准教授

1. はじめに

標準正規分布の累積分布関数と様々な螺旋が，黄金比の螺旋に関係する予想 [1]の後に，貴金属比の類似比を提案した前作である研究ノート [2]を投稿してから 1 年が経過しようとしている．同時に黄金比が示す幾何学的特徴について台形を用いながら等比数列の視覚化 [3]を大阪工業大学イノベーションデイズ 2020 にて発表したところから本研究はまとめている．このため，本研究はこの前作の投稿後の 1 年間の研究成果 [4-8]を報告するために作成した研究ノートである．

前作 [2]において，黄金比 [9-33]ならびに貴金属比 [9,34-37]の類似比 [38-43]と標準正規分布の累積分布関数との関係を考察し，代数螺旋 [44-46]と対数螺旋（等角螺旋）[46-49]の可能性があることを示唆した．このときのキーポイントがピタゴラス（Pythagoras）の定理（三平方の定理）[50-54]とフィボナッチ（Fibonacci）数列 [9-17,20-33]の活用であった．前作の研究 [2]では，様々な観点から螺旋を考察することを記載したが，本研究では研究成果の比較を容易にできるようにと可読性を再考し，その表記法を統一できるように努めて数式の記述の再編成を試みている．

しかしながら，本研究を研究論文と位置づけせず，再び研究ノートとして公開する理由は，de Spinadel が類似比の提案者として文献 38-40)に $n=2$ の類似比を copper mean（純銅比もしくはカッパー比），$n=3$ の類似比を nickel mean（白銅比もしくはニッケル比）と命名していたのを見つけたからである．そして，例えば，文献 41-43)でもこれらの名称が引用されていることがわかった. しかしながら, Wikipedia で公開する日本語版の「貴金属比 [34]」や, 英語版の「metallic mean[35]」では, de Spinadel の文献 [38-40]を参考文献として示しているにもかかわらず, これらの名称は今のところ定義からは除外のようである. このため貴金属比には含まれていないし，取り扱われていない．また，Google や Google Scholar でもこれらの用語で検索が成り立たず，定義の真偽が確認できない．

一方で，カッパー比やニッケル比，貴金属比の 4 番目と 5 番目に属する説も存在する. Wikipedia でもこちらが掲載されている．著者はこちらを基準に前作は記述したのであるが，いずれも de Spinadel がカッパー比とニッケル比の命名に関わっているようである．

したがって，本研究ではこれらの比の名称の記載が見つかったことを誠実に記載するが，芸術作品の幾何学的特徴にも関心を持ち合わせているため，現状の貴金属比と番号を対比させる形式を採用することにした．すなわち，$n=2$ の類似比を copper mean（純銅比もしくはカッパー比）と共に，解説する類似比の幾何学的特徴が大和比や白銀比 [9,19,55-58]と重なる類似比の意味を込めて白銀比と同等に取り扱い，$n=3$ の類似比についても同様に nickel mean（白銅比もしくはニッケル比）と共に，導出こそ異なるが岩本の論文 [9]にも示される青銅比の数値の特徴に親しみを込めて取扱いながら同等に解説する．したがって，今後の研究調査の結果次第で，これらの名称が訂正される可能性が残されることは，読者にもご了承いただきたい．このため，表 1 と表 2 にこのことをわかりやすく対比した表を設定することとした.

表 1　貴金属比と貴金属比の類似比の呼称（カッパー比とニッケル比が貴金属比に属する場合）[15,36-37]

Table 1 Original metallic ratios and similar metallic ratios based on the naming of metallic mean including copper ratio and nickel ratio [15,36-37]

Order	Metallic ratios	Similar Metallic ratios
$n=1$	Golden ratio: $\lambda_{(1,1)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $(\lambda_{(1,1)}=1.618033\cdots)$	Golden ratio: $\lambda_{(1,1)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $(\lambda_{(1,1)}=1.618033\cdots)$
$n=2$	Silver ratio: $\lambda_{(2,1)}=1+\sqrt{2}$ $(\lambda_{(2,1)}=2.414213\cdots)$	Undefined: $\lambda_{(1,2)}=2$ $(\lambda_{(1,2)}=2)$
$n=3$	Bronze ratio: $\lambda_{(3,1)}=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ $(\lambda_{(3,1)}=3.302775\cdots)$	Undefined: $\lambda_{(1,3)}=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ $(\lambda_{(1,3)}=2.302775\cdots)$
$n=4$	Copper ratio: $\lambda_{(4,1)}=2+\sqrt{5}$ $(\lambda_{(4,1)}=4.236067\cdots)$	Undefined: $\lambda_{(1,4)}=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ $(\lambda_{(1,4)}=2.561552)$
$n=5$	Nickel ratio: $\lambda_{(5,1)}=\frac{5+\sqrt{29}}{2}$ $(\lambda_{(5,1)}=5.19258\cdots)$	Undefined: $\lambda_{(1,5)}=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$ $(\lambda_{(1,5)}=2.791287\cdots)$
$n=6$	Aluminum ratio: $\lambda_{(6,1)}=3+\sqrt{10}$ $(\lambda_{(6,1)}=6.162277\cdots)$	Undefined: $\lambda_{(1,6)}=3$ $(\lambda_{(1,6)}=3)$
Equation	$\lambda_{(n,1)}^2-n\lambda_{(n,1)}-1=0$ $\lambda_{(n,1)}=\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$	$\lambda_{(1,n)}^2-\lambda_{(1,n)}-n=0$ $\lambda_{(1,n)}=\frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$

表 2　貴金属比と貴金属比の類似比の呼称（カッパー比とニッケル比が貴金属比の類似比に属する場合）[38-40]
Table 2 Original metallic ratios and similar metallic ratios named by Vera W. de Spinadel [38-40]

Order	Metallic ratios	Similar metallic ratios
$n=1$	Golden ratio: $\lambda_{(1,1)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	Golden ratio: $\lambda_{(1,1)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$n=2$	Silver ratio: $\lambda_{(2,1)}=1+\sqrt{2}$	Copper ratio: $\lambda_{(1,2)}=2$
$n=3$	Bronze ratio: $\lambda_{(3,1)}=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	Nickel ratio: $\lambda_{(1,3)}=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$
Equation	$\lambda_{(n,1)}^2-n\lambda_{(n,1)}-1=0$ $\lambda_{(n,1)}=\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$	$\lambda_{(1,n)}^2-\lambda_{(1,n)}-n=0$ $\lambda_{(1,n)}=\frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$

すなわち，表 1 では，4 番目のカッパー比も 5 番目のニッケル比も貴金属比に属する命名表記法として，表 2 では類似比の 2 番目にカッパー比，3 番目にニッケル比が命名された表記法として記載されている．

本研究では，表 1 を基準とした類似比を用いて，類似比の 2 番目ならば第 2 類似比と表記することにする．しかし, デザインの世界では, これらの数式に関わりなく，貴金属比のうち，黄金比と白銀比（大和比）は市民権を得ており，これらに関連した意味合いで第 2 類似比を白銀比，第 3 類似比を青銅比と同意に取り扱っている．

このように表 1 を基準とするが，従来の類似比の命名法でもある表 2 の覚え方では，オリジナルの貴金属比をメダルの種類として黄金比，白銀比，青銅比に例え，類似比に相当するセカンダリである貴金属比の類似比を硬貨（コイン）の種類に例えて黄金比，カッパー比（純銅比），ニッケル比（白銅比）を想像していただけると区別しやいと考えられる [38]．

一方で，前作 [1,2]では図 1A で示すように，標準正規分布の累積分布関数の積分形を表わす緑色の曲線を提案している．この提案した曲線に重なる貴金属比の類似比から得られる幾何学的特徴が美しいので，数学的性質だけを精査するのではなく，今夏の東京オリンピックとパラリンピックが無事に終了したことも記念して，硬貨ではなくメダルの色でもある金銀銅と対比しながら，$n=1,2,3$ に対応する芸術作品としても鑑賞できるように作図については，著者の専門とは畑違いではあるが工夫を凝らしている．以上を留意して黄金比とピタゴラスの定理とフィボナッチ数列について再考を行って研究成果をまとめている．

ところで，前作の研究ノート [2]を記載しているときには，Wikipedia の日本語版の「ケプラーの三角形 [59]」は存在しなかった．したがって，英語版による記載「Kepler Triangle[60]」と文献 13)による英文で，ケプラー（Kepler）が発見した三角形の記述が紹介されていただけであった. 前作の投稿後に取り寄せた文献 13)の日本語版 [12]と，新設された日本語版 Wikipedia[59]から読者は下記のケプラーの残した重要な言葉を知ることができる．もしも，著者が前作を記したことが機会となり, Wikipedia の日本語版にも「ケプラー三角形」が掲載されたのならば大変光栄なことであるが，非常にタイミングが良い．そのケプラー三角形には以下の言葉が記されている．

“Geometry has two great treasures: one is the theorem of Pythagoras, the other the division of a line into extreme and mean ratio. The first we may compare to a mass of gold, the second we may call a precious jewel. [13,60]”

「幾何学には 2 つの宝がある. 一つはピタゴラスの定理, もう一つは外中比（黄金比）である．一つ目は金塊と比べ，二つ目は貴重な宝石と呼ぶことになるだろう [12,59]. 」

おそらく，ケプラーの業績 [25,61,62]の一つとして「宇宙の神秘」に関してや，雪の結晶が六角形である発見も周知であることから，ケプラー三角形の特徴や可能性もかなり探求されていたのではないかと思われる．その中の一つに, ケプラー三角形が等比数列を構成する [2,63]ことは知られていたようである [12,13,60]．その可能性を約 400 年後の現在にもう一度掘り起こす機会となるように本研究で確認できたこと [3-8]を解説したい．

本研究において，もう一つ重要なことがある．これまでの貴金属比の数列 [34-43,64-67]について，$n=2$ 番目はペル（Pell）数列と関連付けされて発展してきたが，本研究では，フィボナッチ（Fibonacci）数列

$$F_{(1,1),0}=0,\quad F_{(1,1),1}=1, \tag{1.1}$$
$$F_{(1,1),j}=F_{(1,1),j-1}+F_{(1,1),j-2}\ \ (j\geq 2)$$

と関連するペル数列 [64-70]

$$F_{(2,1),0}=0,\quad F_{(2,1),1}=1, \tag{1.2}$$
$$F_{(2,1),j}=2F_{(2,1),j-1}+F_{(2,1),j-2}\ \ (j\geq 2)$$

の代わりにヤコブスタール（Jacobsthal）数列[70-73)]

$$F_{(1,2),0} = 0, \quad F_{(1,2),1} = 1, \tag{1.3}$$
$$F_{(1,2),j} = F_{(1,2),j-1} + 2F_{(1,2),j-2} \ (j \geq 2)$$

を活用して，理論を組み立てた提案を行っている．オリジナルの貴金属比とヤコブスタール数列の関連について言及する類似比の文献は，de Spinadel の提案[38-40)]が見つかるが，類似比については芸術的にも数学的にも本研究で扱うことは言及されていない．また，ペル数列やヤコブスタール数列をフィボナッチ数列と対比しながら拡張させた形式を含む一般化されたフィボナッチ数列[70,74-76)]やフィボナッチ多項式[77,78)]の研究が存在する．このため，ヤコブスタール数列は一般化されたフィボナッチ数列の記述では，ペル数列と同様に注目されている．

そこで，以上に関する貴金属比の類似比について貴金属比と同様に連分数[79-81)]や多重根号[82-83)]に関する提案から始まり，一般化されたフィボナッチ数列の特徴を説明しながら提案や解説を行い，ピタゴラスの定理の活用を見直すこととする．これをもとに貴金属比の類似比による等角螺旋を数理的にかつ芸術的に描くために提案を行いながら，数式記号の活用を整理している．特に，ニュートン（Newton）による二項定理[84,85)]におけるフィボナッチ数列とパスカル（Pascal）の三角形[86,87)]の組み合わせは有名であり，これを視覚化の道具として活用してみたい．加えて，ガウス平面[88-90)]を用いるならば，オイラー（Euler）の公式[91,92)]の考え方やド･モアブル（de Moivre）の定理[93,94)]の考え方もベルヌーイ（Bernoulli）の対数螺旋（等角螺旋）に活かせる．また，前作で標準正規分布の累積分布関数を用いて貴金属比の類似比を説明してきたが，積事象に相当する二次元標準正規分布の同時確率を用いた考察も試みたい．さらに，ケプラーの功績といえば，楕円[95-97)]が思いつくように，貴金属比の類似比に対応する楕円も等角螺旋のモデル化に関連する鍵として活用したい．

以上をもとに，本研究は以下の構成により，解説や提案を行う．すなわち

2 章： 貴金属比と類似比の連分数と無限多重根号
3 章： 一般化されたフィボナッチ数列の紹介
4 章： 一般化されたフィボナッチ数列と
ピタゴラスの定理による
貴金属比の類似比の表記
5 章： 貴金属比の類似比による代数螺旋
6 章： 貴金属比の類似比の等角螺旋と楕円
7 章： 負の一般化されたフィボナッチ数列の表記
8 章： パスカルの三角形と二項定理による
一般化されたフィボナッチ数列と多項式
9 章： 貴金属比の類似比による
ガウス平面を用いた等角螺旋
10 章： ピタゴラスの定理との関係とデザインに言及
や本研究のまとめとしての考察
付録： 貴金属比の類似比と標準正規分布の関連付け

のとおりに展開を進める．また，解説や提案に用いる主な記号は下記のとおりである．

n ：n 番目の貴金属比に相当する序数
$\lambda_{(n,1)}$ ：n 番目の貴金属比の値
$\lambda_{(1,n)}$ もしくは m_n ：
n 番目の貴金属比の類似比の値
$F_{1,j}$ もしくは $F_{(1,1),j}$ ：
j 番目のフィボナッチ数
$F_{(2,1),j}$ ：
j 番目のペル数
$F_{2,j}$ もしくは $F_{(1,2),j}$ ：
j 番目のヤコブスタール数
$F_{n,j}$ ： n 番目の貴金属比の類似比に対応する
j 番目の一般化されたフィボナッチ数
k_n ： n 番目の貴金属比の類似比に対応する
標準正規分布の確率点
$\Phi(k_n)$ ： n 番目の貴金属比の類似比に対応する
標準正規分布の確率点 k_n による
累積分布関数の値（確率 $= 1/\sqrt{m_n}$ ）
z_n ： n 番目の貴金属比の類似比の
等角螺旋に対応する複素数
y_n ： 等角螺旋の虚部を示す値を簡略表記
（$= \sqrt{m_n - 1} = \sqrt{n}\Phi(k_n)$）

それでは，まず 2 章で貴金属比と類似比の連分数および多重根号の特徴について解説と提案を記述する．

2. 連分数および多重根号による貴金属比や貴金属比の類似比の提案と再考

2.1 黄金比の定義式

黄金比を定義する一般式は

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \tag{2.1}$$

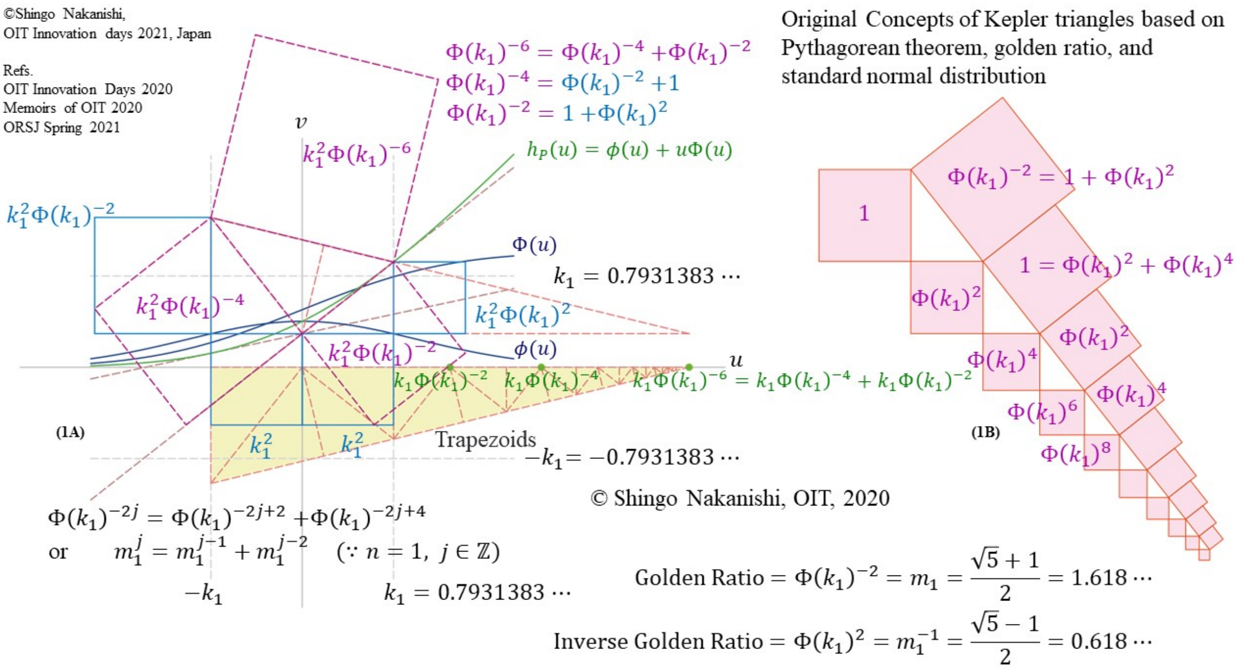


図 1　ピタゴラスの定理と黄金比とケプラーの三角形の再考 [2)]

Fig.1 Concepts about Kepler triangles using golden ratio and Pythagorean theorem [2)]

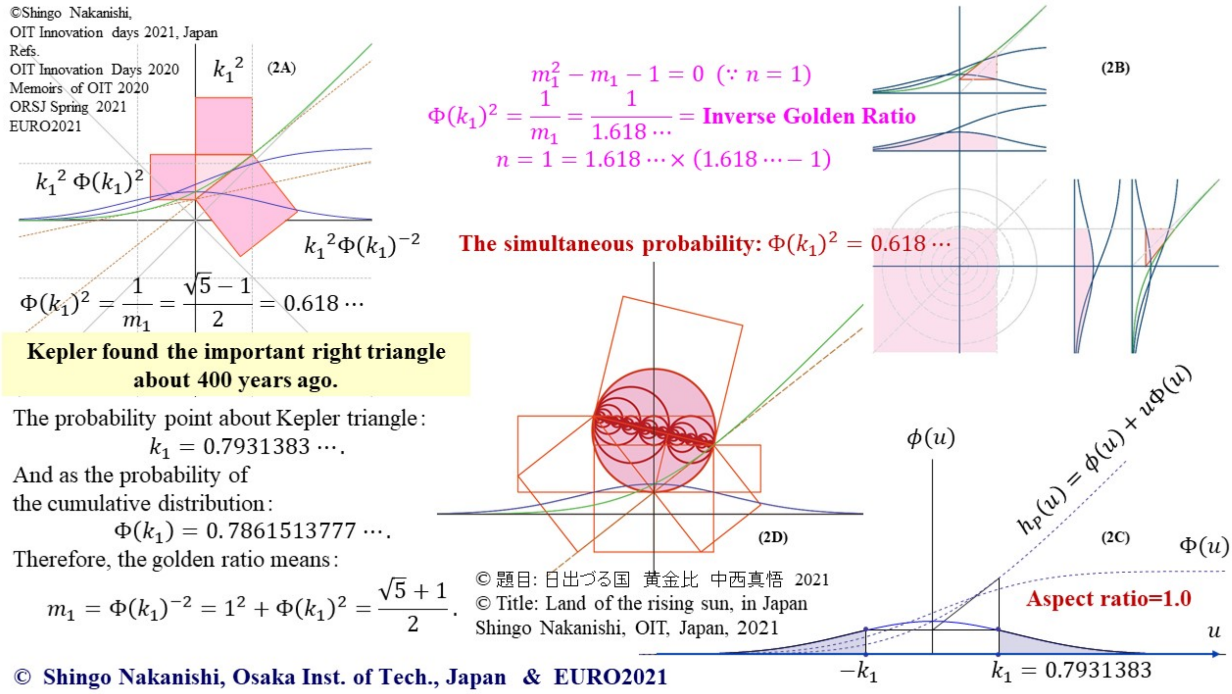
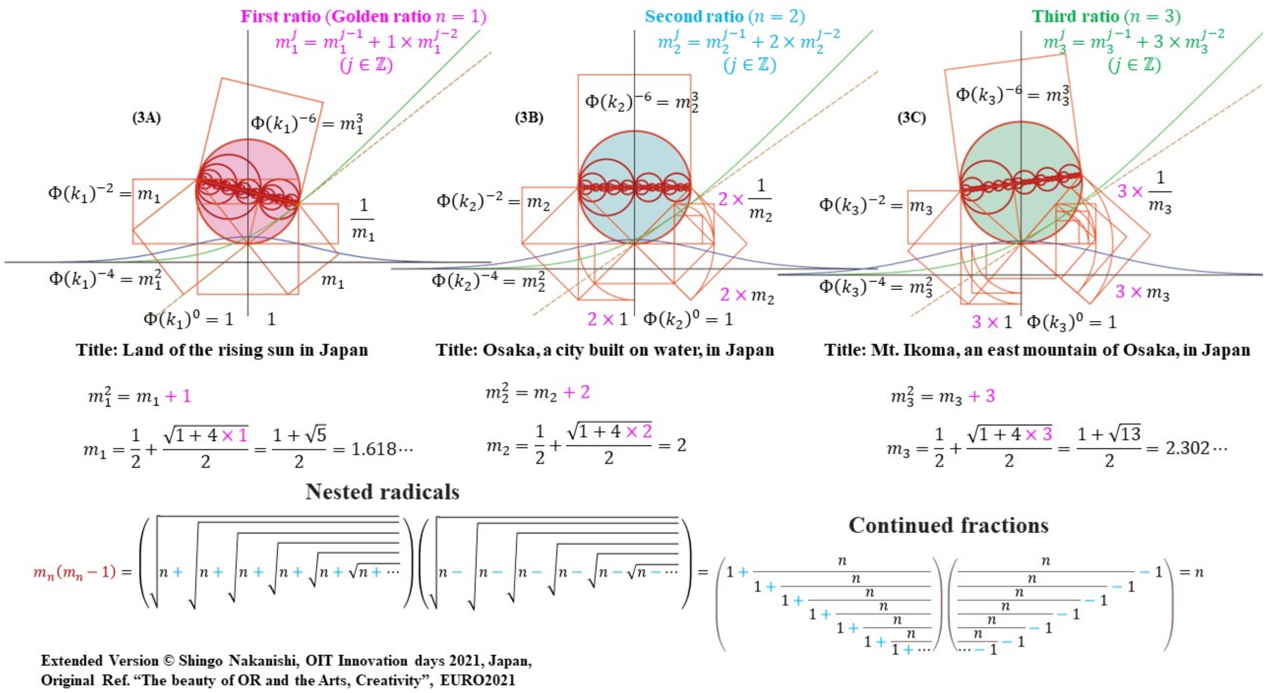


図 2　ケプラー三角形と標準正規分布の累積分布関数を用いた黄金比 [4,6)]

Fig. 2 Golden ratio using Kepler triangle and cumulative distribution function of standard normal distribution[4,6)]



$$m_n(m_n-1) = \left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\cdots}}}}}}\right)\left(\sqrt{n-\sqrt{n-\sqrt{n-\sqrt{n-\sqrt{n-\sqrt{n-\cdots}}}}}}\right) = \left(1+\cfrac{n}{1+\cfrac{n}{1+\cfrac{n}{1+\cfrac{n}{1+\cfrac{n}{1+\cdots}}}}}\right)\left(\cfrac{n}{\cfrac{n}{\cfrac{n}{\cfrac{n}{\cfrac{n}{\cdots-1}-1}-1}-1}-1}-1\right) = n$$

図３　ピタゴラスの定理と貴金属比の類似比の数理的特性と幾何学的特性 [6-8]

Fig. 3 Mathematical and geometric characterizations about similar metric ratios and these Pythagorean theorem[6-8]

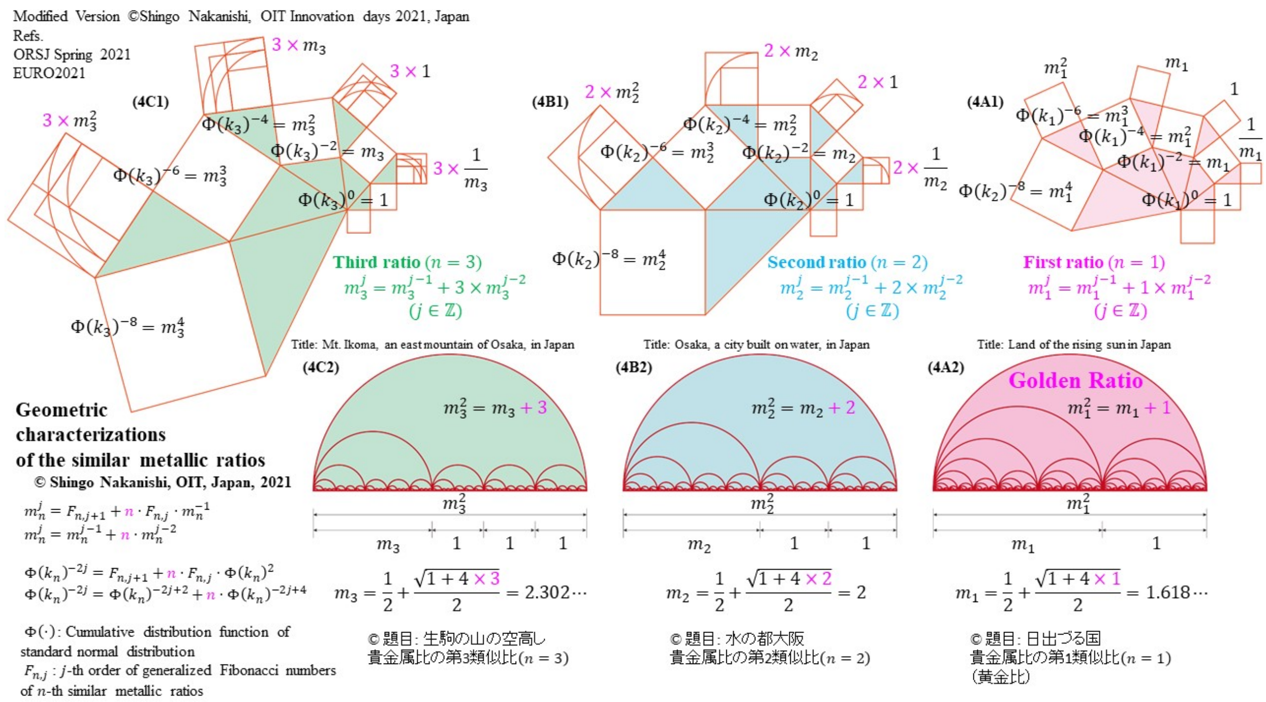


図４　一般化されたフィボナッチ数列とピタゴラスの定理に基づく貴金属比の類似比の幾何学的定義 [6-8]

Fig.4 Geometric definitions about similar metallic ratios based on generalized Fibonacci sequences and Pythagorean theorem[6-8]

$$\because \quad \phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \text{Golden Ratio}$$
$$\phi = 1.618033\cdots (= \lambda_{(n,1)} = \lambda_{(1,n)} = m_1)$$

である．この式(2.1)は

$$\frac{\phi}{\phi+1} = \frac{1}{\phi} \tag{2.2}$$

もしくは

$$\frac{\phi-1}{\phi^2-\phi} = \frac{\phi-1}{1} = \frac{1}{\phi} \tag{2.3}$$

となる比の関係を示す．それゆえ，神聖な比として，古代ギリシャのユークリッドが記した「ユークリッド原論」では外中比と呼ばれる名称で記述されていることも加わり，その比率の美しさが多くの歴史的な芸術作品や建造物に影響を与えているようである[13,14)].

著者もこの美しさに感嘆して，図 1 と図 2 に示す黄金比に関連する作品を作成した[6-8)]．図 1 A は，標準正規分布の累積分布関数を傾きにケプラー三角形が描くピタゴラスの定理の視覚化とケプラー三角形から構成された台形を用いた等比数列である．図 1 B には，この等比数列によるケプラー三角形が描かれているが，Kapusta[63)]が 2004 年に発表している．また，図 2B には，二次元結合標準正規分布の同時確率が黄金比の逆数の場合として描かれている[6,7)].

この考え方が本研究における重要な位置づけ[1,2)]となる．図 2D は，図 1A の作品に日本の美を重ね合わせたつもりで制作したので，特別に「日出づる国 (Land of the rising sun in Japan)」と命名している[6-8)].

この「日出づる国」の図の幾何学的性質が，貴金属比の類似比において重要な役割を果たしたので，解説の前に図 3 と図 4 を貴金属比の類似比の特徴として例示しておく．特に，貴金属比の類似比が芸術的観点からも活用されることを期待して，日本の美，水の都大阪，大阪工業大学の大学歌に親しみを込めて

- 第 1 類似比（黄金比）に関する作図
  「日出づる国（Land of the rising sun in Japan）」
- 第 2 類似比に関する作図
  「水の都大阪（Osaka, a city bult on water, in Japan）」
- 第 3 類似比に関する作図
  「生駒の山の空高し
  （Mt. Ikoma, an east mountain of Osaka, in Japan）」

と命名した[6-8)]．それぞれ，陽の光，街の清流，野山の新緑の大切さを感じていただけると幸いである．

この図 3 と図 4 を記憶に留めて読んでいただくと貴金属比の類似比の幾何学的特徴がわかりやすいと思われる．特記すべき点は，図 3 と図 4 では，導出こそ貴金属比とは異なるが，芸術作品やデザインとの相性を考慮してオリジナルの貴金属比の序数 n に合わせて，貴金属比の類似比の呼称を統一して良いかもしれない．よって，表 2 の de Spinadel の命名法は用いていない．すなわち，表 1 が基準である．また, 図 3 には, これから解説する n に関連する連分数[79-81)]と無限多重根号[82,83)]を示している．次節ではその意味がわかるように，この二つの特徴に関する貴金属比や貴金属比の類似比の解説および提案を行う．

2.2 黄金比の定義式の拡張と多重根号と連分数の考え方

式(2.1)の係数の大きさを考慮した関係式を

$$\lambda_{(a,b)}^2 - a\lambda_{(a,b)} - b = 0 \tag{2.4}$$
$$\because \quad \lambda_{(a,b)} = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2+4b}}{2}$$

と定義する．ここに，a および b は自然数とする．後ほど，制御理論で登場する人物とは異なる Kalman と Mena による一般化されたフィボナッチ数列の関係式[75)]を示すこととして，この関係について彼らが用いた記述 $\mathcal{R}(a,b)$ で提案する．この関係式を符号にも注意しながら

$$\left(\lambda_{(a,b)} - a\right)^2 + a\left(\lambda_{(a,b)} - a\right) - b = 0 \tag{2.5}$$

もしくは

$$\left(a - \lambda_{(a,b)}\right)^2 - a\left(a - \lambda_{(a,b)}\right) - b = 0 \tag{2.6}$$

により

$$\because \quad \lambda_{(a,b)} - a = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2+4b}}{2} \tag{2.7}$$

と読み替えるとき，次の二つの興味深い結果を得ることができる[7,8]．

まず，一つ目の結果は下記のような連分数による表記が可能である．すなわち

$$\lambda_{(a,b)} = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cdots}}}} \tag{2.8}$$

と

$$\lambda_{(a,b)} - a = \cfrac{b}{\cfrac{b}{\cfrac{b}{\cfrac{b}{\cdots - a} - a} - a} - a} - a \tag{2.9}$$

である[7,8]．よって，式(2.8)と式(2.9)の二式の積

$$\lambda_{(a,b)}\left(\lambda_{(a,b)} - a\right) = \left(a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cdots}}}}\right) \times \left(\cfrac{b}{\cfrac{b}{\cfrac{b}{\cfrac{b}{\cdots - a} - a} - a} - a} - a\right) = b \tag{2.10}$$

が成り立つ[7,8]．

二つ目の結果は，下記の無限多重根号である．すなわち

$$\lambda_{(a,b)} = \sqrt{b + a\sqrt{b + a\sqrt{b + a\sqrt{b + \cdots}}}} \tag{2.11}$$

および

$$\lambda_{(a,b)} - a = \sqrt{b - a\sqrt{b - a\sqrt{b - a\sqrt{b - \cdots}}}} \tag{2.12}$$

である[7,8]．したがって，式(2.11)と式(2.12)の二式の積もまた

$$\lambda_{(a,b)}\left(\lambda_{(a,b)} - a\right) = \left(\sqrt{b + a\sqrt{b + a\sqrt{b + a\sqrt{b + \cdots}}}}\right) \times \left(\sqrt{b - a\sqrt{b - a\sqrt{b - a\sqrt{b - \cdots}}}}\right) = b \tag{2.13}$$

が成り立つ[7,8]．特記すべき点として，式(2.10)や式(2.13)の定式化は，一見一般論のように見えるが，連分数や多重根号の専門書にも記載されていないようである．

2.3　貴金属比の多重根号と連分数の表記の意味

2.2 の二つの特徴について，$\mathcal{R}(n, 1)$ が従来から周知の貴金属比と呼ばれる．すなわち，

$$\lambda_{(n,1)}^2 - n\lambda_{(n,1)} - 1 = 0 \tag{2.14}$$

$$\because\ \lambda_{(n,1)} = \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n^2+4}}{2} = n \text{ th Metallic Ratio}$$

と定義されてきた[9,38-40]．本研究の **2.1** 節で定義した二つの結果を用いて示すと次の通りとなる．まず，

$$\lambda_{(n,1)} - n = \frac{1}{\lambda_{(n,1)}} = -\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n^2+4}}{2} \tag{2.15}$$

を活用して，その連分数は

$$\lambda_{(n,1)} = n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cdots}}}} \tag{2.16}$$

が周知[9,38]であるだけではなく，

$$\lambda_{(n,1)} - n = \cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{\cdots - n} - n} - n} - n} - n \tag{2.17}$$

も新たに示すことができる[7,8]．したがって，式(2.16)と式(2.17)の積は

$$\lambda_{(n,1)}\left(\lambda_{(n,1)} - n\right) = \left(n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cdots}}}} \right)$$

$$\times \left(\cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{\cdots - n} - n} - n} - n} - n \right) = 1 \tag{2.18}$$

と示すことができる[7,8]．同様に，その無限多重根号は

$$\lambda_{(n,1)} = \sqrt{1 + n\sqrt{1 + n\sqrt{1 + n\sqrt{1 + \cdots}}}} \tag{2.19}$$

が周知[9,38]であるが，

$$\lambda_{(n,1)} - n = \sqrt{1 - n\sqrt{1 - n\sqrt{1 - n\sqrt{1 - \cdots}}}} \tag{2.20}$$

も成り立つ．これらを用いて

$$\lambda_{(n,1)}\left(\lambda_{(n,1)} - n\right) = \left(\sqrt{1 + n\sqrt{1 + n\sqrt{1 + n\sqrt{1 + \cdots}}}} \right)$$

$$\times \left(\sqrt{1 - n\sqrt{1 - n\sqrt{1 - n\sqrt{1 - \cdots}}}} \right) = 1 \tag{2.21}$$

と示すことができる[7,8]．すなわち，

$$\lambda_{(n,1)} = \frac{1}{\lambda_{(n,1)} - n} \tag{2.22}$$

に，以上の無限多重根号や連分数で表わせる関係が良くわかる[7,8]．

2.4 貴金属比の類似比の多重根号と連分数の表記の意味

一方で，n と 1 を入れ替えた $\mathcal{R}(1,n)$ の関係で示された貴金属比の類似比に関して提案を行ったが，その前作の定義式[2]は，式(2.4)より

$$\because\ \lambda_{(1,n)} = m_n = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4n}}{2}$$
$$= n \text{ th Similar Metallic Ratio} \tag{2.23}$$

とする．したがって，

$$m_n - 1 = \frac{n}{m_n} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4n}}{2} \tag{2.24}$$

も用いて，その連分数は

$$m_n = 1 + \cfrac{n}{1 + \cfrac{n}{1 + \cfrac{n}{1 + \cfrac{n}{1 + \cdots}}}} \tag{2.25}$$

および

$$m_n - 1 = \cfrac{n}{\cfrac{n}{\cfrac{n}{\cfrac{n}{\cdots - 1} - 1} - 1} - 1} - 1 \tag{2.26}$$

を示すことができる．その積は式(2.25)と式(2.26)を用いて

$$m_n(m_n-1)=\left(1+\cfrac{n}{1+\cfrac{n}{1+\cfrac{n}{1+\cfrac{n}{1+\cdots}}}}\right)$$

$$\times\left(\cfrac{n}{\cfrac{n}{\cfrac{n}{\cfrac{n}{\cdots-1}-1}-1}-1}-1\right)=n \tag{2.27}$$

と表わすことができる[6]．同様に，無限多重根号は

$$m_n=\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\cdots}}}} \tag{2.28}$$

と

$$m_n-1=\sqrt{n-\sqrt{n-\sqrt{n-\sqrt{n-\cdots}}}} \tag{2.29}$$

が得られるので，その積もまた

$$m_n(m_n-1)=\left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\cdots}}}}\right)$$

$$\times\left(\sqrt{n-\sqrt{n-\sqrt{n-\sqrt{n-\cdots}}}}\right)=n \tag{2.30}$$

と表わすことができる[6]．

さらに，幾何平均の考え方[53, 98-100]として

$$\frac{m_n-\alpha}{\beta-m_n}=\frac{\alpha}{m_n} \tag{2.31}$$

を考える．すなわち，式(2.31)を m_n についてまとめるときに，幾何平均は

$$m_n=\sqrt{\alpha\beta} \tag{2.32}$$

を示す考え方である．ここで，$\alpha=1$ とおくとき， $\beta=m_n^2$ でなければならないので，これらを代入するときには

$$\frac{m_n-1}{m_n^2-m_n}=\frac{1}{m_n}\left(=\frac{m_n-1}{n}\right) \tag{2.33}$$

と表わせる．よって，貴金属比の類似比である定義式は

$$m_n^2-m_n-n=0 \tag{2.34}$$

と表現でき，幾何平均の特徴を有する展開式となる[2,4,5]．

以上を用いて，従来の貴金属比と対比しながら，前作で提案した貴金属比の類似比の定義式の連分数と多重根号を示した．次節では， $n=1$ の場合といくつかの n についての連分数に関する注意点を記したい．

2.5 黄金比の逆数や貴金属比の類似比引く 1 となる（m_n-1）の多重根号と連分数の表記の注意事項

一方で，$n=1$ に関する $\phi-1$ で示す黄金比の逆数 $1/\phi$ を示す多重根号[23)]

$$\phi-1=\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\cdots}}}} \tag{2.35}$$

と連分数

$$\phi-1=\cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{\cdots-1}-1}-1}-1}-1 \tag{2.36}$$

は成立しないのではと尋ねられるかもしれない．確かに $n=1$ のために収束しないことは既知である．加えて，収束しないので無限に再帰する計算を取り扱いながら実証することも困難である．しかし，敢えて実証を行うときに多重根号では初項に 10 のマイナス 10 乗以下の十分小さな数値 ε を 1 から減じて，根号内が虚数にならないように注意しながら用いてみると

$$\phi - 1 \cong \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 \cdots \sqrt{1 - \sqrt{1 - \varepsilon}}}}} \quad (2.37)$$

の収束が確認できる．一方で，連分数では,

$$\phi - 1 = \cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{\phi - 1} - 1} - 1} - 1} - 1} - 1 \quad (2.38)$$

と再帰させていくときには，原理的に等式が成り立つ. しかし，分数計算を用いて実際に計算を試してみると分母の小数の精度と減算が原因で黄金比の逆数 $\phi - 1$ にではなく，途中で値が大きく変異して $-\phi$ に収束することが確認できる．同様のことが，$m_n - 1$ に関する連分数の計算過程でも散見されるので注意を要することを記す. このため, 式(2.9)で示す連分数の実際の $\lambda_{(a,b)} - a$ の計算は注意が必要であるが，多重根号 では $1 - \varepsilon$ を 1 とみなせれば実用上は問題がないことを追記しておく. 読者はプログラムを記述しなくてもよい．お手元にある PC のソフトウェアである Microsoft Excel®を活用したら容易に確認することができる.

以上のとおり，貴金属比および貴金属比の類似比に関する連分数と多重根号の新たな知見を記した. 次章では, 貴金属比の類似比に関連する一般化されたフィボナッチ数列について解説する [7,8].

3. 本研究で用いる一般化されたフィボナッチ数列の表記

黄金比ならびに貴金属比の類似比と同時に考察されるフィボナッチ数列を, 本研究では関係 $\mathcal{R}(a,b)$ を用いた一般化されたフィボナッチ数列

$$\begin{aligned} &F_{(a,b),0} = 0, \qquad F_{(a,b),1} = 1, \\ &F_{(a,b),j} = a \cdot F_{(a,b),j-1} + b \cdot F_{(a,b),j-2} \quad (j \geq 2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

と定義する．これは，Kalman と Mena らによる定義式 [75] で，一般化されたフィボナッチ数列の原典である Horadam による提案式 [74] と意味や発想における原理は同意であるが，異なる定義式である.

Kalman と Mena の論文での行列表記 [75] と上下の行の順序が入れ替わるが，本研究で用いる行列表記は

$$\begin{pmatrix} F_{(a,b),j+1} \\ F_{(a,b),j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^j \begin{pmatrix} F_{(a,b),1} \\ F_{(a,b),0} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

とする表記方法 [73] を採用した．そこで，本研究で取り扱う貴金属比の類似比に相当する関係 $\mathcal{R}(1,n)$ における一般化されたフィボナッチ数列を

$$\begin{aligned} &F_{n,0} = 0, \qquad F_{n,1} = 1, \\ &F_{n,j} = F_{n,j-1} + n \cdot F_{n,j-2} \quad (j \geq 2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

と表記するとき

$$\begin{pmatrix} F_{n,2} & n \cdot F_{n,1} \\ F_{n,1} & n \cdot F_{n,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

と定義できる [73]．したがって，拡張されたフィボナッチ行列として

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_{n,3} & n \cdot F_{n,2} \\ F_{n,2} & n \cdot F_{n,1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_{n,2} & n \cdot F_{n,1} \\ F_{n,1} & n \cdot F_{n,0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

ならびに

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_{n,4} & n \cdot F_{n,3} \\ F_{n,3} & n \cdot F_{n,2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_{n,3} & n \cdot F_{n,2} \\ F_{n,2} & n \cdot F_{n,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 \end{aligned} \quad (3.6)$$

が表記できる [73]．同様に

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_{n,j+1} & n \cdot F_{n,j} \\ F_{n,j} & n \cdot F_{n,j-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_{n,j} & n \cdot F_{n,j-1} \\ F_{n,j-1} & n \cdot F_{n,j-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{j-1} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^j \end{aligned} \quad (3.7)$$

の関係が得られる [73]．また，負の一般化されたフィボナッチ数列も取り扱えるように,

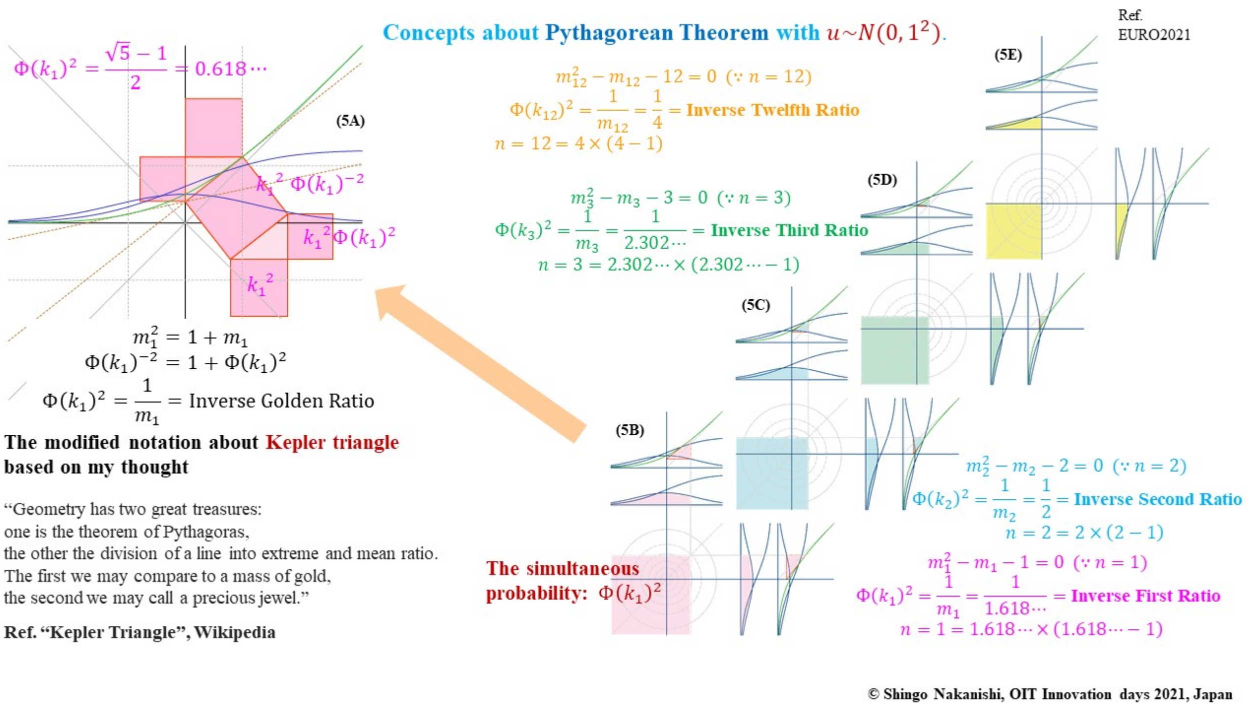


図 5　結合標準正規分布の同時確率を用いた貴金属比の類似比の概念図 [6-8]

Fig. 5 Concept of similar metallic ratios using simultaneous probabilities on the joint standard normal distribution[6-8]

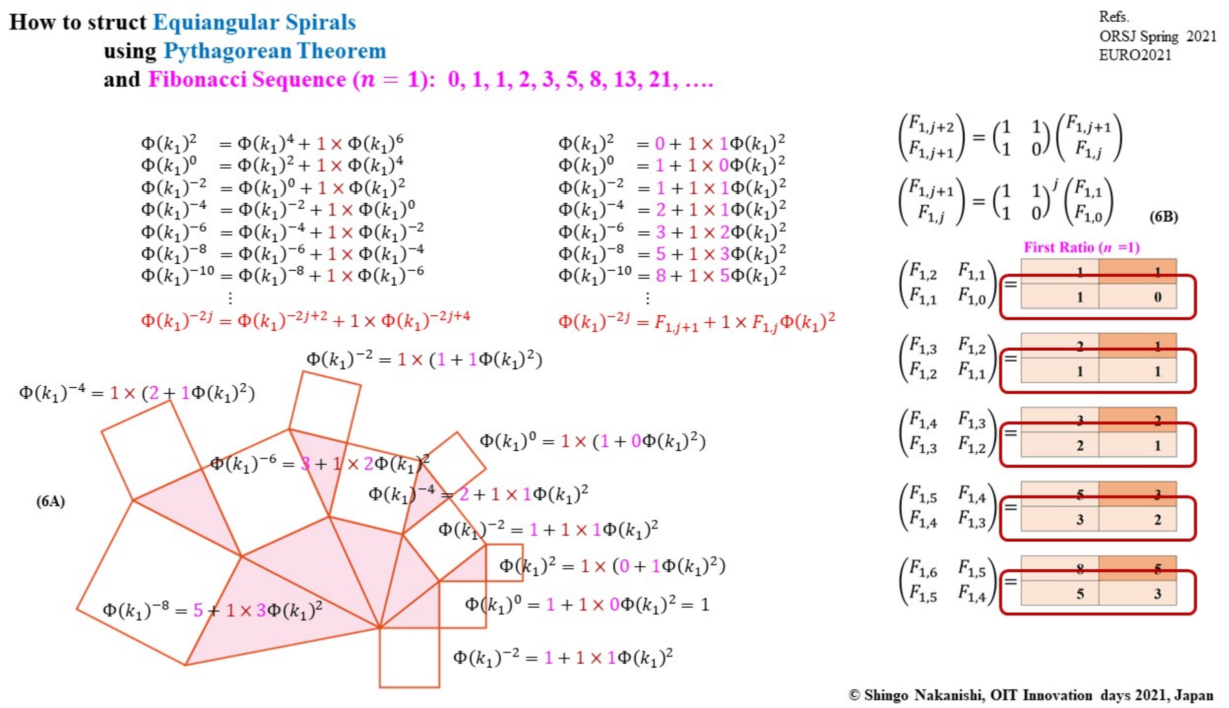


図 6　ピタゴラスの定理とケプラー三角形とフィボナッチ数列による
黄金比に関連する貴金属比の第 1 類似比の概念図 [5,6]

Fig .6 First similar metallic ratio related to the golden ratio using Pythagorean theorem, Kepler triangles, and Fibonacci sequence[5,6]

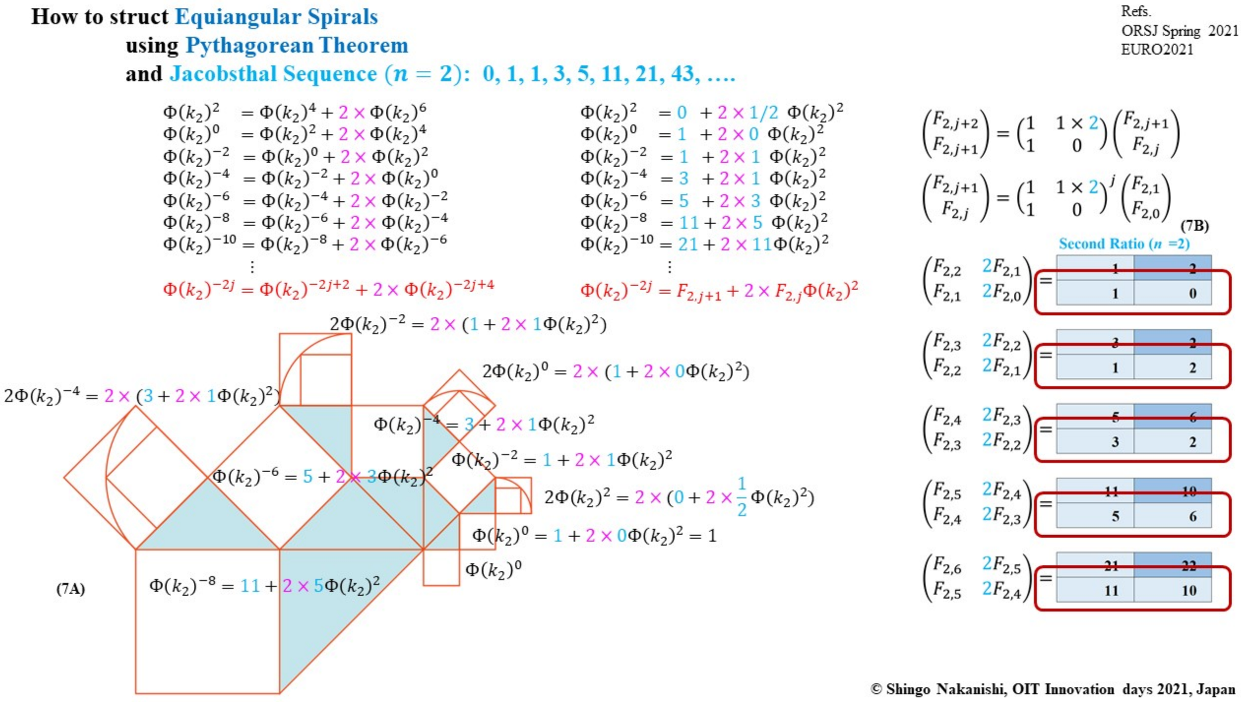


図７　ピタゴラスの定理と直角二等辺三角形とヤコブスタール数列による
白銀比に関連する貴金属比の第２類似比の概念図[5,6]

Fig .7 Second similar metallic ratio related to the silver ratio
using Pythagorean theorem, right-angled isosceles triangle, and Jacobsthal sequence[5,6]

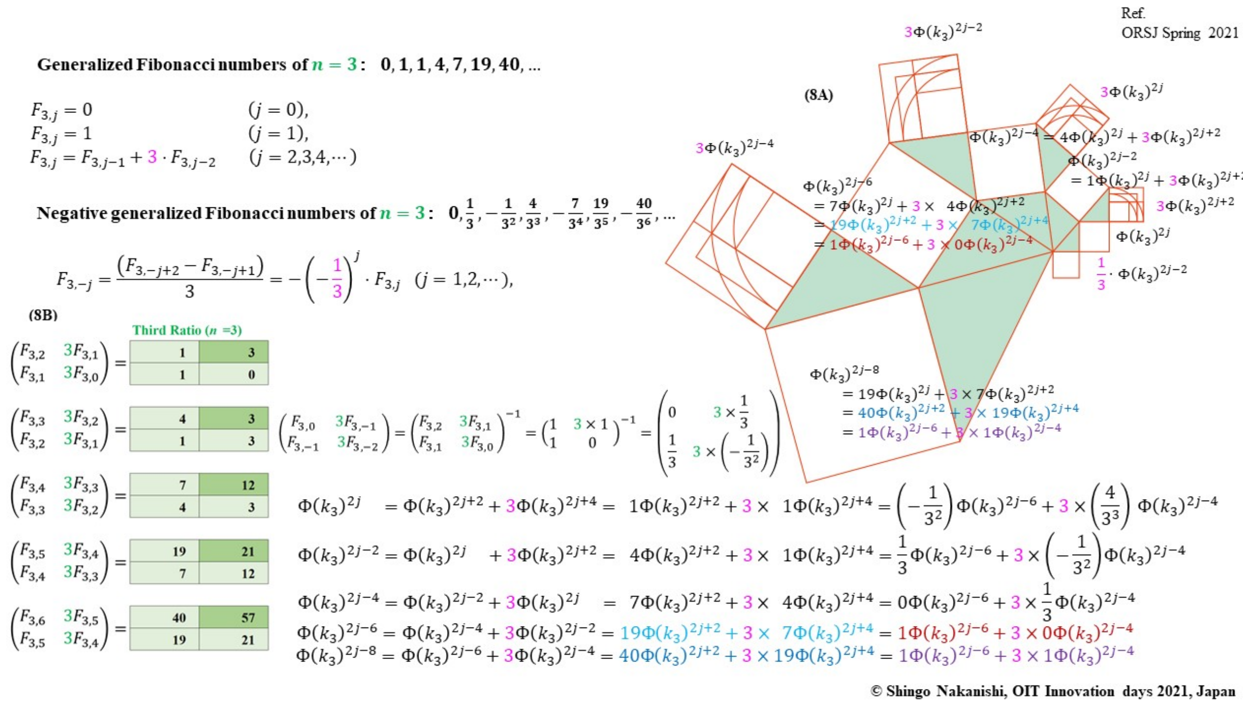


図８　ピタゴラスの定理と一般化されたフィボナッチ数列による青銅比に関連する貴金属比の第３類似比の概念図[5,6]

Fig .8 Third similar metallic ratio related to the bronze ratio using Pythagorean theorem and generalized Fibonacci sequence[5,6]

表 3　貴金属比の類似比と標準正規分布の累積確率およびその確率点の数値例 ($n=1$から12)[2)]

Table 3 Numerical illustrations of similar metallic ratios, these cumulative probabilities of standard normal distribution, and these probability points (from $n=1$ to 12)[2)]

n	m_n	m_n-1	$\Phi(k_n)$	k_n
1	$1.618\cdots$	$0.618\cdots$	$0.786\cdots$	$0.793\cdots$
2	2	1	$0.707\cdots$	$0.544\cdots$
3	$2.302\cdots$	$1.302\cdots$	$0.658\cdots$	$0.409\cdots$
4	$2.561\cdots$	$1.561\cdots$	$0.624\cdots$	$0.318\cdots$
5	$2.791\cdots$	$1.791\cdots$	$0.598\cdots$	$0.249\cdots$
6	3	2	$0.577\cdots$	$0.195\cdots$
7	$3.192\cdots$	$2.192\cdots$	$0.559\cdots$	$0.150\cdots$
8	$3.372\cdots$	$2.372\cdots$	$0.544\cdots$	$0.111\cdots$
9	$3.541\cdots$	$2.541\cdots$	$0.531\cdots$	$0.078\cdots$
10	$3.701\cdots$	$2.701\cdots$	$0.519\cdots$	$0.049\cdots$
11	$3.854\cdots$	$2.854\cdots$	$0.509\cdots$	$0.023\cdots$
12	4	3	0.5	0

$$\begin{pmatrix} F_{n,0} & n\cdot F_{n,-1} \\ F_{n.-1} & n\cdot F_{n,-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{n} & -\dfrac{1}{n} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

を用いる．同様に，単位行列を示す拡張されたフィボナッチ行列は

$$\begin{pmatrix} F_{n,1} & n\cdot F_{n,0} \\ F_{n.0} & n\cdot F_{n,-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n\cdot\dfrac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

が成立することも付記する．

以上から，本研究で取り扱う貴金属比の類似比に関連した一般化されたフィボナッチ数列は

$$\begin{pmatrix} F_{n,j+1} \\ F_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n,j} + n\cdot F_{n,j-1} \\ F_{n,j-1} + n\cdot F_{n,j-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{j} \begin{pmatrix} F_{n,1} \\ F_{n,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{j} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

として見積って取り扱うこととする．これらの行列計算もまた，Microsoft Excel®の標準関数で行列の積を計算する MMult 関数[100)]と，逆行列を計算する MInverse 関数[101)]を用いるならば容易に計算できる．次章では，ピタゴラスの定理と一般化されたフィボナッチ数列を活用した貴金属比の類似比の特徴を説明する．

4.　ピタゴラスの定理と一般化フィボナッチ数列の活用および再考

2 章で黄金比と貴金属比の類似比の定義式を説明し，3 章で同時に考察される一般化されたフィボナッチ数列を記述した．本章では，これらを関係付けるためにピタゴラスの定理を用いる．具体的には，標準正規分布の累積分布関数を図 1A と図 2A，図 2C，図 2D のように用いてケプラー三角形を考え，確率の平方と 1 の平方の和が，確率の逆数の平方となる特徴を活用する．すなわち，次の手順を行いながら活用する[2)]．

(1) n 番目の貴金属比の類似比 m_n に対応する標準正規分布上で原点からの距離でもある確率点を k_n と想定する．
(2) 標準正規分布上で原点から確率点 k_n までの距離を正規化して 1 と考える．
(3) 標準正規分布の累積分布関数を積分した時の傾き

$$\Phi(k_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{k_n} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du \tag{4.1}$$

は一次導関数として傾きを示すため，図 1C に示す傾きが直角三角形の高さを示す．
(4) このときの $\Phi(k_n)$ を用いて図 2B や図 5B から図 5E のように示した二次元結合標準正規分布の積事象となる同時確率 $\Phi(k_n)^2$ の逆数を用いて，貴金属比の類似比

$$m_n = \frac{1}{\Phi(k_n)^2} \tag{4.2}$$

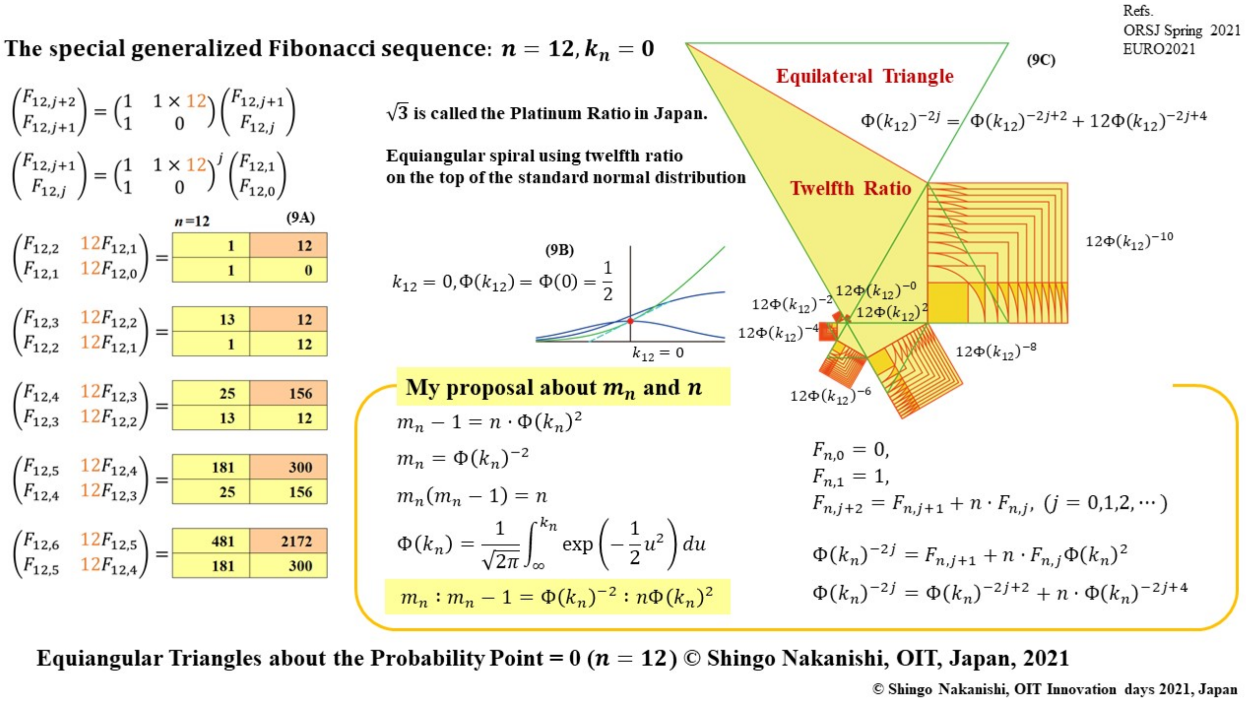


図 9　ピタゴラスの定理と一般化されたフィボナッチ数列による
白金比に関連する貴金属比の第 12 類似比の概念図 [2,5,6]

Fig .9 Twelfth similar metallic ratio related to the platinum ratio using Pythagorean theorem and generalized Fibonacci sequence[2,5,6]

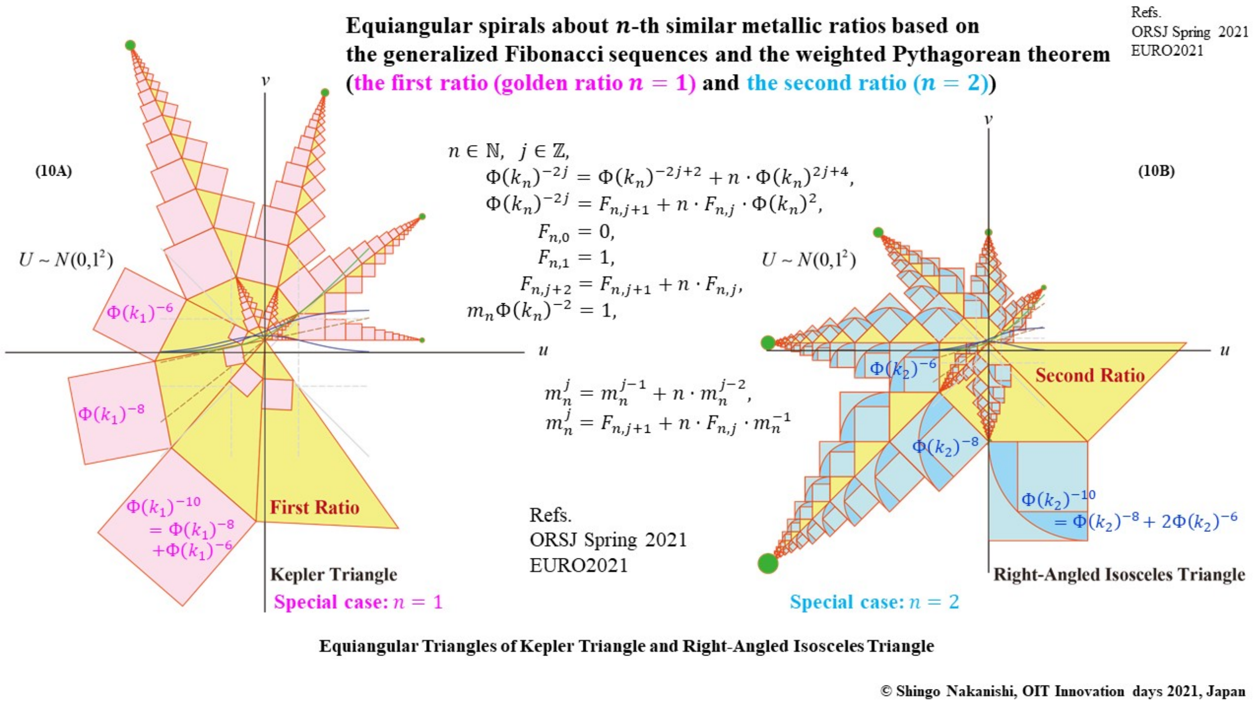


図 10　黄金比による第 1 類似比と白銀比に相当する第 2 類似比に関連した
フラクタルを目指したピタゴラスの定理と一般化されたフィボナッチ数列による等角螺旋の概念図 [5,6]

Fig .10 Fractals and equiangular spirals using Pythagorean theorem and generalized Fibonacci sequence
about first ratio called the golden ratio and second ratio related to the silver ratio[5,6]

が成立するように確率点 k_n を決定する．具体的に，これらの数値 m_n，m_n-1，$\Phi(k_n)$ と，これらから得られる k_n の数値を n が1から12までの場合について表3に例示しておく．

以上から，$n=1$ のときは，貴金属比の類似比として第1類似比でもある黄金比の定義式が記述できる．すなわち，図 2A の標準正規分布上に描くケプラー三角形を参考に

$$m_1\Phi(k_1)^2=1 \tag{4.3}$$
$$m_1^2-m_1-1=0$$
$$\Phi(k_1)^{-2}=1+\Phi(k_1)^2$$
$$\left(\begin{aligned}\because m_1&=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\text{Golden Ratio}\\ \Phi(k_1)^2&=\left(\int_{-\infty}^{k_1}\phi(u)du\right)^2\\ &=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{k_1}\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)du\right)^2\\ &=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618\cdots\\ &=\text{Inverse Golden Ratio}\\ k_1&=0.7931383\cdots\end{aligned}\right)$$

と定義できる[2]．式(4.3)で用いる $\phi(u)$ は，確率変数 u に関する標準正規分布の確率密度関数である．一般に黄金比も ϕ が用いられているので，区別できるように貴金属比の場合には，$\lambda_{(n,1)}$ を用いて，貴金属比の類似比の説明の場合には，$\lambda_{(1,n)}=m_1$ をできるだけ活用するように心掛けて記述を行っている．また，確率変数の値 $u=k_n$ の場合の標準正規分布の累積分布関数が示す値 $\Phi(k_n)$ を用いて貴金属比の類似比を示す式(4.2)を活用しているので，読者は他の専門書と対比しながら記述方法には注意していただきたい．この式(4.3)でも，ケプラー三角形の比

$$\Phi(k_1)^{-2}:\Phi(k_1)^{-1}:1=m_1:\sqrt{m_1}:1 \tag{4.4}$$
$$=\frac{\sqrt{5}\ +1}{2}:\sqrt{\frac{\sqrt{5}\ +1}{2}}:1$$
$$=1.618\cdots:1.272\cdots:1$$

が重要な役割を果たし，これを満たすピタゴラスの定理が活用できる．この考え方を用いて，式(4.3)を図 1B に示す再帰を表現するには

$$\Phi(k_1)^{-2j}=\Phi(k_1)^{-2j+2}+\Phi(k_1)^{-2j+4} \tag{4.5}$$
$$m_1^j=m_1^{j-1}+m_1^{j-2},\quad j\in\mathbb{Z}$$

を用いればよい．また，フィボナッチ数列との関係式は

$$\Phi(k_1)^{-2}=1+\Phi(k_1)^2$$

$$\begin{aligned}\Phi(k_1)^{-4}&=\Phi(k_1)^{-2}+1\\ &=2+\Phi(k_1)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi(k_1)^{-6}&=\Phi(k_1)^{-4}+\Phi(k_1)^{-2}\\ &=3+2\Phi(k_1)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi(k_1)^{-8}&=\Phi(k_1)^{-6}+\Phi(k_1)^{-4}\\ &=5+3\Phi(k_1)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi(k_1)^{-10}&=\Phi(k_1)^{-8}+\Phi(k_1)^{-6}\\ &=8+5\Phi(k_1)^2\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\Phi(k_1)^{-2j}&=\Phi(k_1)^{-2j+2}+\Phi(k_1)^{-2j+4}\\ &=F_{1,j+1}+F_{1,j}\cdot\Phi(k_1)^2\end{aligned} \tag{4.6}$$

と表記することができる[2]．この考え方の概念図は図 6 に示すように描ける[2,5,6]．図 6A のフィボナッチ数列を用いた関係と図 6B のフィボナッチ行列の数値を調べると必ず一致していることが確認できる[2]．

したがって，図 6 だけではなく，図 7 と図 8 にも示すように個々の特徴を有する直角三角形を参考に描くことに注意して，n 番目の貴金属比の類似比の関係式は

$$m_n\Phi(k_n)^2=1 \tag{4.7}$$
$$m_n^2-m_n-n=0$$
$$\Phi(k_n)^{-2}=1+n\Phi(k_n)^2$$

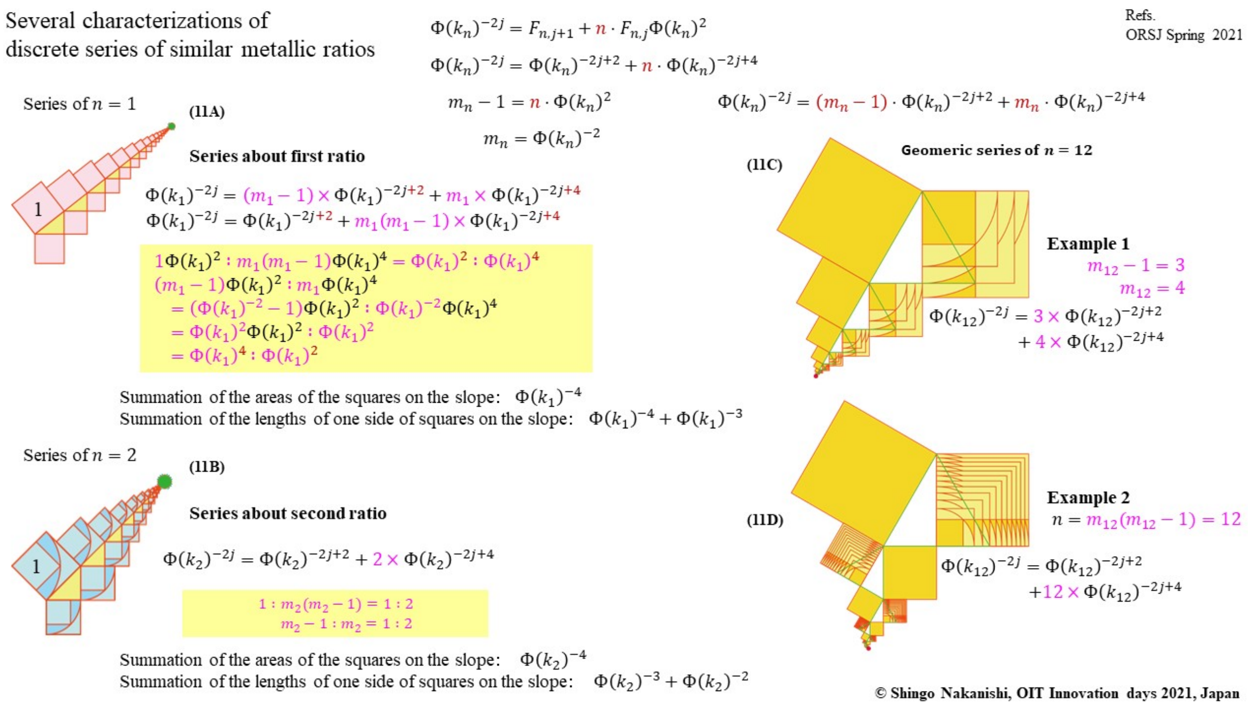


図 11　貴金属比の類似比が連なる場合の関係図 [5,7]

Fig .11 Several illustrated cases of series about similar metallic ratios[5,7]

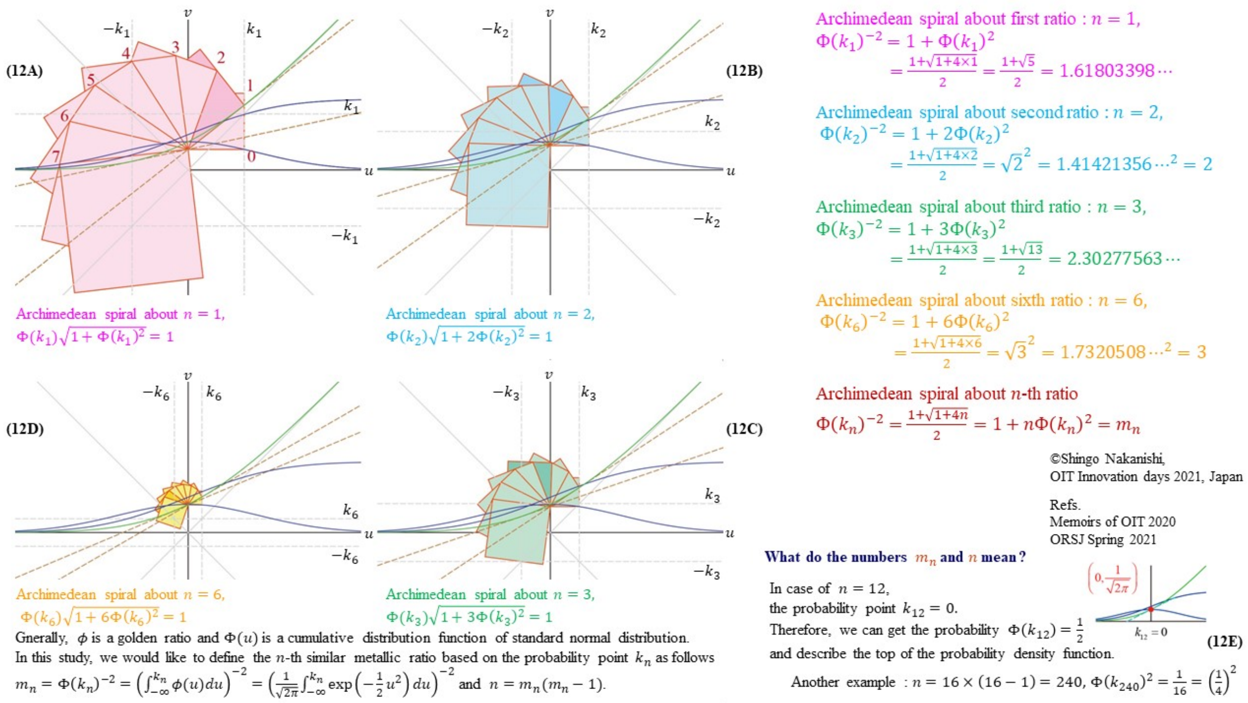


図 12　貴金属比の類似比による代数螺旋の概念図 [2,4]

Fig .12 Archimedean spirals of similar metallic ratios[2,4]

$$\left(\begin{aligned} \because m_n &= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+4n}}{2} \\ &= n \text{ th Similar Metallic Ratio} \\ \Phi(k_n)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{k_n}\phi(u)du\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{k_1}\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)du\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+4n}}{2}\right)^{-1} \\ &= n \text{ th Inverse Similar Metallic Ratio} \\ k_n &= n \text{ th Probablity Point} \\ n &\in \mathbb{N} \end{aligned}\right)$$

が与えられ，重み付きのピタゴラスの定理として

$$\begin{aligned} \Phi(k_n)^{-2} &= \Phi(k_n)^0 + n\cdot\Phi(k_n)^2 \qquad (4.8) \\ \Phi(k_n)^{-4} &= \Phi(k_n)^{-2} + n\cdot\Phi(k_n)^0 \\ \Phi(k_n)^{-6} &= \Phi(k_n)^{-4} + n\cdot\Phi(k_n)^{-2} \\ \Phi(k_n)^{-8} &= \Phi(k_n)^{-6} + n\cdot\Phi(k_n)^{-4} \\ &\vdots \\ \Phi(k_n)^{-2j} &= \Phi(k_n)^{-2j+2} + n\cdot\Phi(k_n)^{-2j+4} \\ &\qquad (j\in\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

が成立する．これは，図6，図7，図8および図3A，図3B，図3Cや図4A，図4B，図4Cに示す考え方に相当する．また，この関係式は

$$\begin{aligned} \Phi(k_n)^{-2} &= F_{n,2} + n\cdot F_{n,1}\Phi(k_n)^2 \\ &= 1 + n\cdot\Phi(k_n)^2 \\[1em] \Phi(k_n)^{-4} &= F_{n,3} + n\cdot F_{n,2}\Phi(k_n)^2 \\ &= (n+1) + n\cdot\Phi(k_n)^2 \\[1em] \Phi(k_n)^{-6} &= F_{n,4} + n\cdot F_{n,3}\Phi(k_n)^2 \\ &= (2n+1) + n(n+1)\cdot\Phi(k_n)^2 \\[1em] \Phi(k_n)^{-8} &= F_{n,5} + n\cdot F_{n,4}\Phi(k_n)^2 \\ &= (n^2+3n+1) \\ &\qquad + n(2n+1)\cdot\Phi(k_n)^4 \\[1em] &\vdots \\[1em] \Phi(k_n)^{-2j} &= F_{n.j+1} + n\cdot F_{n,j}\Phi(k_n)^2 \qquad (4.9) \\ &\qquad (j\in\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

が成立する [2]．式(4.9)の考え方を用いて，$n=1$ の場合の第1類似比に相当する黄金比に関する再帰や等角螺旋は，フィボナッチ数列とピタゴラスの定理を組み合わせて図6に示すように図示できる．同様に，$n=2$ の場合の白銀比に相当する第2類似比に関する再帰や等角螺旋も，ピタゴラスの定理と直角二等辺三角形とヤコブスタール数列によって図7が描ける [5,6]. $n=3$ の場合もまた，ピタゴラスの定理と一般化されたフィボナッチ数列による青銅比に相当する第3類似比の再帰や等角螺旋が図8のように描ける [5,7,8]．このときに，標準正規分布を用いるのは，なぜかを本研究ノートに示していなかったので換言する．標準正規分布の原点から確率点までの距離 k_n を正規化して1と考えるとき，確率点に基づく累積分布関数の積分形が示す曲線の接線が，図6から図8までの確率密度の高さ $\phi(k_n)$ に底辺の長さを1とし，接点までの高さが $\phi(k_n)+k_n\Phi(k_n)$ であるから，正規化した高さは $\Phi(k_n)$ とする直角三角形を維持しながら描く特性がある．このことはあまり知られていない．それゆえ今回もこの特性を活用した考察を行っていることを記しておく．実際に芸術作品に応用するときには様々な大きさの尺度を検討する必要があるので，読者の中で著者が正規分布にこだわり過ぎるとお感じの方は，これも比率の一種と解釈していただきたい．

一方で，$n=12$ の場合は，標準正規分布の確率点が $k_{12}=0$ に相当するので，図6，図7，図8のように描くことができない．しかし，もしも等角螺旋が描けるとするならばどのように描けるかを図9Cに図示している [2,4-8]．したがって，実際には図9Bのように標準正規分布の確率密度関数の頂上に位置する一点のみが描かれる [2]．

特記すべき点として，$n=12$ の場合の直角三角形は特別であるためか，等角螺旋を描くときに正三角形が活用できる．このため，図9はデザインの基準となる白金比の活用方法として価値があると考えている．同様に，ケプラー三角形を用いた $n=1$ の場合と，直角二等辺三角形を用いた $n=2$ の場合も等角螺旋としてだけではなく，フラクタル [102-106] もしくは再帰 [107-109] をイメージし，連なりも加えて作成した等角螺旋のデザインが図10である [5]．補足的に，連なりを調べてみると，図11に示す傾向がわかっている [5]．このことから，n と m_n に対応した様々な連なる組み合わせが想定できるはずである．また，図9の正三角形の一辺の比を示す $\sqrt{3}$ は，先に述べたように日本のデザインの世界では白金比 [110] と呼ばれて親しまれている．しかしながら，白金比は貴金属比に含まれていないし，Googleを用いて英語名に相当するplatinum ratioで検索しても海外での活用動向は不明であ

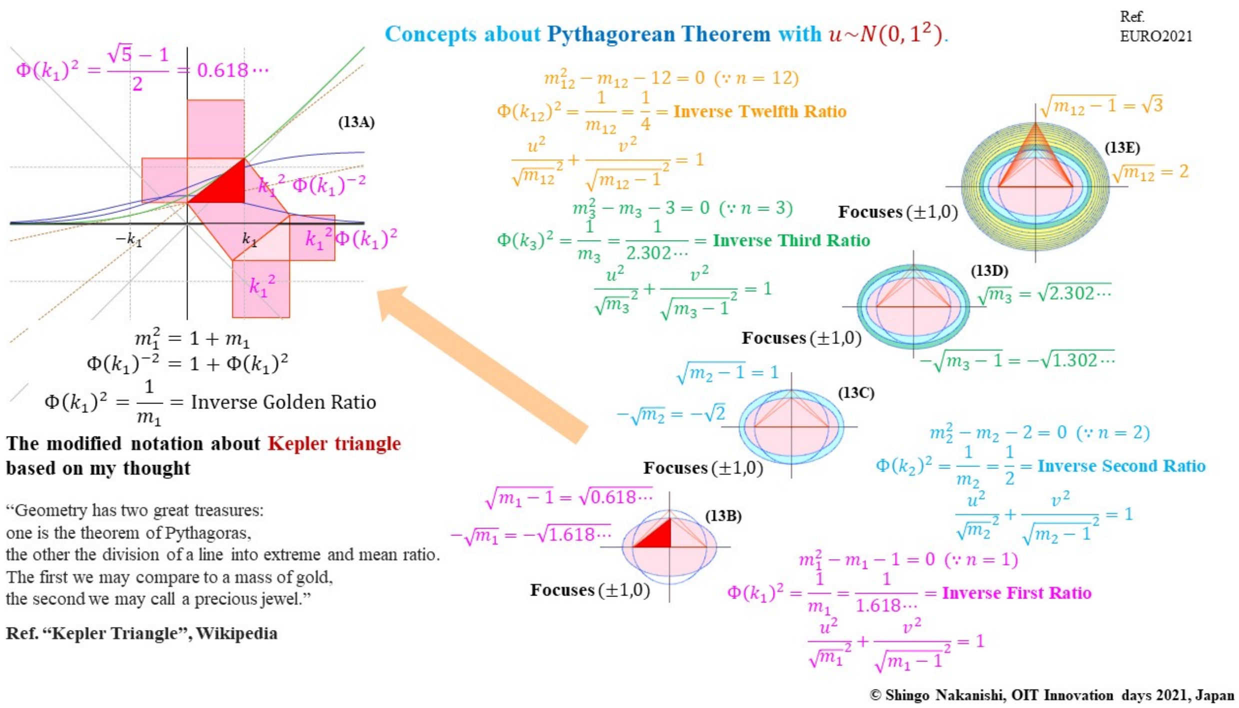


図 13　貴金属比の類似比に関する同じ焦点 $(\pm 1{,}0)$ を描く楕円の関係図 [6-8]

Fig .13 Geometric characterizations about similar metallic ratios related to the ellipses with the same focuses $(\pm 1{,}0)$ [6-8]

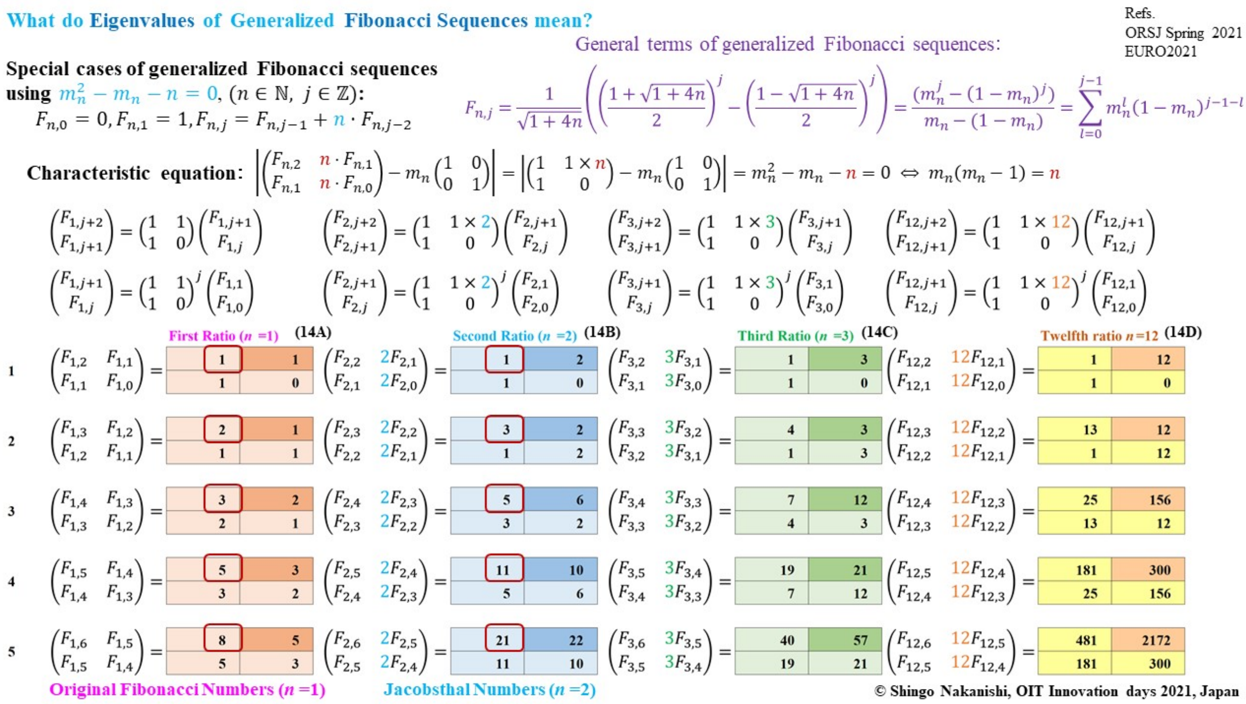


図 14　貴金属比の類似比による一般化されたフィボナッチ数列の一般項と行列表記 [5-8]

Fig .14 General forms and matrices of generalized Fibonacci sequences using similar metallic ratios [5-8]

る．

前作の研究[2)]では，貴金属比の類似比を標準正規分布の累積分布関数と重ねて調べてきたので，類似比の 12 番目に特別な等角螺旋を見つけることができた．それが確率点 $k_{12}=0$ の場合であるため，実際に見えることはないが，等角螺旋の構造を決めるための直角三角形に正三角形が必要である場合として示すことができたことは，連分数や多重根号でも整数値として m_{12} を示すことができたように， $m_{12}=4$ と $m_{12}-1=3$ を用いた $n=12$番目としての重要な意義があると思えてならない．実は，原点 $k_{12}=0$ を中心とする左右対称の確率分布の場合には $n=12$ の関係は成立するのだが，その時の収束点が確率密度の頂上に収まるのは，おそらく正規分布だけではなかろうか．そのことを考慮すると，図 9 の正三角形と標準正規分布の確率点 0 の調和は，台風の目のごとく穏やかな驚きを魅せてくれる．

5. 貴金属比の類似比による代数螺旋の考え方

前作[2)]では，代数螺旋（アルキメデスの螺旋）[44,45)]の考案方法を示したので，その表現式のエッセンスだけを紹介する．前作では，4 章で示した標準正規分布の特徴と代数螺旋の関係を調べてみたところ，黄金比に関しては

$$\Phi(k_1)\sqrt{1+\Phi(k_1)^2}=1 \tag{5.1}$$

なる特徴が見つかった[2)]．したがって，この関係式は式(2.1)と同じ黄金比を示す式に展開できる．そこで，図 12 にも示した次式のように表わして， n 番目の金属比の類似比に関する代数螺旋が，同様に描くことができるか作成を試みながら調べてみたのが前作[2)]であった．すなわち，代数螺旋を定義するために

$$\Phi(k_n)\sqrt{1+n\cdot\Phi(k_n)^2}=1 \tag{5.2}$$

を用いて考察している[2)]．これをもとに，貴金属比の類似比の序数 n 番目の代数螺旋が， j 番目に描く代数螺旋の原点からの長さを

$$A_{n,j}=\sqrt{1+j\cdot\Phi(k_n)^2} \tag{5.3}$$

もしくは

$$A_{n,j}=\sqrt{A_{n,j-1}^2+\Phi(k_n)^2} \tag{5.4}$$

として，ピタゴラスの定理に従いながら n 番目のときに原点から代数螺旋までの長さが

$$A_{n,n}=\sqrt{1+n\cdot\Phi(k_n)^2}=\sqrt{m_n} \tag{5.5}$$

と決まるように代数螺旋は設計できている[2)]．このため，図 12A から図 12D では，このことがわかりやすいようにそれぞれの貴金属比の類似比の序数 n に対応する箇所の色を濃く表示して視覚化している．

特記すべきことは，$n=12$ のときには，図 12E に示すように確率点が $k_{12}=0$ のため，等角螺旋の場合と同様にその代数螺旋を描くことはできない[2)]．

6. ピタゴラスの定理と一般化されたフィボナッチ数列を活用した貴金属比の類似比による等角螺旋（対数螺旋）と楕円の関係

5 章で述べた代数螺旋は，前作でも示したように，ピタゴラスの定理による定義式を活用するが，幾何学的特性には後ほど 10 章で記述する螺旋軌道[2,4)]の特徴を除いて有用なことを言及することができなかった．そこで，螺旋の種類を代数螺旋ではなく等角螺旋（ベルヌーイの対数螺旋に同意）[47-49)]に着目して一般化されたフィボナッチ数列の活用を行った．そうすると，図 4A1，図 4B1，図 4C1 や図 6A，図 7A，図 8A に示すように離散的な等角螺旋の視覚化が可能となった[2,5,6)]．

また，貴金属比の類似比の各定義式は，式(4.8)および式(4.9)であることが，同様に図 4A1，図 4B1，図 4C1 や図 6A，図 7A，図 8A からも容易に理解できる．そして，その比率の数値の大きさが，半円の直径として図 4A2，図 4B2，図 4C2 のとおりに示すことができ，n 番目の貴金属比の類似比の幾何学的性質が容易に把握できる[6,7,8)]．このときの図 4，図 6 から図 9 までの等角螺旋と図 3 と図 4 の半円の幾何学的特性を表示するために大切なことは，表現できる図形情報の特徴を見極めて，これらの再帰[107-109)]が効果的に活用されることである．

換言すれば，再掲する再帰による表現式

$$\Phi(k_n)^{-2j} = \Phi(k_n)^{-2j+2} + n\Phi(k_n)^{-2j+4} \tag{6.1}$$
$$\Phi(k_n)^{-2j} = F_{n.j+1} + n \cdot F_{n,j}\Phi(k_n)^2$$
$$m_n^j = m_n^{j-1} + n \cdot m_n^{j-2},$$
$$n \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}$$

がいかに活用できるかである[2,5,6)].

ところで, 図13Bから図13Eまでに描く図のように長半径を $\sqrt{m_n}$ とし，短半径を $\sqrt{m_n - 1}$ とする楕円は, 同じ焦点 $(\pm 1{,}0)$ を有する楕円の定義式

$$\frac{u^2}{\sqrt{m_n}^2} + \frac{v^2}{\sqrt{m_n - 1}^2} = 1 \tag{6.2}$$

か[95-97)]，もしくは

$$(u, v)\begin{pmatrix} m_n & 0 \\ 0 & m_n - 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1 \tag{6.3}$$

で表わせる[111)]．図13をよく見ると，図13Bで示すように $n = 1$ ではケプラー三角形を基準に楕円を構成し，図13Cで示すように $n = 2$ では直角二等辺三角形を構成し, 図13Eで示すように $n = 12$ では, 正三角形を構成する特徴がわかる．したがって，n 番目の貴金属比の類似比 m_n を基準とする直角三角形と, 一般化されたフィボナッチ数列もしくはピタゴラスの定理が等角螺旋を描くときに重要な役割を果たす直角三角形と同じであることがわかった[6-8)].

以上から，式(4.8)または式(6.1)をもとに，まず

$$\Phi(k_n)^{-2j} = \Phi(k_n)^{-2j+2} + n \cdot \Phi(k_n)^{-2j+4} \quad (j \in \mathbb{Z}) \tag{6.4}$$

を基本にした離散型の等角螺旋を描くことができた．同時に，式(4.9)を拡張して

$$\Phi(k_n)^{-2j} = F_{n.j-l}\Phi(k_n)^{-2-2l} + n \cdot F_{n,j-l-1}\Phi(k_n)^{2l} \quad (j \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}) \tag{6.5}$$

と表記できることを示せる．すなわち，等角螺旋が一般化されたフィボナッチ数列の特徴に従いながら成長していく様子を描く定義式が示せた.

では，等角螺旋が縮小していくときには，どのように描けるのだろうか．次章では，等角螺旋の縮小に活用を想定できる負の一般化されたフィボナッチ数列について詳細を述べ，本章で楕円がイメージできたように固有値の対角行列を活用して，一般化されたフィボナッチ数列の一般項を説明する.

7. 負の項を含む一般化されたフィボナッチ数列の特徴および一般項の算出方法

一般化されたフィボナッチ数列の一般項を求める前に, 貴金属比の類似比の基本式と一般化されたフィボナッチ数列の基本式を

$$m_n^2 - m_n - n = 0 \tag{7.1}$$
$$F_{n,0} = 0,\ F_{n,1} = 1, F_{n,j} = F_{n,j-1} + n \cdot F_{n,j-2}$$
$$(n \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{Z})$$

として再掲する．ここで，図14に示すように

$$\left|\begin{pmatrix} F_{n,2} & n \cdot F_{n,1} \\ F_{n,1} & n \cdot F_{n,0} \end{pmatrix} - m_n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| \tag{7.2}$$
$$= \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \times n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - m_n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right|$$
$$= -m_n(1 - m_n) - n$$
$$= m_n^2 - m_n - n$$

が得られる[5,75)]ので，特性方程式（固有方程式）

$$m_n^2 - m_n - n = 0 \tag{7.3}$$

を解く．このとき，貴金属比の類似比は，$m_n > 0$ のみの解に注目するので

$$m_n = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4n}}{2}$$
$$= \left(\frac{F_{n,2} + n \cdot F_{n,0}}{2} + \frac{F_{n,1}\sqrt{1+4n}}{2}\right) \tag{7.4}$$

が基本の解となる．そして，もう一つの解を

$$1 - m_n = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1+4n}}{2}$$
$$= \left(\frac{F_{n,2} + n \cdot F_{n,0}}{2} - \frac{F_{n,1}\sqrt{1+4n}}{2}\right) \tag{7.5}$$

と表記して，本研究では取り扱うことにする．特記すべ

き点として，式(7.4)の m_n と式(7.5)の $1-m_n$ に関連する幾何学的特徴は，幾何平均の意味をなす直角三角形を示すことを2章で言及している．このことがわかるように視覚化した図15を例示している.図示してはいないが，仮に n が大きくなっていくに従い，m_n と m_n-1 の比率が近づいていくことを視覚化した直角三角形を描くならば，その三角形は直角二等辺三角形に近づいていく特徴を有する．そして，この図15の特徴が，固有値による貴金属比の類似比に関する幾何学的構造の一つである．

蛇足だが，この考え方を適用すると，オリジナルの貴金属比は,高さ1の直角三角形の底辺が,$\lambda_{(n,1)}:\lambda_{(n,1)}-n$ に分割される垂線を引くときの幾何平均による考え方で描けることも明らかである.

ところで，式(7.5)を用いて

$$
\begin{aligned}
(1-m_n)^2 &= (1-m_n)(1-m_n)\\
&= \left(\frac{F_{n,2}+n\cdot F_{n,0}}{2}-\frac{F_{n,1}\sqrt{1+4n}}{2}\right)\\
&\quad\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1+4n}}{2}\right)\\
&= \frac{F_{n,2}+n\cdot F_{n,0}+F_{n,1}+4nF_{n,1}}{4}\\
&\quad-\frac{(F_{n,2}+n\cdot F_{n,0}+F_{n,1})\sqrt{1+4n}}{4}\\
&= \frac{2F_{n,2}+4nF_{n,1}}{4}-\frac{2F_{n,2}\sqrt{1+4n}}{4}\\
&= \frac{F_{n,3}+nF_{n,1}}{2}-\frac{F_{n,2}\sqrt{1+4n}}{2}
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

と表わせることから，同様に

$$
\begin{aligned}
(1-m_n)^{j+1} &= (1-m_n)^j(1-m_n)\\
&= \left(\frac{F_{n,j+1}+n\cdot F_{n,j-1}}{2}-\frac{F_{n,j}\sqrt{1+4n}}{2}\right)\\
&\quad\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1+4n}}{2}\right)\\
&= \frac{F_{n,j+1}+n\cdot F_{n,j-1}+F_{n,j}+4nF_{n,j}}{4}\\
&\quad-\frac{(F_{n,j+1}+n\cdot F_{n,j-1}+F_{n,j})\sqrt{1+4n}}{4}\\
&= \frac{2F_{n,j+1}+4nF_{n,j}}{4}-\frac{2F_{n,j+1}\sqrt{1+4n}}{4}\\
&= \frac{F_{n,j+2}+nF_{n,j}}{2}-\frac{F_{n,j+1}\sqrt{1+4n}}{2}
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

を導くことができる．この関係式は

$$
\begin{aligned}
m_n^{j+1} &= m_n^j m_n\\
&= \left(\frac{F_{n,j+1}+n\cdot F_{n,j-1}}{2}+\frac{F_{n,j}\sqrt{1+4n}}{2}\right)\\
&\quad\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+4n}}{2}\right)\\
&= \frac{F_{n,j+1}+n\cdot F_{n,j-1}+F_{n,j}+4nF_{n,j}}{4}\\
&\quad+\frac{(F_{n,j+1}+n\cdot F_{n,j-1}+F_{n,j})\sqrt{1+4n}}{4}\\
&= \frac{2F_{n,j+1}+4nF_{n,j}}{4}+\frac{2F_{n,j+1}\sqrt{1+4n}}{4}\\
&= \frac{F_{n,j+2}+nF_{n,j}}{2}+\frac{F_{n,j+1}\sqrt{1+4n}}{2}
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

でも成立する．また，

$$
\left|\begin{pmatrix} F_{n,j+1} & n\cdot F_{n,j}\\ F_{n,j} & n\cdot F_{n,j-1}\end{pmatrix}-m_n^j\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right| \tag{7.9}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (F_{n,j+1}-m_n^j)(n\cdot F_{n,j-1}-m_n^j)-n\cdot F_{n,j}^2\\
&= m_n^{2j}-(F_{n,j+1}+n\cdot F_{n,j-1})m_n^j-n\cdot F_{n,j}^2\\
&= 0
\end{aligned}
$$

であるから，その固有値を用いて，式(7.6)と式(7.7)を参考に

$$
m_n^j = \left(\frac{F_{n,j+1}+n\cdot F_{n,j-1}}{2}+\frac{F_{n,j}\sqrt{1+4n}}{2}\right) \tag{7.10}
$$

$$
(1-m_n)^j = \left(\frac{F_{n,j+1}+n\cdot F_{n,j-1}}{2}-\frac{F_{n,j}\sqrt{1+4n}}{2}\right) \tag{7.11}
$$

と記述できるはずである．一般には，黄金比の定義式に関する多くの文献でも，ビネ（Binet）の公式[112,113]を推奨し，フィボナッチ行列の対角化の性質を用いた解法が解説されている．したがって，その一つとして Kalman と Mena の論文[75]にも掲載されているように，本章でこれから述べる一般化されたフィボナッチ数列の一般項でも問題なく示せることを確認する．

ところで，式(7.4)と式(7.5)，もしくは式(7.10)と式(7.11)を用いるときに，図14に示されるビネの公式

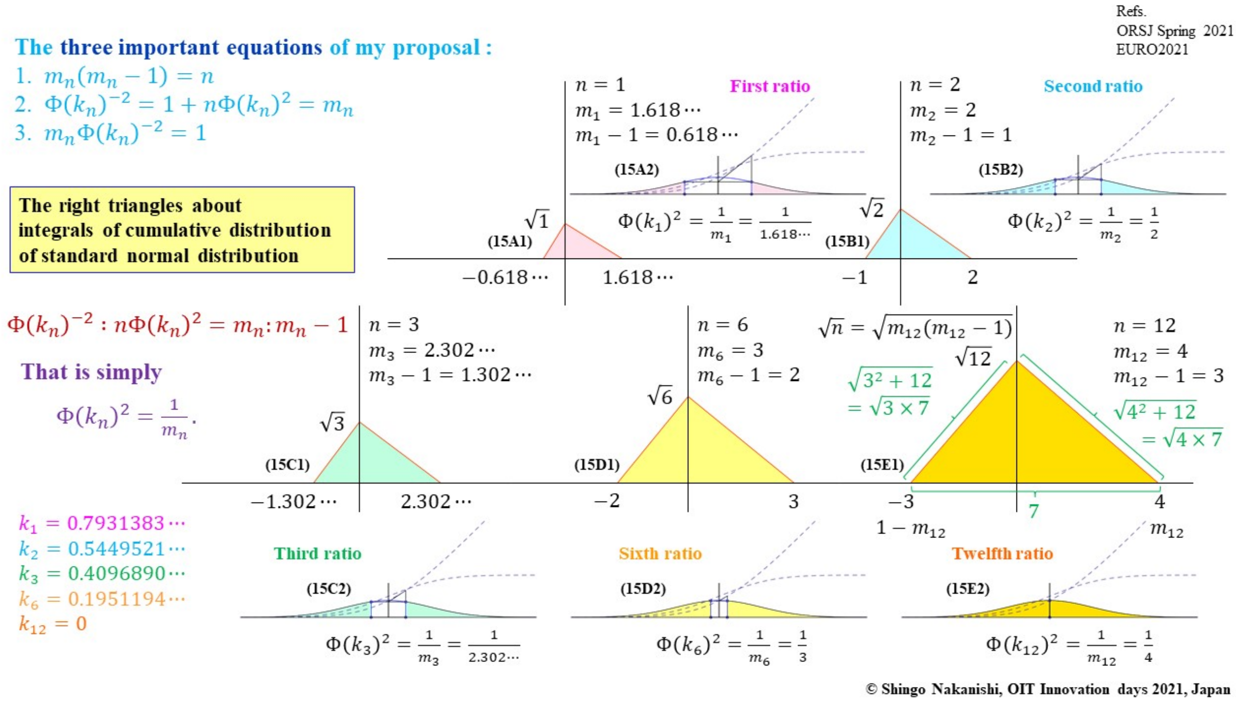


図 15　貴金属比の類似比の固有値による幾何平均を基準とした直角三角形 4-6)

Fig .15 Geometric relations about similar metallic ratios
using these right triangles based on geometric means related to these eigen values4-6)

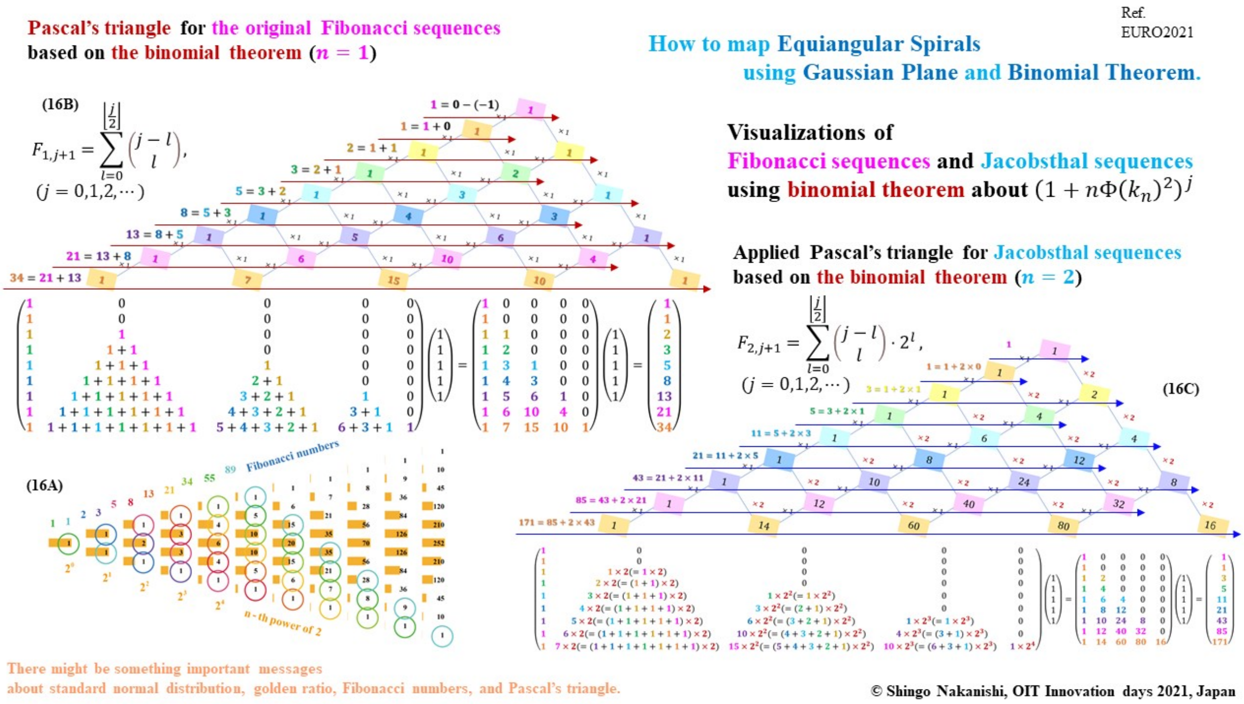


図 16　パスカルの三角形を応用したフィボナッチ数列とヤコブスタール数列の視覚化 6-8)

Fig .16 Visualizations of Fibonacci sequences and Jacobsthal sequences using Pascal's triangles6-8)

$$F_{n,j}=\frac{m_n^j-(1-m_n)^j}{\sqrt{1+4n}}=\frac{m_n^j-(1-m_n)^j}{m_n-(1-m_n)} \quad (7.12)$$

が容易に説明できる[5]．この性質を活かして，$j=1,2,\cdots$ のもとで正の一般化されたフィボナッチ数列

$$F_{n,j}=\frac{m_n^j-(1-m_n)^j}{m_n-(1-m_n)}=\sum_{l=0}^{j-1} m_n^l(1-m_n)^{j-1-l} \quad (7.13)$$

と，負の一般化されたフィボナッチ数列

$$\begin{aligned}F_{n,-j}&=\frac{m_n^{-j}-(1-m_n)^{-j}}{\sqrt{1+4n}}\\&=\frac{-m_n^j+(1-m_n)^j}{m_n^j(1-m_n)^j\sqrt{1+4n}}\\&=-\left(-\frac{1}{n}\right)^j\frac{m_n^j-(1-m_n)^j}{m_n-(1-m_n)}\\&=-\left(-\frac{1}{n}\right)^j F_{n,j}, \qquad j=1,2,\cdots \quad (7.14)\end{aligned}$$

をそれぞれ定義できる[5-8]．また，負の一般化されたフィボナッチ数列は

$$F_{n,-j}=\frac{F_{n,-j+2}-F_{n,-j+1}}{n}, \ (j=0,1,\ 2,\ \cdots) \quad (7.15)$$

でも求まるため，式(7.15)を再帰しながら式(7.14)の $(1/n)$ のべき乗の効果が連想できる[7,8]．

ここで，式(3.8)の

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}F_{n,0} & n\cdot F_{n,-1}\\ F_{n.-1} & n\cdot F_{n,-2}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}1 & n\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n}\end{pmatrix} \quad (7.16)\end{aligned}$$

を再掲し，式(7.16)を用いるならば負の一般化されたフィボナッチ数列による行列

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}F_{n,-j+1} & n\cdot F_{n,-j}\\ F_{n.-j} & n\cdot F_{n,-j-1}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}1 & n\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-j}\\&=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n}\end{pmatrix}^j \quad (7.17)\end{aligned}$$

を活用できる．したがって，負の一般化されたフィボナッチ数列は

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}F_{n,-j+1}\\ F_{n,-j}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}1 & n\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-j}\begin{pmatrix}F_{n,1}\\ F_{n,0}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n}\end{pmatrix}^j\begin{pmatrix}F_{n,1}\\ F_{n,0}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n}\end{pmatrix}^j\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \quad (7.18)\end{aligned}$$

より求めることができる[7,8]．式(7.18)を用いて負の一般化されたフィボナッチ数列を生成して，ピタゴラスの定理を組み合わせるならば，縮小していく貴金属比の類似比による等角螺旋も描くことが可能である．

以上について，下記の固有値を用いた解法を用いることができる．まず，一般化されたフィボナッチ行列の記号を改めて

$$\mathbf{F}_n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad (7.19)$$

と記すとき，その特性方程式（固有方程式）は式(7.3)より, 二つの解 m_n と $1-m_n$ が得られる. まず，m_n を用いた連立方程式

$$\begin{pmatrix}1-m_n & n\\ 1 & -m_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \quad (7.20)$$

とおいて，y を消去して

$$(m_n^2-m_n-n)x=0 \quad (7.21)$$

が求まるが，カッコ内が 0 なので，任意の 0 でない t を用いて，$x=t$ とおくとき，$y=t/m_n$ が見積もられる．そこで，その固有ベクトルを

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\ \frac{t}{m_n}\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{m_n}\end{pmatrix} \quad (7.22)$$

が得られる．同様に，$1-m_n$ を用いた連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1-(1-m_n) & n \\ 1 & -(1-m_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.23}$$

からも，その固有ベクトル

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \dfrac{t}{1-m_n} \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{1-m_n} \end{pmatrix} \tag{7.24}$$

が得られる．そこで，$t=1$ とおいた二つの固有ベクトルを用いて

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{1}{m_n} & \dfrac{1}{1-m_n} \end{pmatrix} \tag{7.25}$$

と行列表記したとき，$\mathbf{P}$ の逆行列は

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1} &= \frac{1}{\dfrac{1}{1-m_n}-\dfrac{1}{m_n}}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-m_n} & -1 \\ -\dfrac{1}{m_n} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-n}{m_n-(1-m_n)}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-m_n} & -1 \\ -\dfrac{1}{m_n} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7.26}$$

が求まる．したがって，固有値の対角行列は

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{F}_n\mathbf{P} = \begin{pmatrix} m_n & 0 \\ 0 & 1-m_n \end{pmatrix} \tag{7.27}$$

であるので

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}_n^j &= \begin{pmatrix} m_n & 0 \\ 0 & 1-m_n \end{pmatrix}^j \\ &= \begin{pmatrix} m_n^j & 0 \\ 0 & (1-m_n)^j \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{F}_n\mathbf{P})^j \\ &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{F}_n^j\mathbf{P} \end{aligned} \tag{7.28}$$

より

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_n^j &= \begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^j \\ &= \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}_n^j\mathbf{P}^{-1} \\ &= \frac{-n}{m_n-(1-m_n)}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{1}{m_n} & \dfrac{1}{1-m_n} \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} m_n^j & 0 \\ 0 & (1-m_n)^j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-m_n} & -1 \\ -\dfrac{1}{m_n} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-n}{m_n-(1-m_n)} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} m_n^j & (1-m_n)^j \\ m_n^{j-1} & (1-m_n)^{j-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-m_n} & -1 \\ -\dfrac{1}{m_n} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-n}{m_n-(1-m_n)} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{m_n^j}{1-m_n}-\dfrac{(1-m_n)^j}{m_n} & -m_n^j+(1-m_n)^j \\ \dfrac{m_n^{j-1}}{1-m_n}-\dfrac{(1-m_n)^{j-1}}{m_n} & -m_n^{-j-1}+(1-m_n)^{j-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{-n}{m_n-(1-m_n)} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{m_n^{j+1}-(1-m_n)^{j+1}}{-n} & -m_n^j+(1-m_n)^j \\ \dfrac{m_n^j-(1-m_n)^j}{-n} & -m_n^{-j-1}+(1-m_n)^{j-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{m_n^{j+1}-(1-m_n)^{j+1}}{m_n-(1-m_n)} & n\cdot\dfrac{m_n^j-(1-m_n)^j}{m_n-(1-m_n)} \\ \dfrac{m_n^j-(1-m_n)^j}{m_n-(1-m_n)} & n\cdot\dfrac{m_n^{j-1}-(1-m_n)^{j-1}}{m_n-(1-m_n)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n,j+1} & n\cdot F_{n,j} \\ F_{n,j} & n\cdot F_{n,j-1} \end{pmatrix}, \qquad j\in\mathbb{Z} \end{aligned} \tag{7.29}$$

が成立する．このとき，式(7.29)で導かれた解を示す行列の各要素はビネの公式が成立している[24,114)]. したがって，一般化されたフィボナッチ数列の行列形式

$$\begin{pmatrix} F_{n.j+1} \\ F_{n.j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n,j+1} & n\cdot F_{n,j} \\ F_{n,j} & n\cdot F_{n,j-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.30}$$

および

表4　本研究で取り扱う一般化されたフィボナッチ数（$n=1$はフィボナッチ数，$n=2$はヤコブスタール数）[2)]
Table 4 Numerical illustrations of generalized Fibonacci numbers (Case $n=1$: Fibonacci numbers, $n=2$: Jacobsthal numbers)[2)]

n \ j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
2	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341
3	0	1	1	4	7	19	40	97	217	508	1159
4	0	1	1	5	9	29	65	181	441	1165	2929
5	0	1	1	6	11	41	96	301	781	2286	6191
6	0	1	1	7	13	55	133	463	1261	4039	11605
7	0	1	1	8	15	71	176	673	1905	6616	19951
8	0	1	1	9	17	89	225	937	2737	10233	32129
9	0	1	1	10	19	109	280	1261	3781	15130	49159
10	0	1	1	11	21	131	341	1651	5061	21571	72181
11	0	1	1	12	23	155	408	2113	6601	29844	102455
12	0	1	1	13	25	181	481	2653	8425	40261	141361

$$\begin{pmatrix}F_{n.j+2}\\ F_{n.j+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_{n,j+1} & n\cdot F_{n,j}\\ F_{n,j} & n\cdot F_{n,j-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \qquad (7.31)$$

が活用できる[5)].

以上をもとに，具体的に算出される一般化されたフィボナッチ数を表4に示しておく[2)]. 特記すべき点として，表 4 の $n=1$ の場合はフィボナッチ数[112,113)]を算出し，$n=2$ の場合はヤコブスタール数[115)]を算出していることを強調しておきたい.

補足として，以上までの展開で本研究に用いた一般化されたフィボナッチ数列の展開を確認してきたが，式(3.1)に従う Kalman と Mena による一般化されたフィボナッチ数列[75)]でも同様に成り立つことが確認されており，本研究で明らかにしたことを加えれば，

$$F_{(a,b),j}=\frac{1}{\sqrt{a^2+4b}}\left(\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^j+\left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^j\right)$$

$$=\frac{\left(\lambda_{(a,b)}{}^j-\left(a-\lambda_{(a,b)}\right)^j\right)}{\lambda_{(a,b)}-\left(a-\lambda_{(a,b)}\right)}$$

$$=\sum_{l=0}^{j-1}\lambda_{(a,b)}{}^l\left(a-\lambda_{(a,b)}\right)^{j-1-l}$$

$$=\lambda_{(a,b)}F_{(a,b),j-1}+\left(a-\lambda_{(a,b)}\right)^{j-1} \qquad (7.32)$$

も導出できることがわかっている. 読者は, 適切な a と b の数値を設定して，Microsoft Excel®のセルに入力しながら $F_{(a,b),j}$ の値を容易に計算できる.

8.　二項定理を用いた一般化されたフィボナッチ数列の一般項の表記法と多項式表記

7 章では一般化されたフィボナッチ数列の一般項を示した. 本章では二項定理を用いるときに，一般項はどのように表記できるかをパスカルの三角形を応用しながら考えてみたい.

まず，オリジナルのフィボナッチ数列について，リュカ（Lucas）[77,78)]による定義式，もしくは日本では細矢の三角形[69)]で有名な細矢の文献 52)でも記される

$$F_{1,j+1}=\sum_{l=0}^{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor}\binom{j-l}{l}, \qquad (j=1,2,\cdots) \qquad (8.1)$$

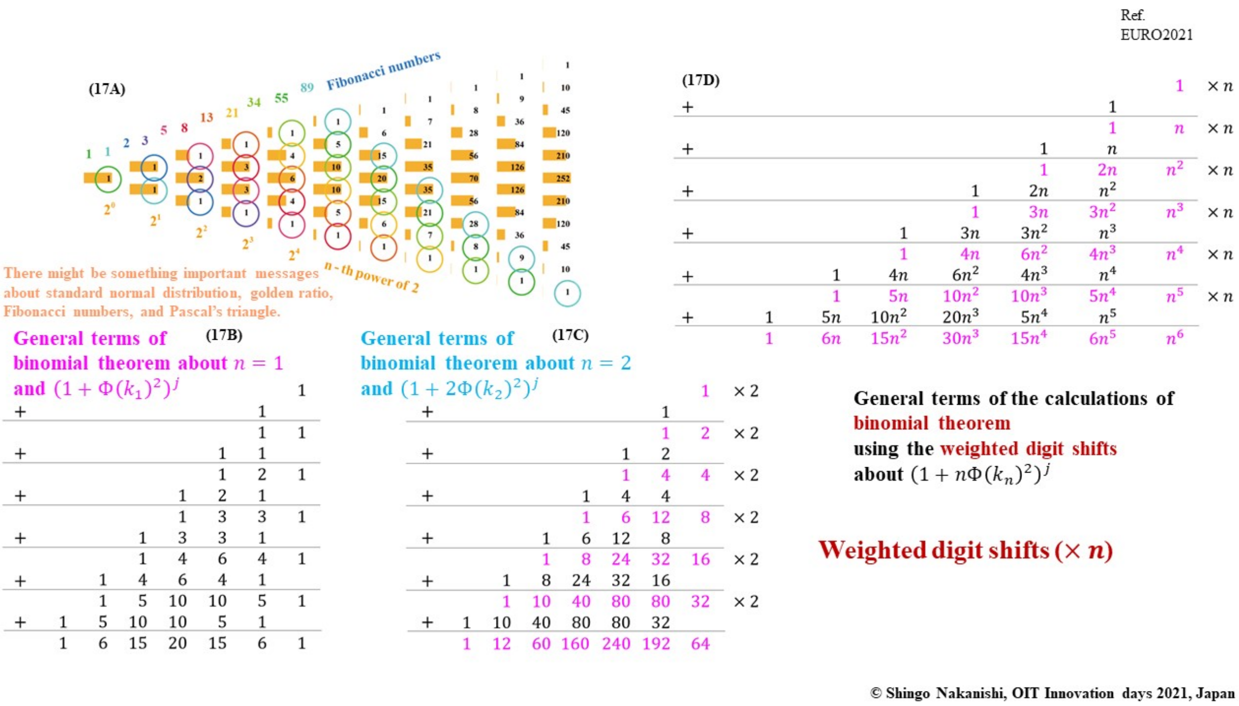


図 17　パスカルの三角形を応用したフィボナッチ数列とヤコブスタール数列の重み付け桁ずらし算[6-8]

Fig .17 Weighted digit shifts of Fibonacci sequences and Jacobsthal sequences using Pascal's triangles[6-8]

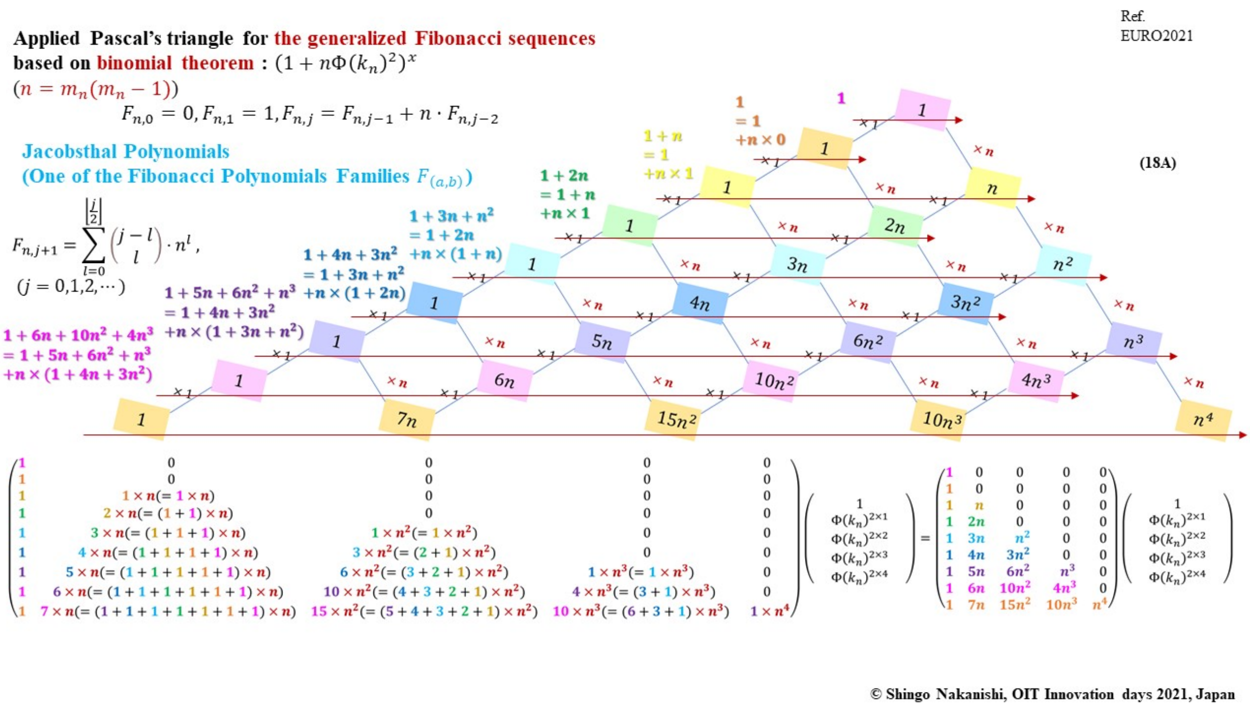


図 18　パスカルの三角形を応用した一般化されたフィボナッチ数列の視覚化[6-8]

Fig .18 Visualizations of generalized Fibonacci sequences using Pascal's triangles[6-8]

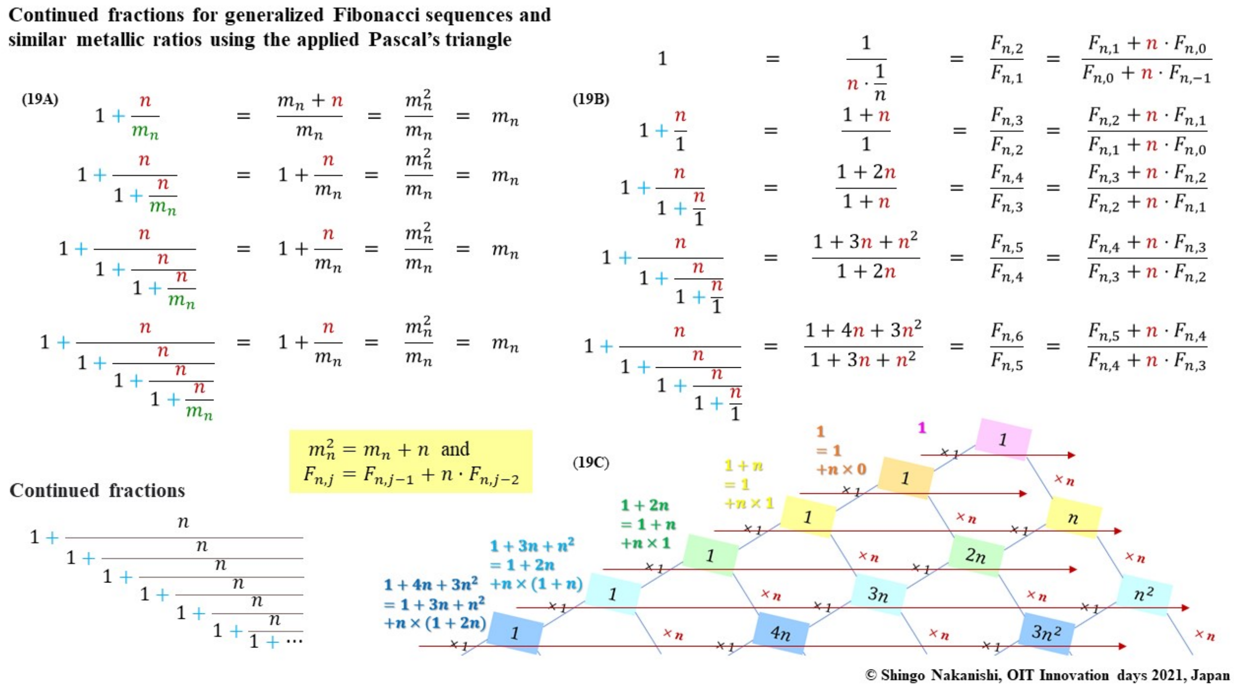


図 19　パスカルの三角形を応用した二項定理と連分数の関連図 [7,8]

Fig .19 Relations about continued fractions of similar metallic ratios and applied Pascal's triangles[7,8]

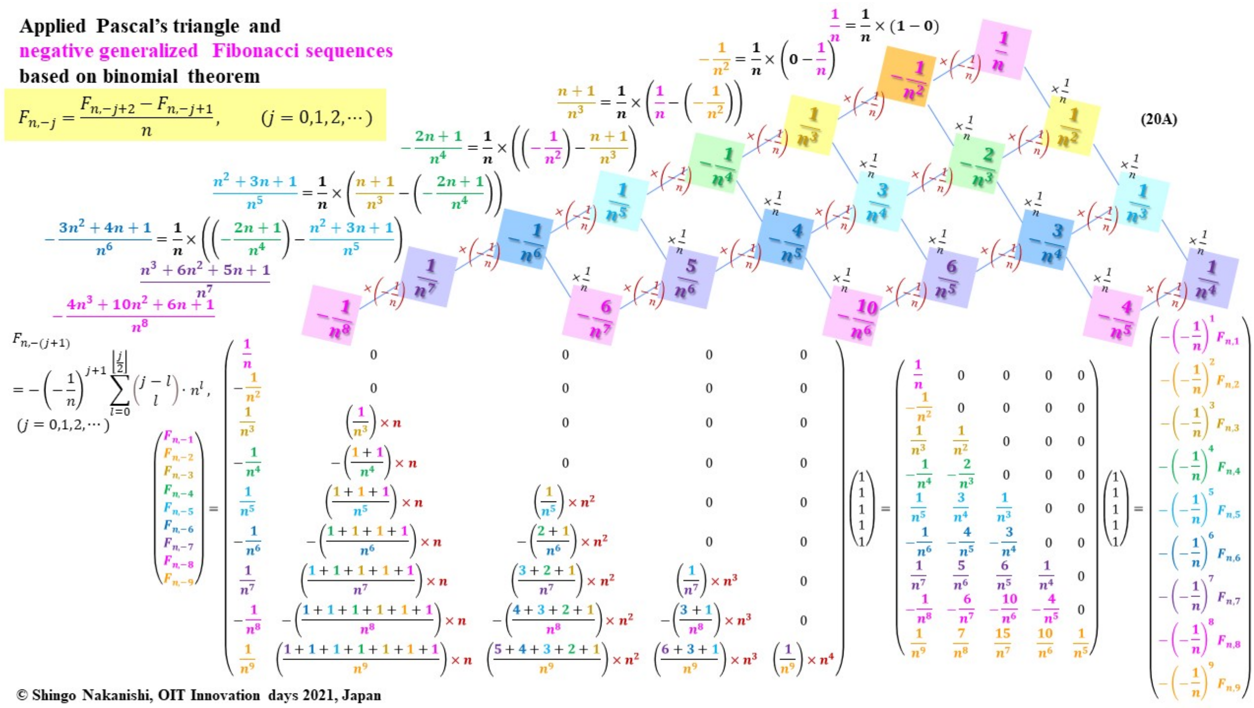


図 20　パスカルの三角形を応用した負の一般化されたフィボナッチ数列の視覚化 [7,8]

Fig .20 Visualizations of negative generalized Fibonacci sequences using Pascal's triangles[7,8]

表 5　2 変量フィボナッチ多項式の例 [70)]
Table 5 Illustrations of bivariate
Fibonacci polynomials[70)]

j	Polynomials of $F_{(a,b)}$
1	1
2	ab
3	a^2+b
4	a^3+2ab
5	$a^4+3a^2b+b^2$
6	$a^5+4a^3b+3ab^2$
7	$a^6+5a^4b+6a^2b^2+b^3$

表 6　ヤコブスタール多項式の例 [70)]
Table 6 Illustrations of Jacobsthal polynomials[70)]

j	Polynomials of $F_{(1,n)}$
1	1
2	n
3	$1+n$
4	$1+2n$
5	$1+3n+n^2$
6	$1+4n+3n^2$
7	$1+5n+6n^2+n^3$

を紹介する．ここで，式(8.1)で用いた

$$\binom{j-l}{l}=\frac{(j-l)!}{l!\,(j-2l)!} \tag{8.2}$$

は組み合わせを意味する．また，$\lfloor j/2 \rfloor$はガウス記号と同意の床関数 [116)]を用いて得られる整数値で小数部は削除される．

式(8.1)は図16Aと図16Bに示すようにパスカルの三角形の特徴を見事に応用している．したがって，式(8.1)は広く活用されている．パスカルの三角形を利用する考え方は, 図 17B に示すように桁をずらす計算方法で取り扱える [114,117)]．これをもとに図 17C や図 17D のように n 倍の重み付けを行う拡張として考えてみるとパスカルの三角形の応用を一般化されたフィボナッチ数列にも適用して考えることができる．この考え方を用いるならば，一般化されたフィボナッチ数列は，図 18A に示すように $(1+n)^x$ の二項定理を展開したパスカルの三角形の応用を用いてリュカの定義式を拡張する形式として

$$F_{n,j+1}=\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}\binom{j-l}{l}\cdot n^l, \qquad (j=0,1,2,\cdots) \tag{8.3}$$

を容易に表わすことができる [77)]．この式は図 16C のヤコブスタール数列や, 図 18A に示す一般化されたフィボナッチ数列の計算にも役立つことが知られている [70,77)]．一方で，パスカルの三角形を応用した結果, これらの考え方と別に図 19A に示す連分数の展開やその分母を1とおいて分母と分子を調べていくときに, 図 19B のような展開が可能であることがわかる [7,8)]．さらに，図 20 に示すように式(7.14)も考慮すると，負の一般化されたフィボナッチ数列は

$$\begin{aligned} F_{n,-(j+1)} &= -\left(-\frac{1}{n}\right)^{j+1} F_{n,j+1} \\ &= -\left(-\frac{1}{n}\right)^{j+1}\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}\binom{j-l}{l}\cdot n^l, \\ &\qquad (j=1,2,\cdots) \end{aligned} \tag{8.4}$$

と表記できる [7,8)]．

ここで，式(8.1)と式(8.3)についてフィボナッチ多項式を用いて考察する．次の式の二項定理

$$(a+b)^j=\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}a^l b^{j-l} \tag{8.5}$$

を図 18A のように例示できる．すなわち，パスカルの三角形を応用した展開図を想定するとき，そのフィボナッチ多項式 $F_{(a,b)}$ は表 5 のように示すことができる [70,77)]．

このとき，表 5 のフィボナッチ多項式について，$a=n$，$b=1$ とおくとき，貴金属比に従うペル数列の拡張として発展してきた一般化されたフィボナッチ数列と一致することがわかる [7,8)]．逆に $a=1$，$b=n$ とおくとき，表 6 のように貴金属比の類似比に従う一般化されたフィボナッチ数列と一致したヤコブスタール多項式が得られることがわかる．すなわち, 式(8.3)はヤコブスタール多項式を示している [7,8)]．

このため, 表 5 で示す a と b の 2 変量によるフィボ

ナッチ多項式は，式(8.1)と式(8.3)と同様に

$$F_{(a,b),j+1}=\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}\binom{j-l}{l}\cdot a^{j-2l}b^{l},\ (j=0,1,2,\cdots)\quad (8.6)$$

と表わすことができる[70,77])．

以上のように，一般化されたフィボナッチ数列を表記するヤコブスタール多項式は，図 19A に示すように連分数を作成する手順からも表わすことができ，図 19B に示すように分母にあえて 1 を代入して計算を操作すると，ヤコブスタール多項式を示す表 6 の結果が順番に得られるので活用できる．したがって，パスカルの三角形を応用した活用方法は，一般化されたフィボナッチ多項式の視覚化にもかなり効果的である．

同様の結果より，式(8.3)で示した負のフィボナッチ数列に関してもパスカルの三角形を応用した図 20 の視覚化が，その活用でも同様の効果を発揮する．今のところ，図 20 を示す文献が見つからないので，読者には負の一般化されたフィボナッチ数列の視覚化の一例として役立てていただきたい．

次章では，パスカルの三角形による視覚化を同様に応用しながらガウス平面上で貴金属比の類似比に関連する等角螺旋を描く方法を提案および解説し，その考察を行う．

9. ガウス平面上で二項定理を用いた貴金属比の類似比に関する等角螺旋の表記法

8 章では一般化されたフィボナッチ数列の一般項に二項定理とパスカルの三角形を用いた考察を行った．本章でも二項定理を用いるときに，等角螺旋はどのように描くことができるかを考えてみたい．対数螺旋（等角螺旋）を描く主な先行研究では，デカルトやベルヌーイの対数螺旋[47,48])が起源で，Fonda[118])による円を基準に拡大と縮小を考えること， Anatriello と Vincenzi[119])，Parodi[120])，Yuenger[121])による 90 度の角度を基準にと，Yuenger[121])，吉田[122])の一回転を分割するかあるいは多角形を基準に考察することがおおよその基本のようである．このため，Kepler 三角形および本研究で紹介した直角三角形は，本来は慣例として原点に直角部分を重ね合わせて，90 度ごとに描くことが基本であるらしい．

これらと対比して，本章では円の回転に指数型の関数を用いて拡大および縮小する考え方に変わりはないが，前章までで貴金属比の類似比をピタゴラスの定理や一般化されたフィボナッチ数列や二項定理を用いて提案した活用方法を活かしたい．そこで，ガウス平面上で次のことを考えてみたい．

まず，対象とする複素数 z_n を考えるために，虚数を i と表記して

$$|z_n|^2=z_n\cdot\bar{z}_n=\sqrt{m_n}^{\,2}=m_n=1+n\Phi(k_n)^2\quad (9.1)$$

を設定する[5-8])．すなわち，ここで等角螺旋を描くための複素数は

$$z_n=1+i\sqrt{n}\Phi(k_n)\quad (9.2)$$

と表記して用いることにする．また，その逆数は

$$z_n^{-1}=\frac{\bar{z}_n}{|z_n|^2}=\frac{1-i\sqrt{n}\Phi(k_n)}{1+n\Phi(k_n)^2}\quad (9.3)$$

であるので，複素数を用いた等角螺旋を

$$z_n^x=\left(1+i\sqrt{n}\Phi(k_n)\right)^x\quad (9.4)$$
$$\bar{z}_n^x=\left(1-i\sqrt{n}\Phi(k_n)\right)^x$$

と考えることにしたい[6-8])．すなわち，式(9.4)の上下の式は共役なので実軸に対して対称である．このイメージとして図 21 には，二項定理を展開して等角螺旋を組み立てていく方式を図示してみた．したがって，この等角螺旋を示す式(9.4)の上下の式を使い分けると回転方向の異なる等角螺旋が描けることを注記しておく．式(9.4)をもとに，実部と虚部の変化を具体的に示すために，$x=1$ から 4 までで構成した行列表記を用いると

$$\begin{pmatrix} z_n^0\\ z_n^1\\ z_n^2\\ z_n^3\\ z_n^4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \left(1+i\sqrt{n}\Phi(k_n)\right)^0\\ \left(1+i\sqrt{n}\Phi(k_n)\right)^1\\ \left(1+i\sqrt{n}\Phi(k_n)\right)^2\\ \left(1+i\sqrt{n}\Phi(k_n)\right)^3\\ \left(1+i\sqrt{n}\Phi(k_n)\right)^4 \end{pmatrix}\quad (9.5)$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1i\sqrt{n} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2i\sqrt{n} & -n & 0 & 0 \\ 1 & 3i\sqrt{n} & -3n & -in\sqrt{n} & 0 \\ 1 & 4i\sqrt{n} & -6n & -4in\sqrt{n} & n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi(k_n)^0 \\ \Phi(k_n)^1 \\ \Phi(k_n)^2 \\ \Phi(k_n)^3 \\ \Phi(k_n)^4 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 - n\Phi(k_n)^2 \\ 1 - 3n\Phi(k_n)^2 \\ 1 - 6n\Phi(k_n)^2 + n^2\Phi(k_n)^4 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1\sqrt{n}\Phi(k_n) \\ 2\sqrt{n}\Phi(k_n) \\ 3\sqrt{n}\Phi(k_n) - n\sqrt{n}\Phi(k_n)^3 \\ 4\sqrt{n}\Phi(k_n) - 4n\sqrt{n}\Phi(k_n)^3 \end{pmatrix}
$$

と示すことができる[6-8]．具体的には， $n = 1$ と $n = 2$ の場合を図22Aに例示しているので参照していただきたい．ここで，仮にという前提を置いて，複素数 z_n を

$$
z_n = 1 + iy_n \tag{9.6}
$$

と表記を簡単化してみる[7,8]．式(9.4)や式(9.5)の複素数から，実軸上の $x = 1$ は実部しか示していないので，離散型の等角螺旋でもある z_n は， $x = 1$ で直交する縦方向を示す y_n の示す値の変化を直線に示していることがわかる．さらに，

$$
\tan\theta_n = y_n \left(= \frac{y_n}{1} \left(= \sqrt{n}\Phi(k_n) = \sqrt{m_n - 1} \right) \right) \tag{9.7}
$$

とおくとき，三角関数 $\tan\theta_n$ の加法定理[123,124]を用いて

$$
\tan 2\theta_n = \frac{2\tan\theta_n}{1 - \tan^2\theta_n} = \frac{2y_n}{1 - y_n^2} \tag{9.8}
$$

$$
\tan 3\theta_n = \frac{3\tan\theta_n - \tan^3\theta_n}{1 - 3\tan^2\theta_n} = \frac{3y_n - y_n^3}{1 - 3y_n^2}
$$

$$
\tan 4\theta_n = \frac{4\tan\theta_n - 4\tan^3\theta_n}{1 - 6\tan^2\theta_n + \tan^4\theta_n} = \frac{4y_n - 4y_n^3}{1 - 6y_n^2 + y_n^4}
$$

が導出できるので，図22と図23に示すように等角螺旋であることが保証できる．特記すべき点として，従来の対数螺旋もしくは等角螺旋と呼ばれる螺旋の定義では， θ_n は拡がる角度に注目してきたが，本研究では円の中

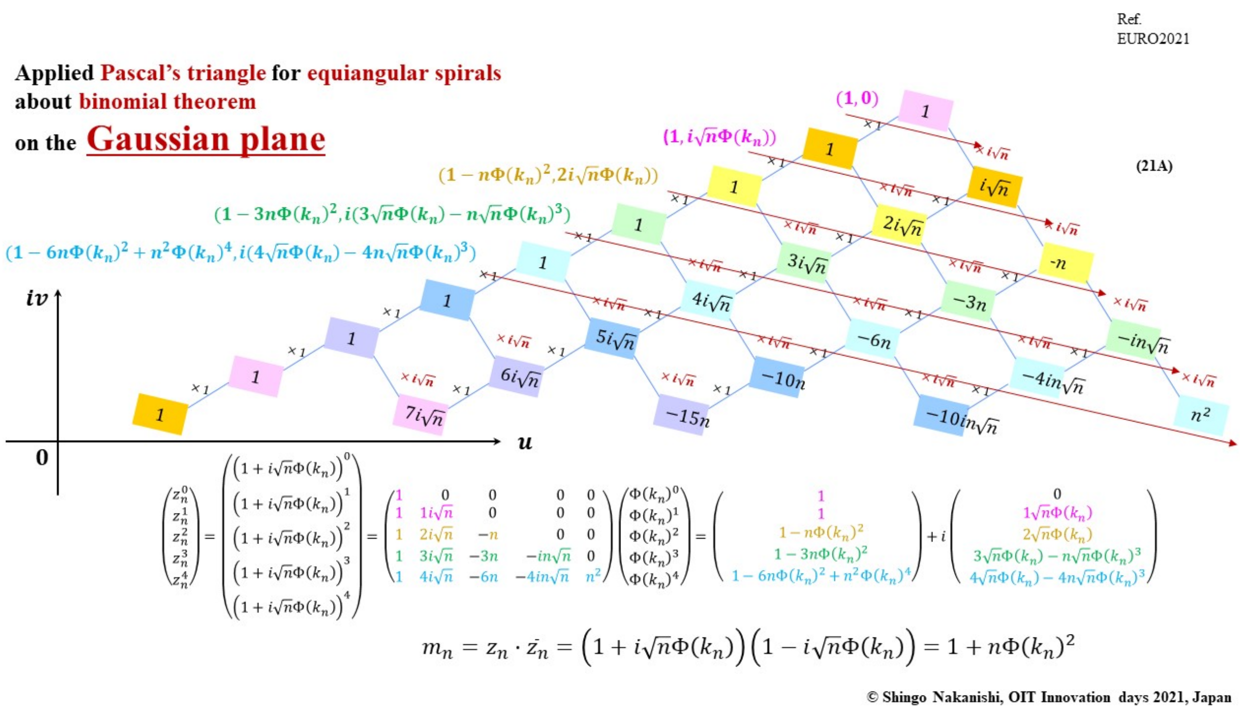


図21　二項定理とガウス平面を応用した貴金属比の類似比による等角螺旋の概念図[6-8]

Fig .21 Concepts of equiangular spirals of similar metallic ratios using binomial theorem and Gaussian plane[6-8]

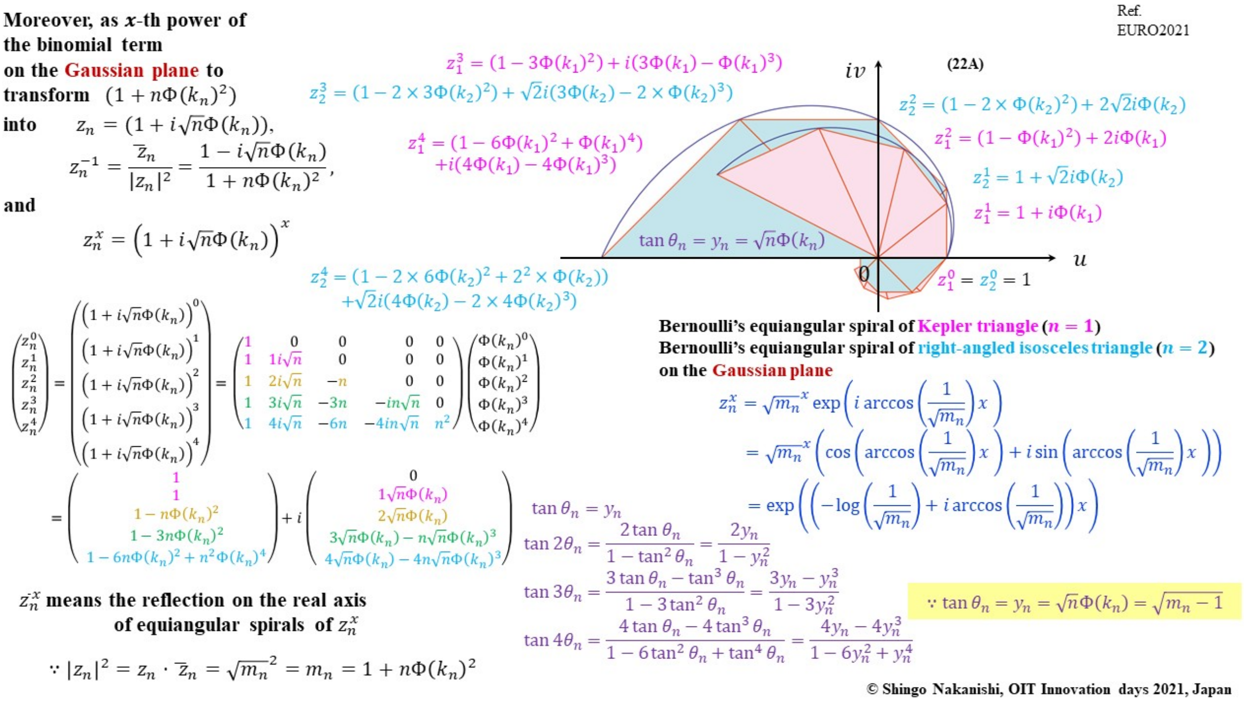


図 22　ケプラー三角形もしくは直角二等辺三角形を用いた

ガウス平面上での貴金属比の類似比による等角螺旋の視覚化と定義[5-8)]

Fig .22 Visualizations and Definitions of equiangular spirals of similar metallic ratios

on the Gaussian plane using Kepler triangles or right-angled isosceles triangles[5-8)]

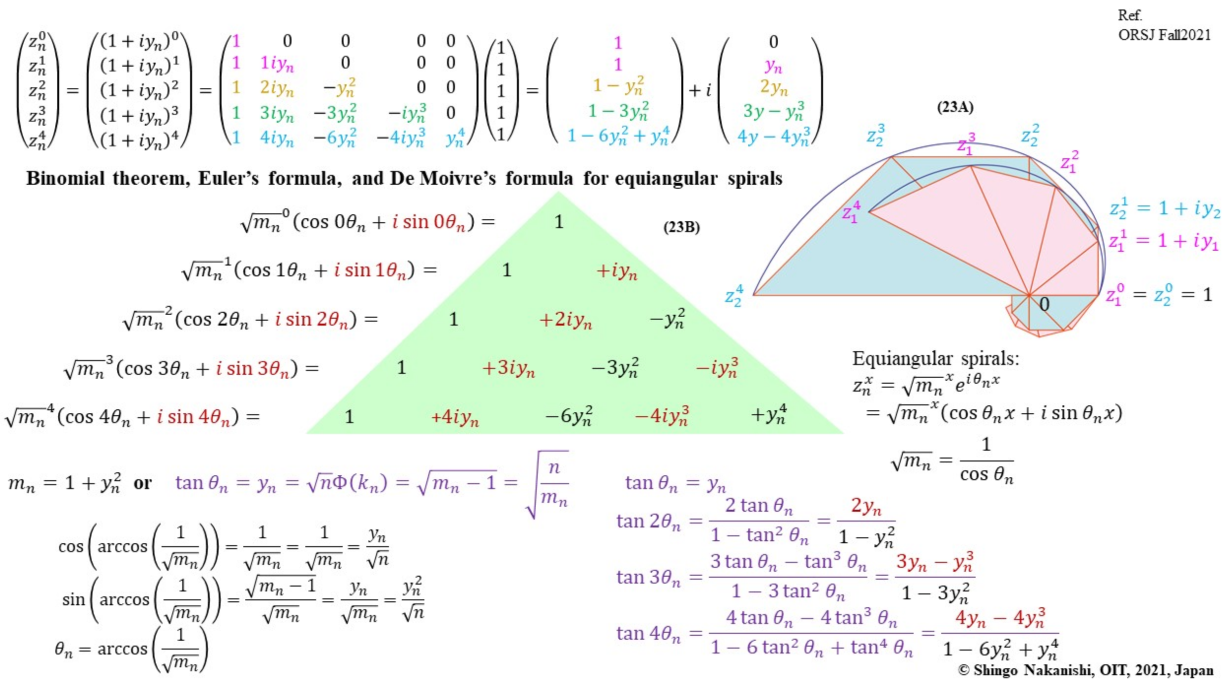


図 23　二項定理とド・モアブルの定理を用いた

ガウス平面上での貴金属比の類似比による等角螺旋の視覚化と定義[8)]

Fig .23 Visualizations and Definitions of equiangular spirals of similar metallic ratios

on the Gaussian plane using binomial theorem and De Moivre's formula[8)]

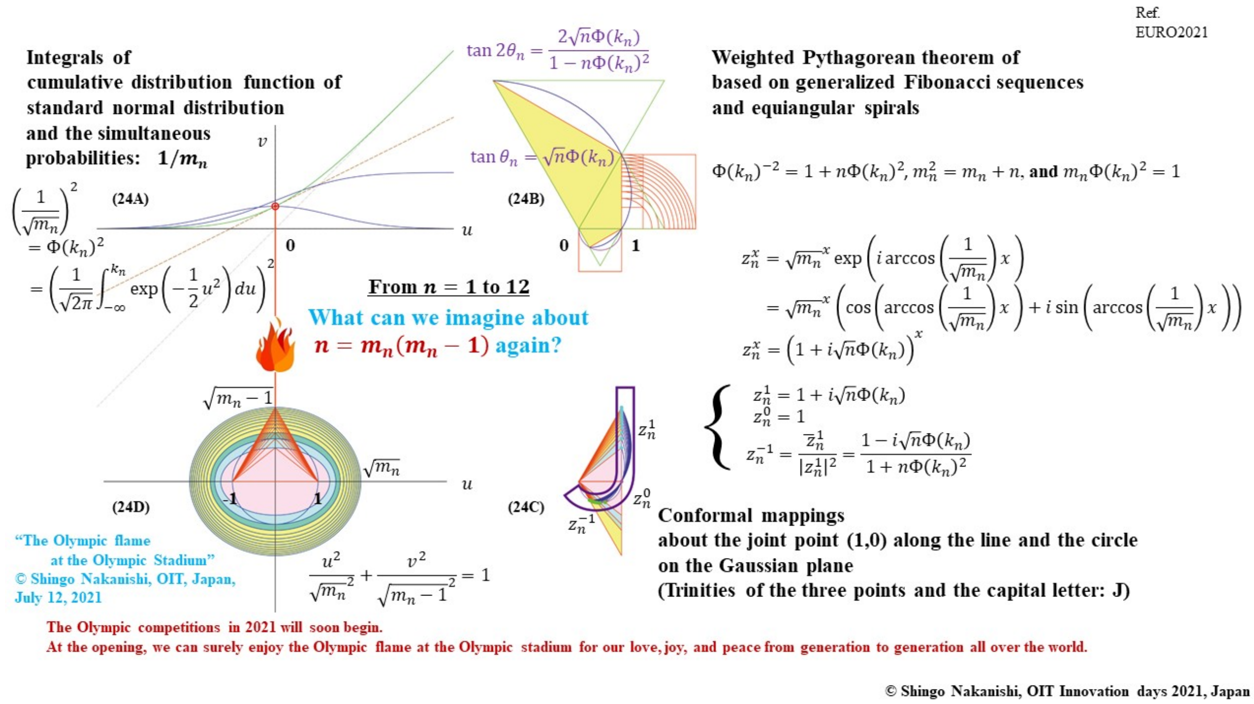


図 24　ピタゴラスの定理と同一焦点の楕円と
ガウス平面を応用した貴金属比の第 12 類似比による等角螺旋の概念図 [6-8]
Fig .24 Concepts of similar metallic ratios using Pythagorean theorem, ellipses with the same focuses,
and equiangular spirals on the Gaussian plane (Case $n = 12$)[6-8]

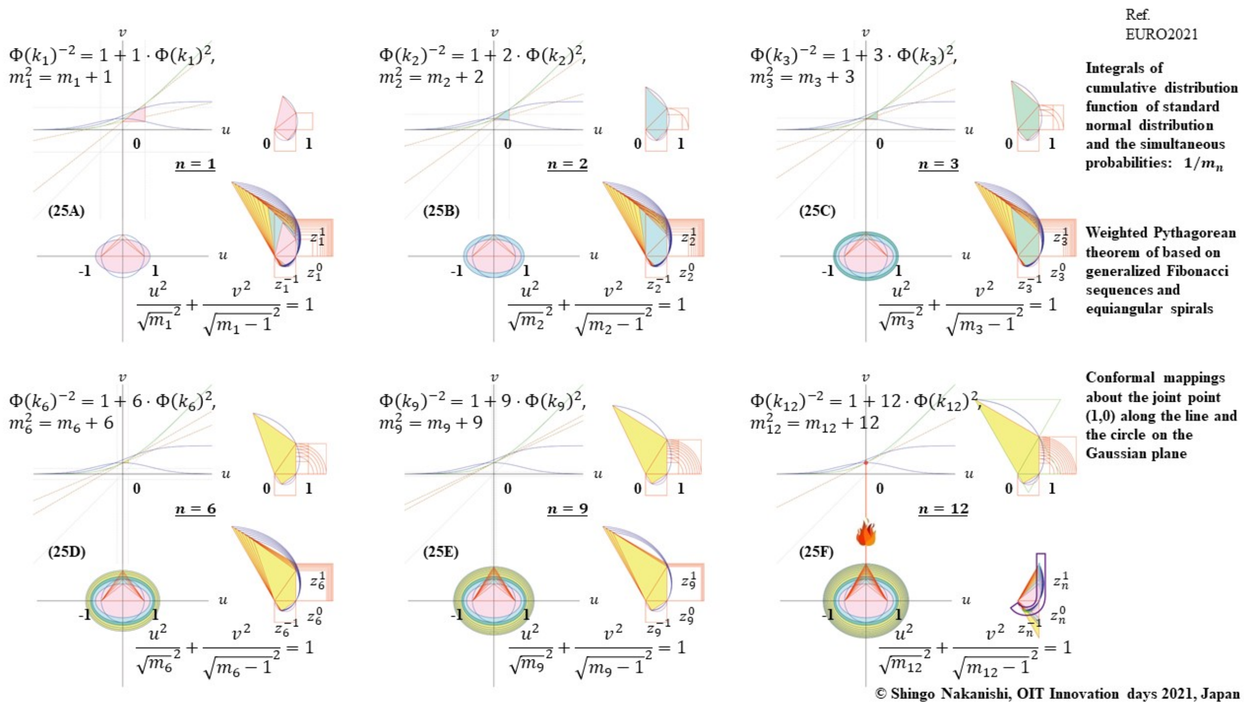


図 25　ピタゴラスの定理と同一焦点の楕円とガウス平面を応用した貴金属比の類似比による等角螺旋の概念図 [6-8]
Fig .25 Concepts of similar metallic ratios using Pythagorean theorem, ellipses with the same focuses,
and equiangular spirals on the Gaussian plane (Case $n = 1,2,3,6,9,$ and 12)[6-8]

心角と同意であることを強調しておきたい．すなわち，そのことを鑑みながら式(9.8)の分母が式(9.5)の実部を表わし，分子がその虚部を表わしていることになる．この考え方は，三角関数が確立される前から，東欧から中東に位置する近隣諸国では，等角になる方法として知られていたようである[125]．

ところで，本研究で対象とする逆三角関数[126,127]を用いるときには

$$\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{m_n}} \tag{9.9}$$
$$\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)\right) = \frac{\sqrt{m_n - 1}}{\sqrt{m_n}}$$

が成立する[5,6]ので，連続型の等角螺旋の記述式は

$$\begin{aligned} z_n^x &= \sqrt{m_n}^x \exp\left(i \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)x\right) \\ &= \sqrt{m_n}^x \left(\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)x\right)\right. \\ &\qquad \left. + i \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)x\right)\right) \\ &= \exp\left(\left(-\log\left(\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right) + i \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)\right)x\right) \end{aligned} \tag{9.10}$$

が求まる[5-8]．同様に逆回転の等角螺旋は

$$\begin{aligned} \bar{z}_n^x &= \sqrt{m_n}^x \exp\left(-i \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)x\right) \\ &= \sqrt{m_n}^x \left(\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)x\right)\right. \\ &\qquad \left. - i \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)x\right)\right) \\ &= \exp\left(\left(-\log\left(\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right) - i \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)\right)x\right) \end{aligned} \tag{9.11}$$

が求まる[5-8]．すなわち，オイラーの公式[91,92]やド・モアブルの定理[93,94]をもとに円を描き，そこに，式(9.9)を変形した次の二式

$$\sqrt{m_n} = \frac{1}{\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)\right)} \tag{9.12}$$
$$\sqrt{m_n - 1} = \tan\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)\right) \tag{9.13}$$

を考えるとき，$\sqrt{m_n}$ のべき乗を乗じたベルヌーイの対数螺旋[47,48]の構造として確かに表記することができる[5-8]．このことは，図 22A をよく見ると確認できる．

ここで，念のため，式(9.10)が成立するかを確かめてみる．まず，$x = 1$ として

$$\begin{aligned} z_n = \sqrt{m_n}&\left(\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)\right)\right. \\ &\left. + i \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)\right)\right) \end{aligned} \tag{9.14}$$

に，式(9.9)を代入すると

$$\begin{aligned} z_n &= \sqrt{m_n}\left(\frac{1}{\sqrt{m_n}} + i\frac{\sqrt{m_n - 1}}{\sqrt{m_n}}\right) \\ &= 1 + i\sqrt{m - 1} \\ &= 1 + i\sqrt{n}\Phi(k_n) \end{aligned} \tag{9.15}$$

が成立するので，離散型とも一致することがわかる[8]．同様に，逆向きの等角螺旋の記述式でも

$$\begin{aligned} \bar{z}_n = \sqrt{m_n}&\left(\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)\right)\right. \\ &\left. - i \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)\right)\right) \\ = 1 - i&\sqrt{n}\Phi(k_n) \end{aligned} \tag{9.16}$$

が成り立つことがわかる[8]．したがって，二項定理を応用したときに貴金属比の類似比による等角螺旋が描けたことがわかる[5-8]．

ところで，式(9.7)から式(9.9)の関係を用いて

$$m_n = 1 + y_n^2 \tag{9.17}$$
$$\theta_n = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right) \tag{9.18}$$

とおくとき，式(9.12)も活用して

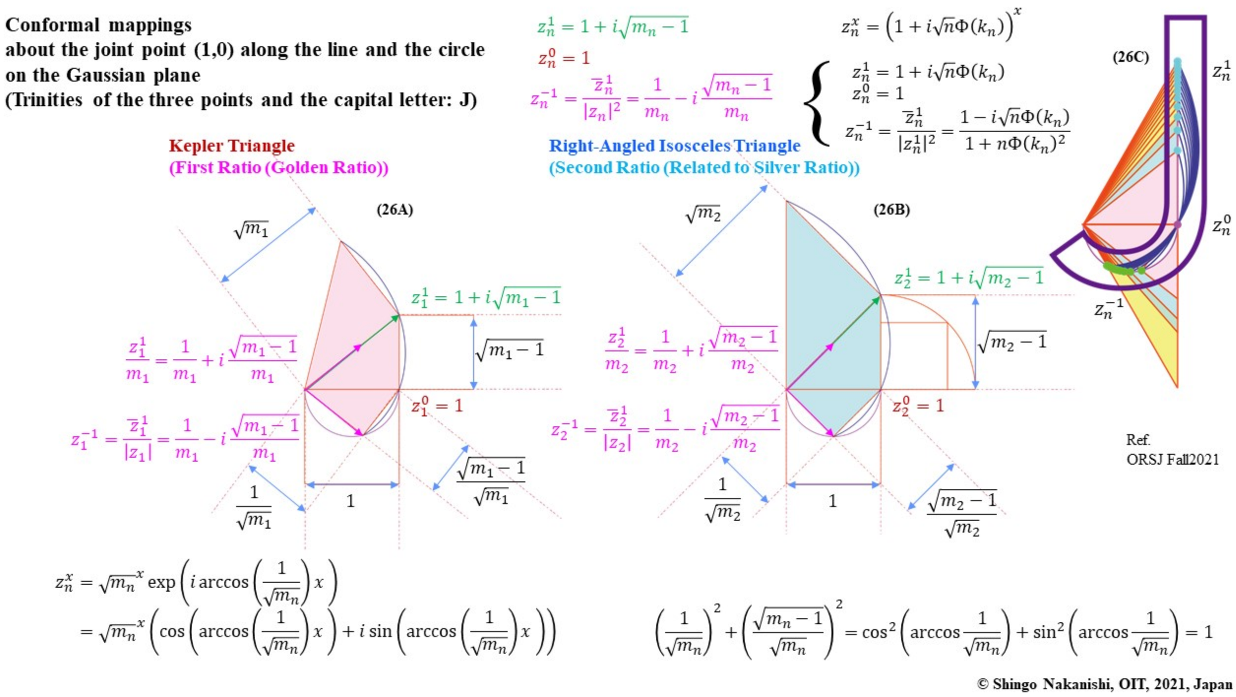


図 26　ケプラー三角形と直角二等辺三角形を用いた貴金属比の類似比による等角螺旋の概念図 [7,8]

Fig .26 Concepts of similar metallic ratios using Kepler triangles and right-angled isosceles triangles for equiangular spirals on the Gaussian plane (Case $n = 1$ or 2)[7,8]

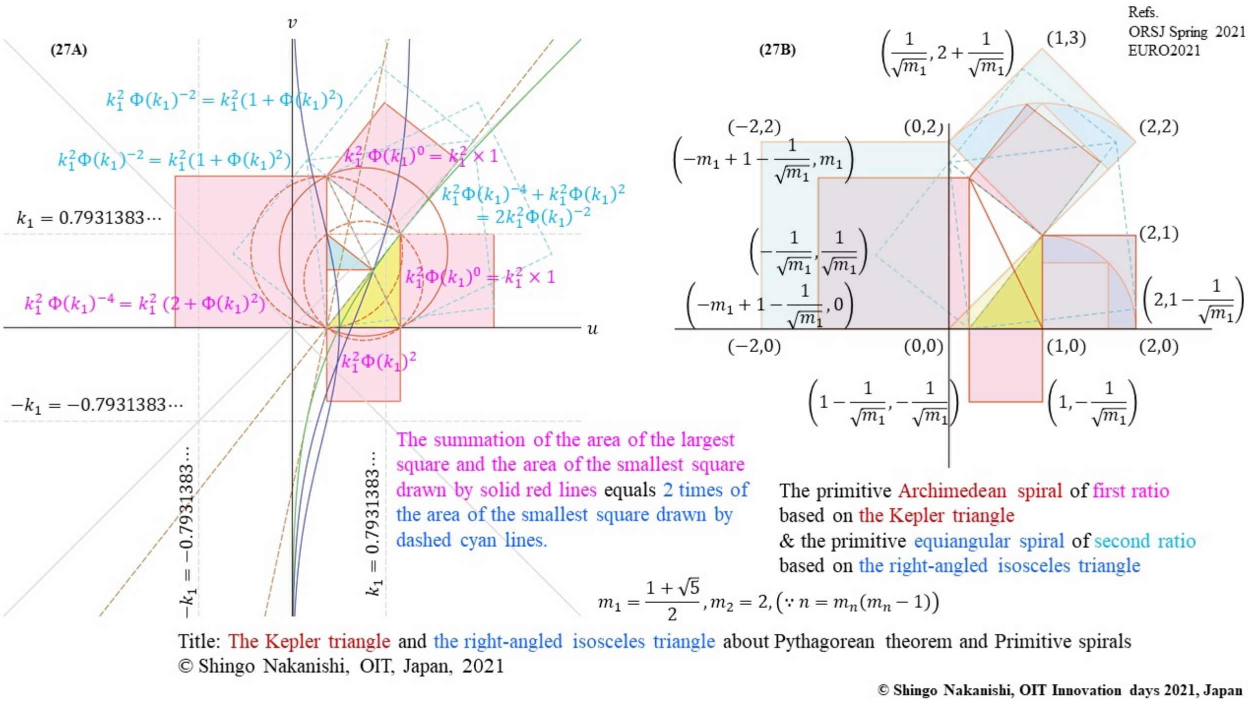


図 27　ピタゴラスの定理とケプラー三角形と直角二等辺三角形を用いた貴金属比の類似比による調和図 [4-6]

Fig .27 Harmonies of similar metallic ratios using Pythagorean theorem, Kepler triangles, and right-angled isosceles triangles[4-6]

$$\sqrt{m_n}\cos\theta_n = \frac{1}{\cos\theta_n}\cos\theta_n = 1 \tag{9.19}$$

$$\sqrt{m_n}\sin\theta_n = \frac{1}{\cos\theta_n}\sin\theta_n = y_n$$

と見積もられる．このことを具体的に活用して等角螺旋を再度確認してみる．ここで，2 倍角，3 倍角，4 倍角の三角関数の公式を見積もるために加法定理を用いて

$$\begin{aligned}\sqrt{m_n}^2\cos 2\theta_n &= \frac{1}{\cos^2\theta_n} \\ &\quad\cdot(\cos^2\theta_n - \sin^2\theta_n) \\ &= 1 - y_n^2 \end{aligned} \tag{9.20}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{m_n}^2\sin 2\theta_n &= \frac{1}{\cos^2\theta_n}\cdot 2\sin\theta_n\cos\theta_n \\ &= 2y_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{m_n}^3\cos 3\theta_n &= \frac{1}{\cos^3\theta_n} \\ &\quad\cdot(\cos^3\theta_n - 3\sin^2\theta_n\cos\theta_n) \\ &= 1 - 3y_n^2\end{aligned} \tag{9.21}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{m_n}^3\sin 3\theta_n &= \frac{1}{\cos^3\theta_n} \\ &\quad\cdot(3\sin\theta_n\cos^2\theta_n - \sin^3\theta_n) \\ &= 3y_n - y_n^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{m_n}^4\cos 4\theta_n &= \frac{1}{\cos^4\theta_n} \\ &\quad\cdot(\cos^4\theta_n - 6\sin^2\theta_n\cos^2\theta_n + \sin^4\theta_n) \\ &= y_n^4 - 6y_n^2 + 1\end{aligned} \tag{9.22}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{m_n}^4\sin 4\theta_n &= \frac{1}{\cos^4\theta_n} \\ &\quad\cdot(4\sin\theta_n\cos^3\theta_n - 4\sin^3\theta_n\cos\theta_n) \\ &= 4y_n - 4y_n^3\end{aligned}$$

が求まる．このことと式(9.5)や式(9.8)より，図 23 に示すように二項定理と三角関数の加法定理に従う等角螺旋の回転と拡大の傾向がわかる．

そこで, 実軸上の等角螺旋の点(1,0)を基準に前後の等角螺旋は軌道の幾何学的特徴はいかなるものなのかを考察したい．いま，次のように基準点 $z_n^0 = 1$ と前後する離散構造の等角螺旋の点をまとめて

$$z_n^1 = 1 + i\sqrt{n}\Phi(k_n) \tag{9.23}$$

$$z_n^0 = 1$$

$$z_n^{-1} = \frac{1 - i\sqrt{n}\Phi(k_n)}{1 + n\Phi(k_n)^2}$$

を考える[6-8]．この 3 点は，n の値を変化させていくと図 24 や図 25 に示すように非常に興味深い軌道を描く．z_n^1 の軌道は，ガウス平面上に z_n^1 を示す点(1,0) より上に垂直に半直線を描く．一方で，同時に z_n^{-1} の軌道は，原点と点 (1,0) の間を直径とする半円を描く. それも等角螺旋のため，常に等角を保ちながら軌道が変化していく. この変化は複素数特有の性質で等角写像[128-130]によるものである．したがって，$\bar{z}_n$ も含めると等角を保ちながら直線が円に写像されることを視覚化している．同時に，式(9.5)と式(9.8)の $\tan 2\theta_n$ の分母と分子が示すように直線は放物線にも写像されていることが確認できる．

このことを図 26 では, ケプラー三角形と直角二等辺三角形を用いた例としてわかりやすいように図示してみた[8]．すなわち，複素数 z_n の反転である z_n^{-1} を設定するのみだけではなく，基準となる $z_n^0 = 1$ も含めた三位一体としてまとめて考えることができる．このとらえ方が等角螺旋を描くための鍵である[6-8]．このことがイメージしやすいように，図 24 と図 25 には，n の変化を中心に描き, 図 26 には複素数の反転をイメージしやすいようにケプラー三角形と直角二等辺三角形の場合に限定して詳細を視覚化してみた[8]．また，図 24C と図 26C にはわかりやすいように半直線と半円で示す部分に大文字の J を示している．それを基準に図 25 と図 26 を確認すると 3 点の動向が理解しやすい．注意すべき点は，図 25 と図 26 の等角螺旋はガウス平面上に描いているが，対比しながら描いた図はデカルト座標系をアスペクト比が 1 になるように活用して図示している．このことをよく理解して等角螺旋と関連する図の幾何学的性質を確認していただきたい．

さらに，仮にこれらの等角螺旋の特徴を金融の半年複利に例えて考えてみたい．ピタゴラスの定理を用いて半年で直角三角形を一つ用いた成長を

$$m_n = \sqrt{m_n}^2 = 1 + \sqrt{m_n - 1}^2 \tag{9.24}$$

と定義したとき，1 年間の運用成果を示す場合には半年二つ分を 2 期通算して定義し，直角三角形を二つ分進んだ成長であるので

$$m_n^2 = m_n\left(1 + \sqrt{m_n - 1}^2\right) = m_n + n \tag{9.25}$$

と考えるとき，2 期は図 25 の放物線の軌道でも描けるの

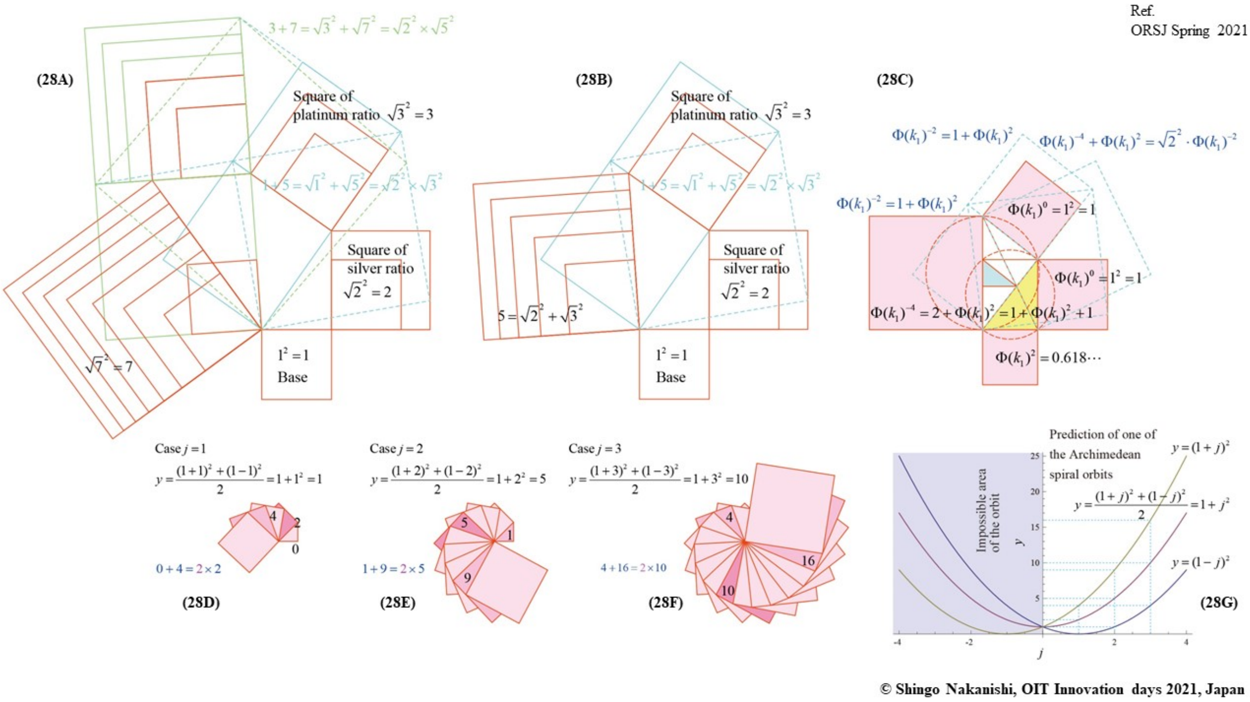


図 28　代数螺旋の軌道と正方形の面積の関連図（その 1）[2,4,7]

Fig .28 Relations of Archimedean spirals and these areas about squares (Part 1)[2,4,7]

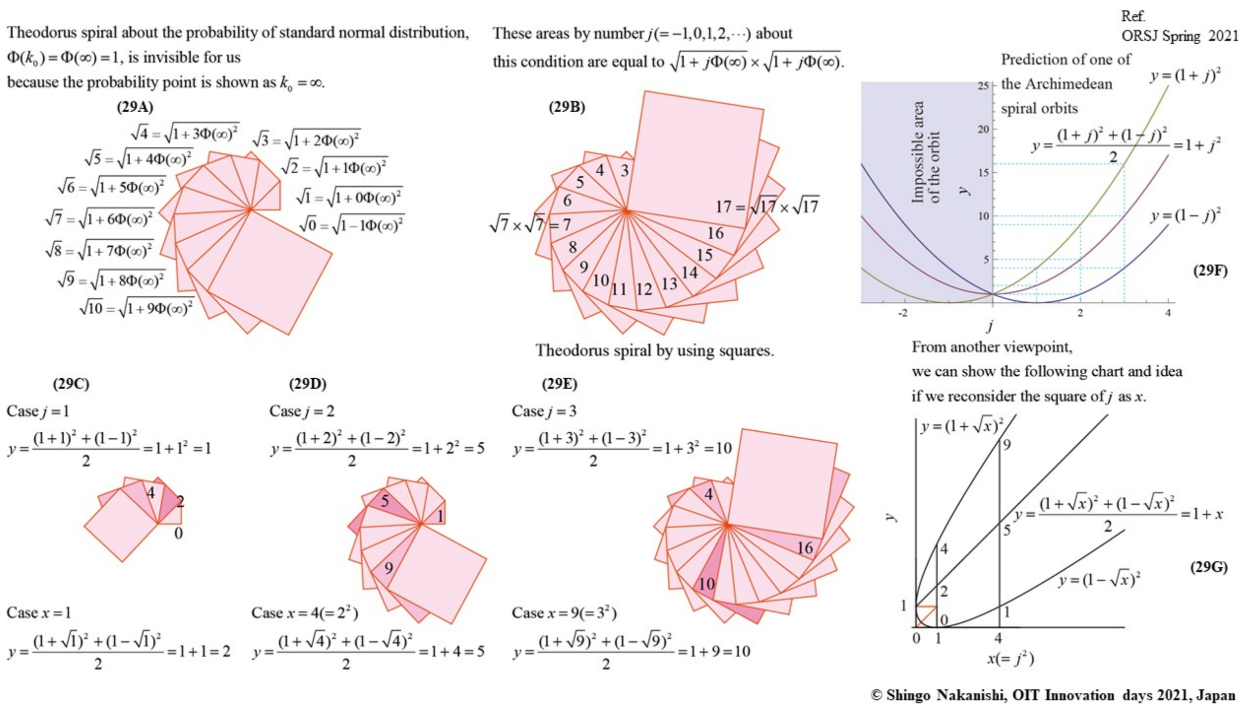


図 29　代数螺旋の軌道と正方形の面積の関連図（その 2）[2,4,7]

Fig .29 Relations of Archimedean spirals and these areas about squares (Part 2)[2,4,7]

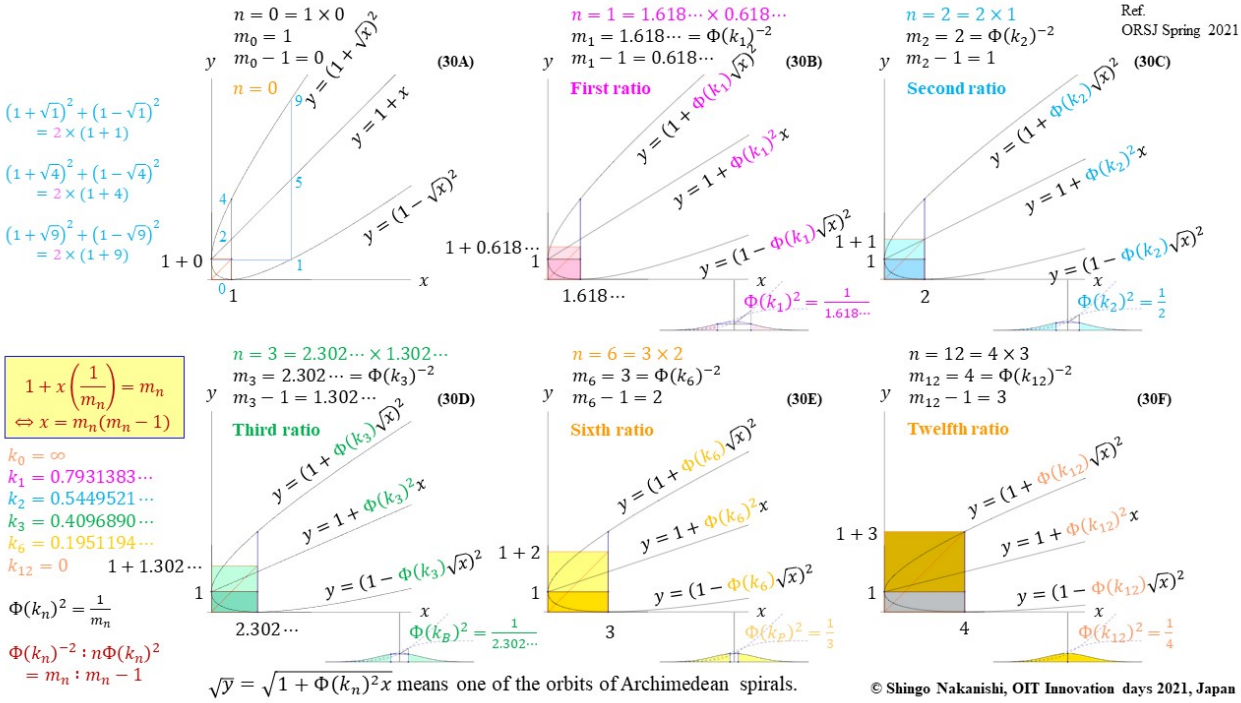
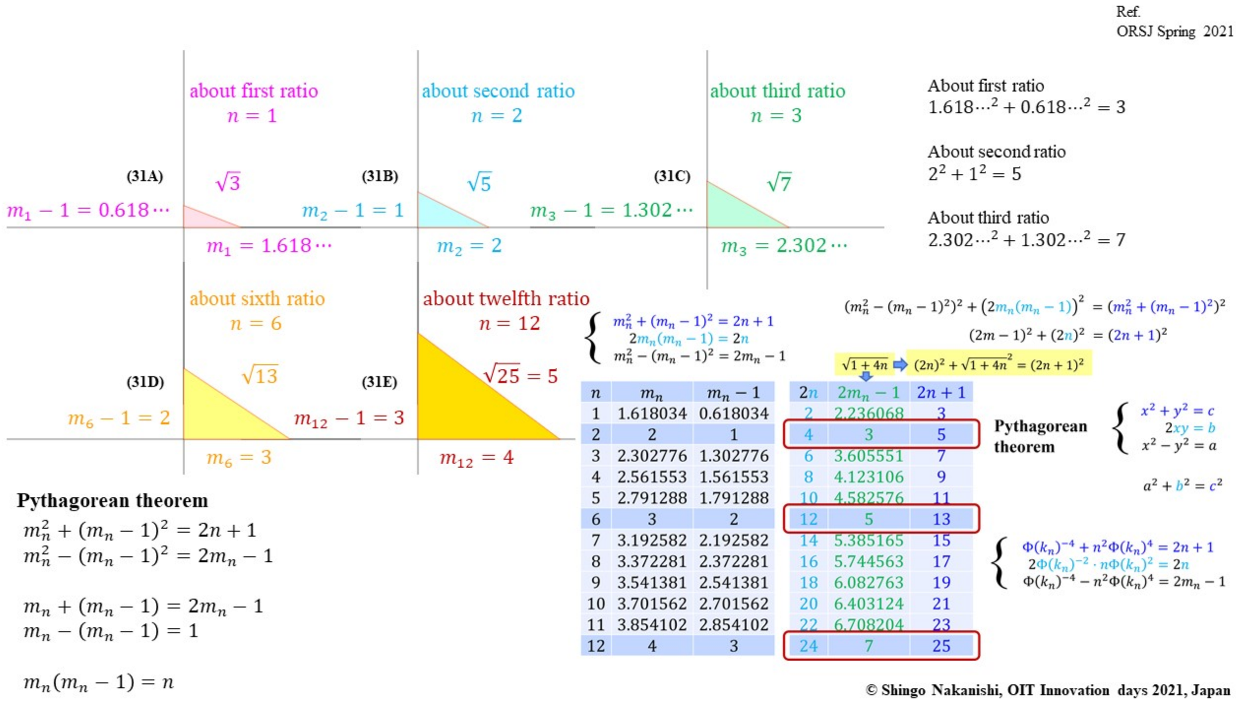


図 30　代数螺旋の軌道と正方形の面積の関連図（その 3）[4,7]

Fig .30 Relations of Archimedean spirals and these areas about squares (Part 3)[4,7]



n	m_n	$m_n - 1$	$2n$	$2m_n - 1$	$2n + 1$
1	1.618034	0.618034	2	2.236068	3
2	2	1	4	3	5
3	2.302776	1.302776	6	3.605551	7
4	2.561553	1.561553	8	4.123106	9
5	2.791288	1.791288	10	4.582576	11
6	3	2	12	5	13
7	3.192582	2.192582	14	5.385165	15
8	3.372281	2.372281	16	5.744563	17
9	3.541381	2.541381	18	6.082763	19
10	3.701562	2.701562	20	6.403124	21
11	3.854102	2.854102	22	6.708204	23
12	4	3	24	7	25

図 31　貴金属比の類似比に関連するピタゴラスの定理の考案図 [5,7]

Fig .31 Concepts about Pythagorean theorem related to the similar metallic ratios[5,7]

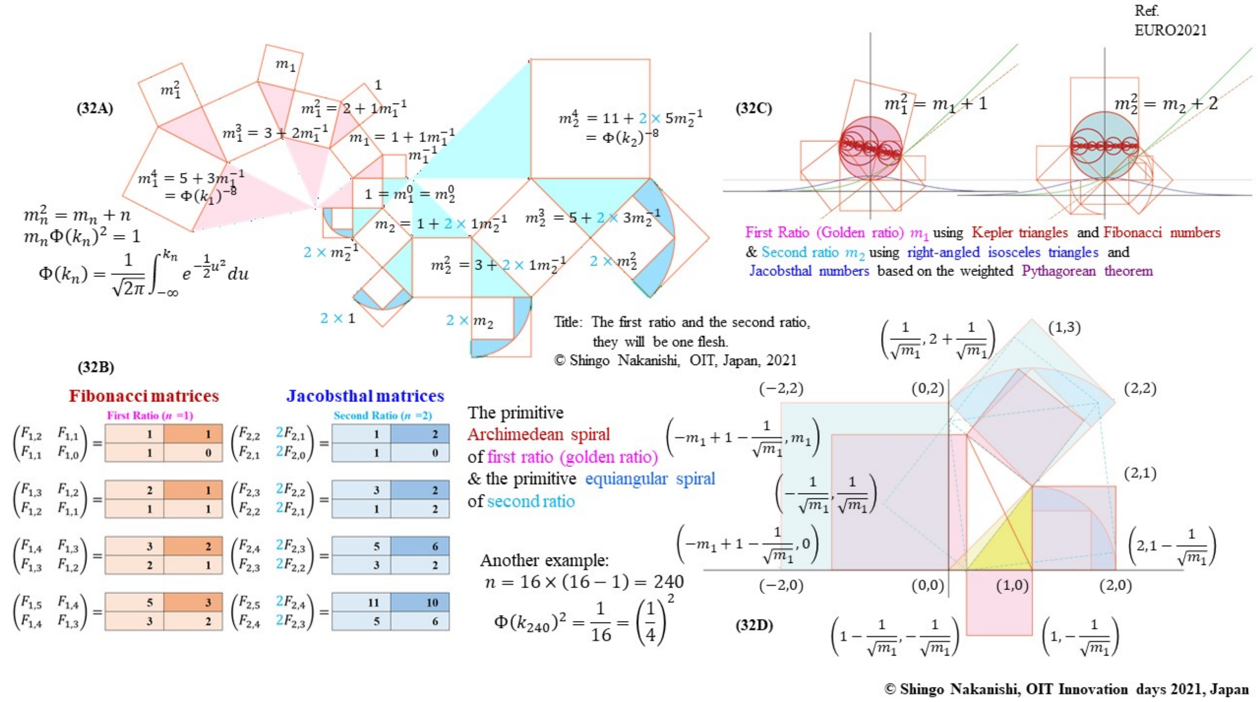


図 32　ケプラー三角形と直角二等辺三角形を用いた貴金属比の類似比による調和図 [6,7]

Fig .32 Harmonies of similar metallic ratios using Kepler triangles and right-angled isosceles triangles for Archimedean and equiangular spirals (Case $n = 1$ and 2)[6,7]

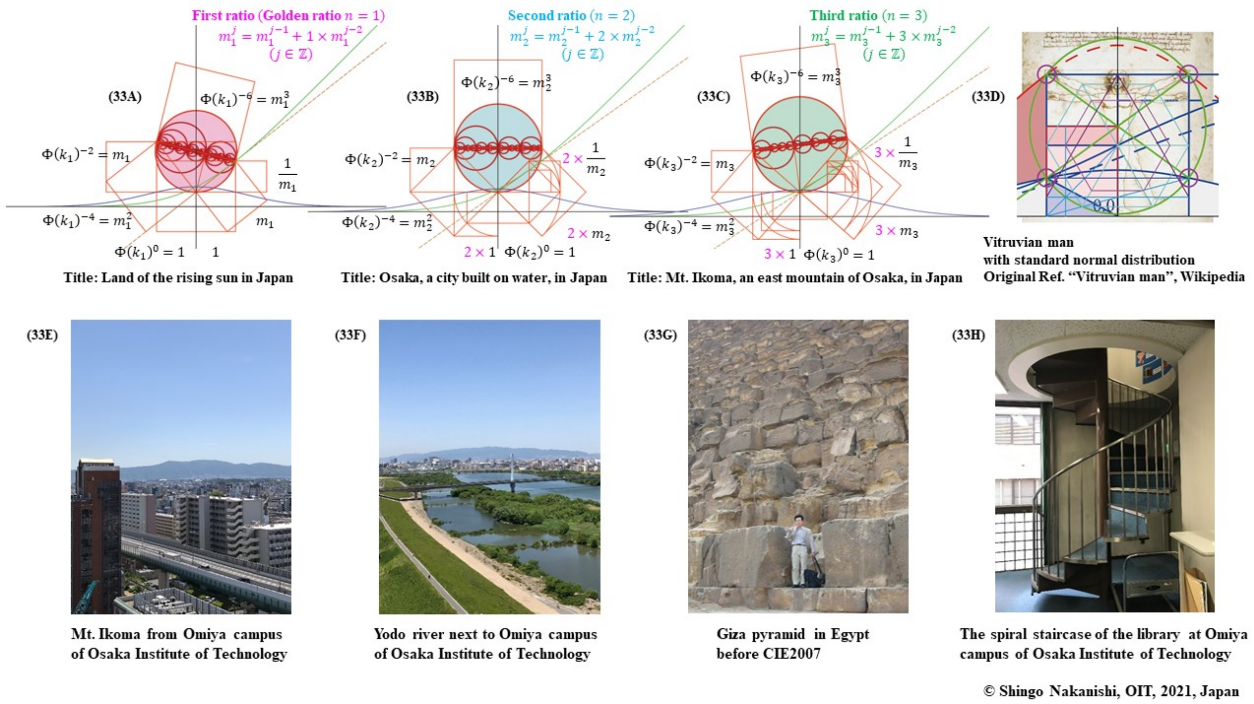


図 33　大阪工業大学大宮校地から眺める生駒山と淀川，ウィトルウィルス的人体図他 [1,2,7,8]

Fig. 33 Mt. Ikoma and Yodo river from Omiya campus of Osaka Institute of Technology, Vitruvian man, and others[1,2,7,8]

で面白いのではなかろうか．このときの半年の金利は運用成果 m_n から元金 1 を差し引いて m_n-1 である．貴金属比の類似比を用いた例では，いささか高金利すぎるので現実離れしているが, 図 25 からもその特徴を考察することが可能である．

以上，ガウス平面上における貴金属比の類似比に関する等角螺旋について考察を行った．次章では，ここまでの章には含まなかったが，前作 [2]の発表後に見つかった他の特徴も含めた研究ノートとして公表しておきたいので追記を行う．まずは，デザインの観点からケプラー三角形と直角二等辺三角形の直角に関する特徴について再考を試みている．

10. 代数螺旋軌道，ピタゴラスの定理の再考および貴金属比の類似比のデザインとの関連性について

10.1 ケプラー三角形と直角二等辺三角形による直角の表現および螺旋の再考

前章までの記述で，多重根号，連分数による貴金属比の類似比を定義し，ピタゴラスの定理と一般化されたフィボナッチ数列と二項定理が等角螺旋を描くために欠かせない数理の鍵となることを解説した．このことを考える機会となったもう一つの重要な幾何学的特徴を示す道具でもあるケプラー三角形と直角二等辺三角形を再考したい [4]. 図 27A に示すようにケプラー三角形の並べ方で，直角が活きた性質を持つことは，これまでの科学技術の分野とデザインの世界でも注目されてきたはずである．

そこで，前作 [2]で予想した図 27 の代数螺旋図を想定した桃色の一番大きな正方形の面積と，桃色の一番小さな正方形の面積の和は，破線で描いた小さな正方形の面積が 2 個分と等しいことが興味深かったので，図 27B に第 1 類似比（黄金比相当）による代数螺旋の基本部分と，第 2 類似比（白銀比相当）による基本部分を重ね合わせた図を公開しておきたい [4,6].

黄金比や白銀比の比率は，歴史的にも数多くの建造物や美術作品に欠かせなかったことは周知である. 一方で，調和する作品は数少ないと思われる．唯一，フィボナッチ数列を正方形に例えて，正方形を並べながら四分円を描いた後に螺旋をイメージした図 [12]だけが有名である．おそらく，その他の事例も沢山存在はするかもしれないのだが，代表的な例は思い当たらないし，また検索されない．

10.2 代数螺旋軌道の再考

ところで，図 27A の面積の和の考え方が，一般的な代数螺旋でも成り立つことを図示したのが図 28 と図 29 である [4]．これらの図中に桃色で表わした代数螺旋図がテオドロスの螺旋である．これらの正方形の面積の関係が問題なく等しいことがわかりやすいように正方形の面積を示す数値を図中に記載している．また, 図 28A, 図 28B からもこの考え方は成り立っていることがわかる [4]．今のところ応用例が見つからないのと，この考え方が普遍である法則なのかを示す証明がわからない．一致していることは確かであるので, 図 28G, 図 29F に示すように，テオドロスの螺旋に関して

$$y=\frac{(1+j)^2+(1-j)^2}{2}=1+j^2 \tag{10.1}$$

の考え方が代数螺旋において常に成り立つことを報告する [4]．すなわち，基準とする螺旋上から，j だけ前後に離れた二つの正方形の面積の和は，基準とする代数螺旋の正方形の 2 個分の面積に等しい．このことに関して，$j=\sqrt{x}$ とおいて，式(10.1)を

$$y=\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2+\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{2}=1+x \tag{10.2}$$

に変換して，図 29G の作図を行なった．この図 29G を参考に, 貴金属比の類似比 m_n の代数螺旋に相当する特徴について調べたものが図 30 である [4]. この図でも確かに, m_n と m_n-1 を正方形の中に図示できる特徴が見つかる．したがって，貴金属比の類似比が代数螺旋と関連する傾向について続けて精査する必要がある．

10.3 貴金属比の類似比とその序数に関するピタゴラスの定理の再考

ピタゴラスの定理の一般式 [50]

$$a^2+b^2=c^2,\quad \begin{cases} c &= x^2+y^2\\ a &= 2xy\\ b &= x^2-y^2\end{cases} \tag{10.3}$$

を参考に，貴金属比の類似比 m_n とその序数 n に関する

$$m_n^2 + (m_n - 1)^2 = 2n + 1 \tag{10.4}$$
$$2m_n(m_n - 1) = 2n$$
$$m_n^2 - (m_n - 1)^2 = 2m_n - 1$$

を考える[5)]．もちろん，本研究では，再掲する式(2.34)が

$$m_n^2 - m_n - n = 0 \tag{10.5}$$

として成り立つために，貴金属比の類似比 m_n とその序数 n を独立した二つの変数として用いても良いか慎重であるべきだが，この特徴を調べるときに，式(10.4)の一番上の式より図 31 に示す直角三角形が描けた[5)]．また，式(10.4)の右辺について

$$(2n + 1)^2 = (2n)^2 + (2m_n - 1)^2 \tag{10.6}$$

が成り立つためには

$$2m_n - 1 = \sqrt{1 + 4n} \tag{10.7}$$

が必要であることがわかる[5)]．すなわち，式(10.7)を展開した貴金属比の類似比

$$m_n = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 + 4n}}{2} \tag{10.8}$$

が成立するためである[5)]．式(10.4)の数値の特徴を図 31 の図中の表に示したが，整数で収まる傾向はピタゴラスの定理に従うことから，ピタゴラス数であることがわかる．また，貴金属比の類似比の序数 n との関連で，貴金属比の類似比 m_n が整数となる場合の間には，式(10.8)に従いながら m_n が小数となる場合の傾向が得られていることが確認できた．したがって，貴金属比の類似比の中で，m_n と $m_n - 1$ が図 31 に示すような整数であるときは，ピタゴラス数が見つかるので，貴金属比の類似比にとって特別な関係があるかもしれないことを追記しておく．

10.4　貴金属比の類似比と芸術に関連する黄金比，白銀比，青銅比の再考

デザインの世界における黄金比の定義は，歴史的に調べて誰もが意義を唱えないと考えられる[11-33)]．また，白銀比も世界中の多くの古来の建造物の柱の断面が正方形か円を活用してきたために $\sqrt{2}$ が基準であることが多く，正方形の対角線の比として親しまれている[55-58)]．また，同時に白銀比はA4 用紙の縦横比のように日常生活でも多用されている．このため比としての華やかさでは黄金比には劣るかもしれないが立派な比である．それゆえ，建造物の美を兼ね備えた比として，日本では昔から盛んに活用されてきたように，大和比として親しまれている[9-33)]．

一方で，貴金属比における白銀比[55-58)]の定義式から得られる数値は

$$\lambda_{(2,1)} = 1 + \sqrt{2} = 2.412 \cdots \tag{10.9}$$

であり，Wikipedia や岩本の論文[9)]の提示される図や正八角形以外にデザインでこの数値が重要かというとそうでもないようだ. 確かに, 数値の特徴でもある算出構造は,

$$\lambda_{(2,1)}(\lambda_{(2,1)} - 2) = 2.412 \cdots \times 0.412 \cdots = 1 \tag{10.10}$$

と美しいのだが，これを芸術作品に応用される動向については正八角形を除いて不明である．

むしろ，本研究で調査したようにペル数列の代わりにヤコブスタール数列と直角二等辺三角形を活用した貴金属比の第 2 類似比の数値

$$\lambda_{(1,2)} = m_2 = 2 \tag{10.11}$$

を用いて描いた等角螺旋のほうが，正方形と直角二等辺三角形を適切に活用できたことからも明らかに理にかなっている．しかしながら，$m_2 = 2$ と求まる数値のため芸術やデザインで重要な $\sqrt{2}$ を直接述べているわけではないので，本研究では第 2 類似比と表現し直すことにした．

また，青銅比の数値

$$\lambda_{(3,1)} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} = 3.302 \cdots \tag{10.12}$$

もデザインにおいて多くのブログで解説されるにもかかわらず，Wikipedia でも例図が掲載されているのみで市民権を得た作品は見つからない．したがって，デザインで幾何学的特徴を活かすならば，同様に等角螺旋を描ける貴金属比の第 3 類似比

$$\lambda_{(1,3)} = m_3 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} = 2.302 \cdots \tag{10.13}$$

が有効であるといえないだろうか．すなわち，貴金属比の類似比は，正方形の面積を示す平方を基準に取扱いながら提案を行っている．以上までのことは，図 3 と図 4 で示したように，容易に貴金属比の類似比の大きさを認識できるので，芸術やデザインの世界で活用が期待できるかもしれない．

また，本研究で取り扱ったケプラー三角形と直角二等辺三角形を基準に説明できたフィボナッチ数列やヤコブスタール数列による等角螺旋を描いた貴金属比の類似比を活用することは，従来の貴金属比よりも幾何学的には取り扱いやすいのではなかろうか．

そこで, もう一度, 本研究で取り扱った $n=1$ と $n=2$ の成果をまとめた例図を図 32 に示しておきたい [4-6]．特に強調したいことは，図 27B でもある図 32D は，黄金比である貴金属比の第 1 類似比を基準にアルキメデスの代数螺旋を描き，白銀比に関連する第 2 類似比を基準にベルヌーイの対数螺旋（等角螺旋）を描いて重ね合わせていることである．その結果，ケプラー三角形と直角二等辺三角形の直角部分が一致するように描いたことが図の調和を奏でている．

また，図 32C には標準正規分布の累積分布関数の積分形と黄金比とピタゴラスの定理の調和が美しく，黄金比の再帰を示す円が，平凡な山頂をイメージできる縦横比が同じである標準正規分布の確率密度関数の上に日の出のごとく描写できた．大阪の街に住む人は，図 33A のように東の奈良県の方角に位置する生駒山の近くに，毎朝このように日の出を見ることができる．そして，若い頃の著者は，日中に学部・大学院時代の仲間と図 33B に示すように大阪工業大学大宮校地の隣を流れる淀川の河川敷で時折汗を流し，学部のゼミでは大阪工業大学大学歌を沢山熱唱したので,「生駒の山の空高し」のフレーズが耳から離れない．まさか，この比率の発想で日頃の経験がこのように生きてくるとは夢にも思わなかった．

ところで, 著者は 2014 年の夏にスペインのバルセロナで国際会議（IFORS2014）が開催されたときに，50 人から 60 人ほどの日本人の OR（オペレーションズ・リサーチ）の研究者が集う懇親会を任されたことがある．当時は，日本機械学会での構造信頼性工学と設計工学・システム部門での研究活動から，OR でのファイナンス・確率統計に専門分野を転身して間がなく，OR の有名な大先輩の先生方とも面識がなく，これも修行のうちと引き受けたのだが，現地のレストランに E メールで直接連絡を入れて準備してきたところ，国際会議の開催直前に日本本土に大型の台風が上陸しかけた．

リスク管理を怠った著者は数十万円の赤字を覚悟しながら，現地のレストランと交渉を重ねつつ，参加者の皆様とも連絡を取ってそれぞれの航空会社の運航を確認して安堵し無事に現地で集いを開催できた経験がある．そして，そのときの集いで貴金属比の文献 9)をご執筆された岩本誠一先生が乾杯をご発声してくださった．集いが無事に終了して片づけていると，岩本先生から，飲み放題の文化のない外国の街で，当日のアルコールの進み具合の需要予測と皆のグラスの空き具合の在庫管理を確認しながら司会を進行し,「おもてなし」を果たせた小生に「OR を実践して見せてくれたね」と労いのお言葉を頂戴した．心優しい岩本先生の人となりを感じることができた．

当時の小生は，まだ，黄金比の魅力にも気が付いていなかった．岩本先生が現地バルセロナでガウディがデザインしたサグラダファミリアに黄金比の魅力を重ね合わせてご研究されてきたと想われる研究への情熱を著者もまた果たして実感できたのだろうか. 専門分野を転身し，新たな発見を目指して彷徨いながらその後の著者の研究活動の中で正規分布の美を探求する旅路 [1)]が進むにつれ, 岩本先生のご研究を拝見することになり，とても光栄な経験をさせてもらえたと大変感謝している．まさかその時に脅かされた台風までもがモデル化できる対数螺旋と一緒に黄金比や貴金属比の類似比の魅力が今回は 40 頁を超える研究の主題になるとはとても不思議な気持ちである．そして，本研究の等角螺旋の詳細に相当する発表を，岩本先生が長年貢献されてきた九州大学で開催された OR 学会秋季研究発表会で修めることができた所縁にも感謝している．

ところで，図 33D には，ピタゴラスの定理と貴金属比の類似比の構成図と共にダ・ヴィンチの作品でもある「ウィトルウィウス的人体図 [131,132]」を記してみた．よく観察すると，偶然にもケプラー三角形と円と正方形と一緒に収めた作図方法と同じ作図方法を採用して標準正規分布の累積分布関数の積分形を応用しながら，円と正方形の関係を研究してきたことがわかる [1,134-136]．

前作 [2)]でも掲載した図 33H に示す本学の図書館の螺旋階段を上り下りしながら研究者を志し，研究者になった後に自分の所属や取り巻く環境の変化を考え，悩みながら専門分野を転身し，図 33G のピラミッドを見て来た頃より今回の旅路が始まった．ピラミッドを含む黄金比に関連する建造物は沢山存在して諸説があるが，誤差を含むことや不明なことが多い．その中で黄金比が日本へ伝わるためには歴史的に中国を経由してくる必要がある．シルクロードを通じて西洋と東洋の文化が行き交う中に，幸福に生きたいと願う人々の営みへ想い馳せることがで

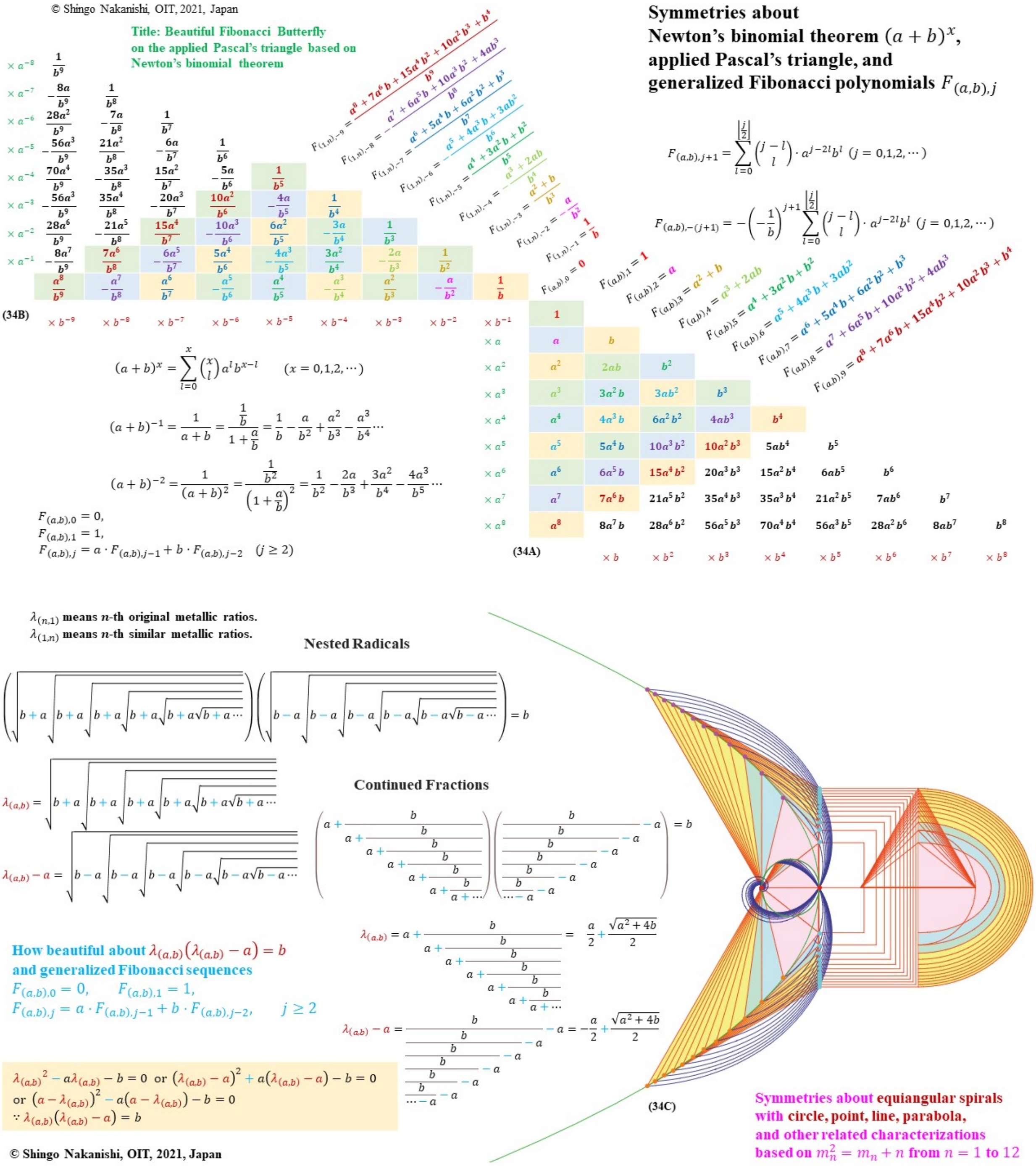


図34　ニュートンの二項定理とパスカルの三角形と一般化されたフィボナッチ数列の協奏と対称性およびそのときの連分数と多重根号や等角螺旋の幾何学的な美と魅力

Fig. 34 Harmonies and symmetries about Newton's binomial theorem, applied Pascal's triangle, and generalized Fibonacci sequences, these beauty and attractiveness using nested radicals, continued fractions, and equiangular spirals.

きる．

読者はどのような感想をお持ちになるであろうか．著者はデザイナーではないが等角螺旋と図3と図4に示す活用の基本形を紹介した．これらの図から派生した素晴らしいオリジナルの作品が，本研究で提案した比率を活用して生まれ，多くの方に感動されて世代を超えて愛され語り継がれたら大変嬉しく思う．

本研究はコロナ禍のため，ほとんど在宅で制作してきた．ここで，まとめの図として図34にニュートンの二項定理とパスカル三角形と一般化されたフィボナッチ数列の同時例図を示す．また，その下に本研究ノートで最初に提案した連分数と多重根号や等角螺旋の幾何学的な美や魅力を記念してデコレーションしながら示している．スチュアートの著書「もっとも美しい対称性[137]（Why beauty is truth[138]）」の表紙に登場する美しい対称性[139]の象徴である蝶々がわかると嬉しく思う．負の二項定理の展開はあまり知られておらず，パスカルの三角形が横向きに追加できることはもっと知られていない．そこに，フィボナッチ数列が正負の対称性を強調するように描けることは皆無である．本研究はそのような傾向を一つ一つ図に収めながらギャラリーとして図を描き重ねてきた．

このような図の製作中に，歴史上でペストが大流行した頃の出来事で，疎開中のニュートンが成果を上げた逸話が大変励みになった．もちろん，本研究が巨人の肩の上に立つ[132]ことや並ぶような成果を得たわけではないが，先人や賢者達の偉業に敬意を表して足元からそっと見上げると，その景色もまたとても美しいと改めて感じる瞬間を得ることができた．真に美しいものを別の角度から見上げても，それらを重ね合わせて確認しても，その調和が見事に協奏しているかのようにとても美しいと理解できたときの喜びもまた格別である．それも比を純粋に測るモデルとして感動させてもらえた．そんな光景を今回も見せてくれた神様のご計画に感謝したい．

最後に，比を測ることの感動について言及したので，その着想として愛を感じながら聖書[137]を引用しておきたい．

「愛に根ざし，愛に基礎を置いているあなたがたが，すべての聖徒とともに，その広さ，長さ，高さ，深さがどれほどであるかを理解する力をもつようになり，人知を超えたキリストの愛を知ることができますように．そのようにして，神の満ちあふれる豊さにまで，あなたがたが満たされますように（エペソ人への手紙）」[137]．

神の御業には程遠く[138,139]，人類の歴史の中で今回公表する成果もまた，神がご計画された世界ではほんの一部分が少し見えただけである．これから多岐にわたる分野でご活躍される皆様にも，同じような感動が沢山訪れるように，早くコロナ禍が落ち着くことを願いたい．もちろん，先人から受け継いだように，まだわからないことも沢山あり，人間の考えは完全ではなく誤差や見当違いを含む失敗も重ねるだろうが，修正して困難を乗り越えようと，世の中が貴金属比の類似比で今回考察した等角螺旋の軌道のように美しく眺めることができたようにと，沢山回転しながらアイデアを蒔きつつ，実りよく豊かになった頃に，振り返ったら指数関数が拡がる複利の世界のように成長していて，愛，喜び，平安に満たされていることを祈りたい．

本研究は，前回と同様に再び研究ノートとして投稿したが，もし，読者が科学への関心や愛を表現する形を認めてくれて喜んでいただけたならば，この上なく幸せである．平安が訪れますように．

11．むすび

本研究では，以下のことを明らかにしている．

1. 貴金属比と貴金属比の類似比に関係する連分数と多重根号を提案して，類似比としての位置づけを定義した．
2. 前作のピタゴラスの定理と一般化されたフィボナッチ数列を用いて貴金属比の類似比を計算するために固有値による解法を示して編成し直した．また，貴金属比はペル数列の拡張が基準であるが，貴金属比の類似比はヤコブスタール数列の拡張が基準となることを示した．
3. 貴金属比の類似比の定義に2次元標準正規分布の同時確率の逆数を示し，$n = 12$ が重要であることを示唆した．また，固有値として算出した値を基準に同じ焦点となる楕円を描き，等角螺旋を描くときに再帰する図形情報が重要であることを提案した．
4. 二項定理とパスカルの三角形の応用例を用いて，一般化されたフィボナッチ数列およびフィボナッチ多項式と等角螺旋構造を視覚化した．また，ガウス平面上で等角螺旋の記述式を提案し，二項定理，ド・モアブルの定理，三角関数の加法定理を用いてに容易に展開できることを確認した．
5. 黄金比と白銀比をデザインの観点から再考し，畑違いではあるが，貴金属比の類似比に関して

いくつかの幾何学的な形態やデザインの基礎となる比率の例図を提案した．特に，これらの作図のうち，東京オリンピックとパラリンピックの開催年を記念してメダルの色に相当する序数の例図については，著者の日々の生活の中で感じる日本の美や大阪への親しみを込めて命名を行った．

謝辞　本研究の進展には，若い頃の恩師　中易秀敏先生，栗山仙之助先生，情報科学部名誉教授　亀島鉱二先生，工学部建築学科　吉村英祐先生から頂いた前々作 [1] の助言が励みになりました．このことに前作と同様に謝意を表します．また，若い頃にお世話になった小学校・中学校・高校の恩師の先生方，在学時代の大阪工業大学・大阪大学大学院経済学専攻の先生方，NCP 研究会（日本機械学会関西支部　機械の強度と形態懇話会）の先生方，日本オペレーションズ・リサーチ学会と日本証券アナリスト協会でお世話になった皆様，吹田聖書福音教会でお世話になった皆様をはじめ多くの方々に感謝いたします．さらに，製作中にご支援を頂いた本学情報センターの教職員の皆様をはじめ各部署の皆様にも感謝します．そして，最後にピタゴラスの定理や正三角形等について談笑してくれた愛娘にも感謝します．

付録

読者の中には，正規分布と貴金属比の類似比がなぜ関係付けられているか不思議に思うかもしれない．そこで，下記の定義式

$$m_n \Phi(k_n)^2 = 1 \tag{11.1}$$

に関する付録を設けてみた．図 35 を確認すると，標準正規分布の確率点が 0 のときの確率密度の高さと，確率点 k_n における確率密度の高さが重要であることがわかる．確率点 k_n では累積分布関数 $\Phi(k_n)$ の積分形は

$$h_P(u) = \phi(u) + u\Phi(u) \tag{11.2}$$

と定義できる．この関数の一階の導関数である累積分布関数を

$$\frac{dh_P(u)}{du} = \Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} \phi(x)dx \tag{11.3}$$

とし，二階の導関数である確率密度関数を

$$\frac{d^2 h_P(u)}{du^2} = \phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \tag{11.4}$$

とする常微分方程式

$$\frac{d^2 h_P(u)}{du^2} + u\frac{dh_P(u)}{du} - h_P(u) = 0 \tag{11.5}$$

を見積もることができる [1]．したがって，この関数 $h_P(u)$ を用いるとき，確率点

$$u = k_n \tag{11.6}$$

に関する直角三角形の三点の座標は，必ず

$$\begin{gathered}(0, h_P''(k_n)) = \big(0, \phi(k_n)\big), \\ (k_n, h_P''(k_n)) = \big(k_n, \phi(k_n)\big), \\ (k_n, h_P''(k_n) + k_n h_P'(k_n)) = \big(k_n, \phi(k_n) + k_n\Phi(k_n)\big)\end{gathered} \tag{11.7}$$

として維持される．

そこで，原点から確率点までの距離でもある k_n を正規化して考えるとき，常に標準正規分布の意味ある点を維持した直角三角形が構成され，このときの高さが確率 $\Phi(k_n)$ と等しいことがわかる．したがって，古典的な確率を意味するというよりも幾何学的にこのような特徴を持ち合わせていることを発見していたので，貴金属比の類似比に数学的にというよりも美を追求する形でこの特徴を応用している．したがって，原点を中心とする左右対称の確率分布の場合には，本研究で扱う $n = 12$ の特徴は示すことができることもご想像がつくはずである．

一方で，このような分布では原点 $k_{12} = 0$ がこのときに意味を持つことを示せるのだが，標準正規分布のように確率密度の頂上に位置する極めて特別な分布であることは示せないようである．そこに，長半径が

$$\sqrt{m_n} = \Phi(k_n)^{-1} \tag{11.8}$$

短半径が

$$\sqrt{m_n - 1} = \sqrt{n}\Phi(k_n) \tag{11.9}$$

となる同じ焦点 $(\pm 1{,}0)$ を有する楕円を用いながら，

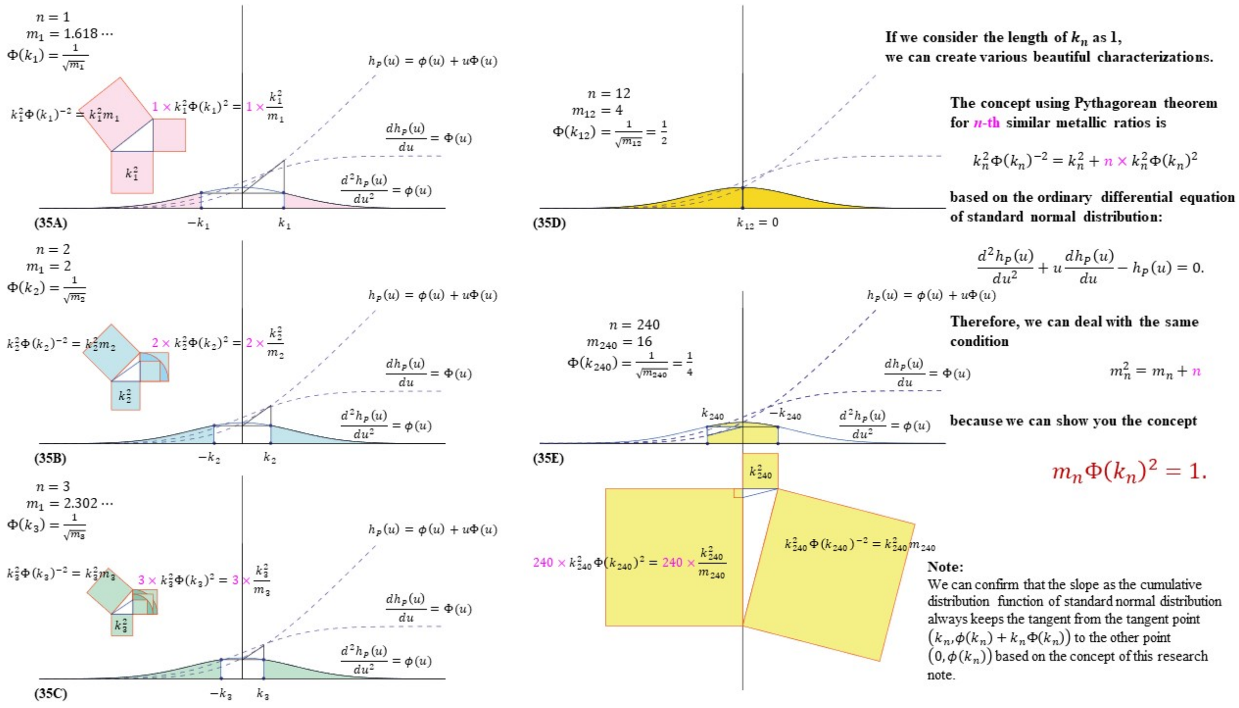


図 35　標準関分布を貴金属比の類似比と関連付けた特徴例図

Fig. 35 The concept of this research note about similar metallic ratios with standard normal distribution

$n = 1$ のときのケプラー三角形から始まり，$n = 12$ のときの正三角形に至るまでの特徴[2)]

$$m_n(m_n - 1) = n \qquad (11.10)$$

すなわち

$$\Phi(k_n)^{-2} = 1 + n\Phi(k_n)^2 \qquad (11.11)$$

に基づいて創作活動を試み，本研究ノートでは続報として標準正規分布の特徴を深堀した考察をまとめている．

以上，本研究で取り扱った貴金属比の類似比と標準正規分布との関連付けについて付録として記述しておく．

参考文献

1)　S. Nakanishi, et. al.,"Rotationally Symmetric Relations of Standard Normal Distribution Using Right Triangles, Circles, and Squares – Ordinary Differential Equations, Pythagorean Theorem, Equilateral Triangles, and Golden Ratio –"，不確実・不確定性の下における数理的意思決定の理論と応用，京都大学数理解析研究所講究録，No.2158，2020，171 頁-183 頁.

2)　中西真悟，"ピタゴラスの定理と標準正規分布に基づく螺旋および等角図の幾何学的考察 ― 三角形と正方形や貴金属比の類似比によるアプローチ ―"，大阪工業大学紀要，Vol. 65，No.　2，2021，103 頁- 127 頁.

3)　中西真悟，"標準正規分布の幾何学的対称性 ― 三平方の定理による累積確率評価 ―"，大阪工業大学イノベーションデイズ 2020,
https://www.research.oit.ac.jp/oitid/seeds/seeds/seeds-4444/ (accessed 2021-08-28).

4)　中西真悟，"標準正規分布の累積分布関数を傾きとする黄金比や貴金属比の類似比 (その 1) ケプラー三角形，ピタゴラスの定理,平方および代数螺旋の再考",
日本オペレーションズ･リサーチ学会 2021 年春季研究発表会アブストラクト集，(2-E-10),
https://www.orsj.or.jp/nc/2021s/wp-content/uploads/sites/4/2021/02/2021s-2-E-10.pdf，(accessed 2021-08-28).

5)　中西真悟，"標準正規分布の累積分布関数を傾きとする黄金比や貴金属比の類似比 (その 2) フィボナッチ数列の拡張とフラクタルを目指した等角螺旋デザイン",日本オペレーションズ･リサーチ学会 2021 年春季研究発表会アブストラクト集，(2-E-11),

https://www.orsj.or.jp/nc/2021s/wp-content/uploads/sites/4/2021/02/2021s-2-E-11.pdf, (accessed 2021-08-28).
6) S. Nakanishi, "Visualizations of discrete equiangular spirals based on similar metallic ratios using Pythagorean theorem and weighted Fibonacci sequences", 31st European Conference on Operational Research (EURO 2021),
https://www.euro-online.org/conf/admin/tmp/program-euro31.pdf, (accessed 2021-08-28)
7) 中西真悟, "貴金属比の類似比が奏でる数理情報デザイン ― 等角螺旋を目指したケプラー三角形とピタゴラスの定理と一般化されたフィボナッチ数列の協奏 ―",
大阪工業大学イノベーションデイズ 2021,
https://www.research.oit.ac.jp/oitid/seeds/seeds/seeds-10606/
(accessed 2021-09-07).
8) 中西真悟, "一般化フィボナッチ数列と二項定理を用いた貴金属比の類似比の幾何学的考察 -ガウス平面を応用した等角螺旋の等角写像デザイン-", 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2021 年秋季研究発表会アブストラクト集, (1-D-2),
https://orsj.org/nc2021f/wp-content/uploads/sites/2/2021/08/2021f-1-D-2.pdf, (accessed 2021-08-28).
9) 岩本誠一・江口将生・吉良知文, "黄金・白銀・青銅 --数と比と形と率と", 経済学研究, 九州大学経済学会, 74 巻 4 号, 2007-12, 1 頁-19 頁.
10) 影山正幸 et. al, 「安田正實教授退官記念集」, http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~yasuda/kinen2012.pdf, 2012, (accessed 2021-08-29).
11) "Golden ratio", Wikipedia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio,
(accessed 2020-09-15).
12) "黄金比", Wikipedia,
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%BB%84%E9%87%91%E6%AF%94, (accessed 2020-09-21).
13) Gary B. Meisner and Rafael Araujo, "The Golden Ratio:The Divine Beauty of Mathematics", 2018.
14) ゲイリー・B・マイスナー 著 (赤尾秀子 訳), 「黄金比: 秘められた数の不思議」, 創元社, 2019.
15) Alexey Stakhov, and Samuil Aranson, "Golden" Non-euclidean Geometry, The: Hilbert's Fourth Problem, "Golden" Dynamical Systems, And The Fine-structure Constant", World Scientific, 2016.
16) アルプレヒト ボイテルスパッヒャー, ベルンハルト ペトリ 著, (柳井浩 訳), 「黄金分割 ―自然と数理と芸術と―」, 共立出版, 2005.
17) フェルナンド・コルバラン 著, (柳井浩 訳), 「黄金比 美の数学的言語」, 近代科学社, 2019.
18) 柳亮, 「黄金分割 西洋の比例 ピラミッドからモダン・アートまで (新装版 初版)」, 美術出版社, 2012.
19) 柳亮, 「続 黄金分割 日本の比例 法隆寺から浮世絵まで (新装版 初版)」, 美術出版社, 2012.
20) 近藤滋, 「波紋と螺旋とフィボナッチ」, KADOKAWA, 2019.
21) アルフレッド・S・ポザマンティエ, イングマル・レーマン 著 (松浦俊輔 訳), 「不思議な数列フィボナッチの秘密」, 日経 BP, 2010
22) Stephen Ornes, "Math Art: Truth, Beauty, and Equations", Sterling Pub Co Inc, 2019.
23) R.A. ダンラップ 著, (岩永恭雄, 松井講介 訳), 「黄金比とフィボナッチ数」, 日本評論社, 2003.
24) 若原 龍彦, 「黄金比のふしぎ―図と数式で表す」, プレアデス出版 , 2010.
25) 谷克彦, 「美しい幾何学」, 技術評論社, 2019.
26) 「数学の世界 図形編 奥深き「カタチ」をめぐる数学」, 別冊 Newton, ニュートンプレス, 2018.
27) 「数学の世界 図形編 奥深き「カタチ」をめぐる数学 改定第 2 版」, 別冊 Newton, ニュートンプレス, 2020.
28) 「数の世界 数の神秘編 素数, 虚数, πなど, 数が織りなす美しい世界」, 別冊 Newton, ニュートンプレス, 2018.
29) 中村滋, 「フィボナッチ数の小宇宙 改訂版」, 日本評論社, 2008.
30) H. E. Huntley, "The Divine Proportion", Dover Publications, 1970.
31) SendPoints 著, (尾原美保 訳), 「ビジュアル・ハーモニー 黄金比、フィボナッチ数列を取り入れた、世界のグラフィックデザイン事例集」, ビー・エヌ・エヌ新社 , 2018.
32) マリオ・リヴィオ 著, (斉藤隆央 訳), 「黄金比はすべてを美しくするか?―最も謎めいた「比率」をめぐる数学物語」, 早川書房, 2012.
33) 牟田淳, 「デザインのための数学」, オーム社, 2010.
34) "貴金属比", Wikipedia,
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E8%B2%B4%E9%87%91%E5%B1%9E%E6%AF%94, (accessed 2020-09-22).
35) "Metallic mean", Wikipedia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Metallic_mean,
(accessed 2021-08-29)
36) "metallic ratio", rosettacode.org,
https://rosettacode.org/wiki/Metallic_ratios,

(accessed 2021-08-29).
37) Evelyn Lamb, "Meet the Metallic Means", https://blogs.scientificamerican.com/roots-of-unity/meet-the-metallic-means/, (accessed 2021-08-31)
38) Vera W. de Spinadel, " New smarandache sequences: The family of metallic means", https://vixra.org/pdf/1403.0507v1.pdf, 1997, (accessed 2021-08-29).
39) Vera W. de Spinadel, "The metallic means family and multifractal spectra", Nonlinear Analysis, Vol. 36, 1999, pp. 721 – 745.
40) Vera W. de Spinadel, , "The family of metallic means", https://vismath1.tripod.com/spinadel/, (accessed 2021-08-29).
41) C. E. Hretcanu and M. Crasmareanu, Metallic structures on Riemannian manifolds, Rev. Un. Mat. Argentina 54 (2013), no. 2, 15–27.
42) Francisco Martínez, María Moncayo, Jaydip Datta, "Mathematical disclosure: Metallic Means", https://www.researchgate.net/publication/339146174_MATHEMATICAL_DISCLOSURE_Metallic_Means, 2020, (accessed 2021-08-29)."
43) Mehmet Akif Akyol, "Remarks on metallic maps between Metallic Riemannian manifolds and constancy of certain maps", Honam Mathematical Journal, Vol, 41, No. 2, 2019, pp. 343–356. "
44) “代数螺旋”, Wikipedia, https://ja.wikipedia.org/wiki/%E4%BB%A3%E6%95%B0%E8%9E%BA%E6%97%8B, (accessed 2020-09-22).
45) “Archimedean spiral”, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Archimedean_spiral, (accessed 2020-09-15).
46) 三宅彩香,「螺旋の幾何学」, 兵庫教育大学学位論文, 2014.
47) “対数螺旋”, Wikipedia, https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%AF%BE%E6%95%B0%E8%9E%BA%E6%97%8B, (accessed 2020-09-15).
48) “Logarithmic spiral”, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithmic_spiral, (accessed 2020-09-15).
49) 「虚数がよくわかる 改訂第2版 2乗してマイナスになる不思議な数」, 別冊 Newton, ニュートンプレス, 2020.
50) "Pythagorean theorem", Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_theorem, (accessed 2021-08-29).
51) "ピタゴラスの定理", Wikipedia, https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%94%E3%82%BF%E3%82%B4%E3%83%A9%E3%82%B9%E3%81%AE%E5%AE%9A%E7%90%86, (accessed 2021-08-29).
52) 細矢治夫,「ピタゴラスの三角形とその数理」, 共立出版, 2011.
53) 中村義作, 阿邊恵一,「代数を図形で解く 直感でわかる数学の楽しみ」, 講談社ブルーバックス, 2000.
54) Ramin Takloo-Bighash, "A Pythagorean Introduction to Number Theory: Right Triangles, Sums of Squares, and Arithmetic", Springer, 2018.
55) ”白銀比”, Wikipedia, https://ja.wikipedia.org/wiki/%E7%99%BD%E9%8A%80%E6%AF%94, (accessed 2020-09-21).
56) “Silver ratio”, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Silver_ratio, (accessed 2020-09-22).
57) 桜井進, 「雪月花の数学」, 祥伝社, 2010.
58) 桜井進, 「感動する！数学」, PHP 文庫, 2009.
59) "ケプラー三角形", Wikipedia, https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%B1%E3%83%97%E3%83%A9%E3%83%BC%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%BD%A2, (accessed 2021-08-29).
60) “Kepler triangle”, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler_triangle, (accessed 2021-08-29).
61) "ヨハネス・ケプラー", Wikipedia, https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%A8%E3%83%8F%E3%83%8D%E3%82%B9%E3%83%BB%E3%82%B1%E3%83%97%E3%83%A9%E3%83%BC, (accessed 2021-08-29).
62) "Johannes_Kepler", Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler, (accessed 2021-08-29).
63) Kapusta, Janos, "The square, the circle, and the golden proportion: a new class of geometrical constructions", Forma, Vol. 19, 2004, pp. 293–313.
64) D.フラナリー 著, (佐藤 かおり 訳),「$\sqrt{2}$ の森とアンドリュー少年」, 丸善出版, 2012.
65) パウロ リーベンボイム 著, (吾郷孝視 訳),「我が数、我が友よ—数論への招待」, 共立出版, 2003.
66) 藤本佳久,「数列の幾何—複素力学系への橋渡し」, 森北出版, 1997.
67) ハンス・マグヌス エンツェンスベルガー 著, (丘沢静也 訳),「数の悪魔—算数・数学が楽しくなる 12 夜」, 2000.

68) Thomas Koshy, "Pell and Pell–Lucas Numbers with Applications", Springer, 2014.
69) Thomas Koshy, "Fibonacci and Lucas Numbers with Applications vol.1", 2017.
70) Thomas Koshy, "Fibonacci and Lucas Numbers with Applications vol.2", 2019.
71) V.K. Gupta, Yashwant K. Panwar and Omprakash Sikhwal, "Generalized Fibonacci Sequences", Theoretical Mathematics & Applications, Vol.2, No.2, 2012, pp. 115-124.
72) A.F. Horadam, Jacobsthal Representation Numbers, The Fibonacci Quarterly, Vol. 34, 1996, pp. 40–54.
73) F. Koken, D. Bozkurt, "On the Jacobsthal Numbers by Matrix Methods", International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, Vol. 3, No. 13, 2008, pp. 605-614.
74) A. F. Horadam, "A Generalized Fibonacci Sequence", The American Mathematical Monthly, Vol. 68, No. 5, 1961, pp. 455-459.
75) D. Kalman and R. Mena, "The Fibonacci Numbers-Exposed", Mathematics Magazine, Vol. 76, No. 3, 2003, pp. 167-181.
76) S. T. Klein, "Combinatorial Representaion of Generalized Fibonacci Numbers", The Fibonacci Quarterly, Vol. 29, 1991, pp. 124-134.
77) T. Amdeberhan, X. Chen, V. H. Moll, B. E. Sagan, "Generalized Fibonacci polynomials and Fibonomial coefficients", Annals of Combinatorics, Vol. 18, 2014, pp. 541-562.
78) V. E. Hoggatt, M. Bicknell, "Generalized Fibonacci polynomials", Fibonacci Qartelly, Vol. 11, No. 5, 1973, pp. 457-465.
79) 木村俊一，「連分数の不思議」，講談社ブルーバックス，2012.
80) "連分数", Wikipedia, https://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%80%A3%E5%88%86%E6%95%B0, (accessed 2021-08-31).
81) "Continued fraction", Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Continued_fraction, (accessed 2021-08-31).
82) "多重根号", Wikipedia, https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%A4%9A%E9%87%8D%E6%A0%B9%E5%8F%B7, (accessed 2021-08-31).
83) "Nested radical", Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Nested_radical, (accessed 2021-08-31).
84) "二項定理", Wikipedia, https://ja.wikipedia.org/wiki/%E4%BA%8C%E9%A0%85%E5%AE%9A%E7%90%86, (accessed 2021-09-08).
85) "Binomial theorem", Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_theorem, (accessed 2021-09-08).
86) "パスカルの三角形", Wikipedia, https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%91%E3%82%B9%E3%82%AB%E3%83%AB%E3%81%AE%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%BD%A2, (accessed 2021-09-08).
87) "Pascal's triangle", Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_triangle, (accessed 2021-09-08).
88) "複素平面", Wikipedia https://ja.wikipedia.org/wiki/%E8%A4%87%E7%B4%A0%E5%B9%B3%E9%9D%A2, (accessed 2021-09-08).
89) "Complex plane", Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Complex_plane, (accessed 2021-09-08).
90) 桑田孝泰，前原潤，「複素数と複素数平面」，共立出版，2017.
91) "オイラーの公式", Wikipedia, https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%AA%E3%82%A4%E3%83%A9%E3%83%BC%E3%81%AE%E5%85%AC%E5%BC%8F, (accessed 2021-09-08).
92) "Euler's formula", Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_formula, (accessed 2021-09-08).
93) "ド・モアブルの定理", Wikipedia, https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%89%E3%83%BB%E3%83%A2%E3%82%A2%E3%83%96%E3%83%AB%E3%81%AE%E5%AE%9A%E7%90%86, (accessed 2021-09-08).
94) "De Moivre's formula", Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/De_Moivre%27s_formula, (accessed 2021-09-08).
95) "楕円", Wikipedia, https://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%A5%95%E5%86%86, (accessed 2021-09-08).
96) "Ellipse", Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse, (accessed 2021-09-08).
97) 遠山啓，矢野健太郎，「図形と式　解析幾何入門」，講談社，1979.
98) 小林昭七，「円の数学」，裳華房，1999.
99) "幾何平均", Wikipedia, https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%B9%BE%E4%BD%95%

E5%B9%B3%E5%9D%87, (accessed 2021-09-08).
100) "Geometric mean", Wikipedia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_mean,
(accessed 2021-09-08).
101) サイモン・ベニンガ 著，（ファイナンシャル・モデリング研究会 訳)，「ファイナンシャル・モデリング」，清文社，2005.
102) Kenneth Falconer, "Fractals: A Very Short Introduction", Oxford University Press, 2013.
103) ケネス ファルコナー 著，(服部久美子 訳)，「フラクタル」，岩波書店，2020.
104) 中易秀敏，坪野博宣，前田多章，前川善一郎，「情報科学 ヒューマン編」，共立出版，2002.
105) "フラクタル", Wikipedia,
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%95%E3%83%A9%E3%82%AF%E3%82%BF%E3%83%AB,
(accessed 2021-09-08).
106) "Fractals", Wikipedia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Fractal,
(accessed 2021-09-08).
107) 亀島鉱二，「計算の科学」，大阪工業大学講義ノート，2000.
108) "再帰", Wikipedia,
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%86%8D%E5%B8%B0,
(accessed 2021-09-08).
109) "Recursion", Wikipedia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Recursion,
(accessed 2021-09-08).
110) "白金比", Wikipedia,
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E7%99%BD%E9%87%91%E6%AF%94, (accessed 2021-09-08).
111) Richard A. Johnson, Dean W. Wichern 著，西田俊夫 訳，「多変量解析の徹底研究」，現代数学社，1992.
112) "Fibonacci number", Wikipedia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number#Binet's_formula, (accessed 2021-09-08).
113) "フィボナッチ数", Wikipedia,
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%95%E3%82%A3%E3%83%9C%E3%83%8A%E3%83%83%E3%83%81%E6%95%B0, (accessed 2021-09-08).
114) 松田修，津山工業高等専門学校数学クラブ，「11からはじまる数学」，東京図書，2008.
115) "Jacobsthal number", Wikipedia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobsthal_number,
(accessed 2021-09-08).
116) 加藤文元,「数学する精神 正しさの創造，美しさの発見 増補版」，中公新書，2007.
117) Fonda, "A logarithmic spiral in the complex plane interpolating between the exponential and the circular functions",
https://dmi.units.it/~fonda/p2018_Fonda_preprint.pdf,
(accessed 2021-09-08).
118) G. Anatriello, G. Vincenzi, "Logarithmic spirals and continue triangles", Journal of Computationnal and Applied Mathematics, Vol. 296, 2016, pp. 127-137.
119) B.R. Parodi, "Generalized Fibonacci Spiral",
https://arxiv.org/abs/2004.08902, 2020, pp. 1-22
(accessed 2021-09-08).
120) A. Yuenger, "Ratios Proportions Progressions & Spirals – Fibonacci series, Golden mean and Fractals -", 個人出版, 2020.
121) "床関数と天井関数", Wikipedia,
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%BA%8A%E9%96%A2%E6%95%B0%E3%81%A8%E5%A4%A9%E4%BA%95%E9%96%A2%E6%95%B0,
(accessed 2021-09-13)
122) 吉田美穂子，"分数の正多角形と対数螺旋の表出効果"，梅花女子大学看護保健学部紀要，No. 7, 2017, pp.35-43.
123) "三角関数", Wikipedia,
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%89%E8%A7%92%E9%96%A2%E6%95%B0#%E5%8A%A0%E6%B3%95%E5%AE%9A%E7%90%86, (accessed 2021-09-08).
124) "Trigonometric function", Wikipedia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Trigonometric_functions,
(accessed 2021-09-08).
125) N. J. Widberger, "Divine Proportions: Rational Trigonometry to Universal Geometry", Wild Egg Pty Ltd, 2005.
126) "逆三角関数", Wikipedia,
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%80%86%E4%B8%89%E8%A7%92%E9%96%A2%E6%95%B0,
(accessed 2021-09-08).
127) "Inverse trigonometric functions", Wikipedia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Inverse_trigonometric_functions,
(accessed 2021-09-08).
128) "等角写像", Wikipedia, , (accessed 2021-09-08).
129) "Conformal map", Wikipedia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Conformal_map,
(accessed 2021-09-08).

130) P. K. Kythe, "Conformal mappings and applications", CRC Press, 2019.
131) “ウィトルウィウス的人体図”, Wikpedia, , https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%A6%E3%82%A3%E3%83%88%E3%83%AB%E3%82%A6%E3%82%A3%E3%82%A6%E3%82%B9%E7%9A%84%E4%BA%BA%E4%BD%93%E5%9B%B3, (accessed 2021-09-14)
132) “Vitruvian man”, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Vitruvian_Man, (accessed 2021-09-14).
133) “Google Scholar”, Wikipedia, Google Scholar - Wikipedia, (accessed 2021-09-12).
134) S. Nakanishi, and M. Ohnishi, “Symmetric Relations and Geometric Characterizations about Standard Normal Distribution by Circle and Square”, The 15th International Symposium on Econometric Theory and Applications (SETA2019, 2019.6.1-2), Osaka University, Toyonaka, Osaka Prefecture, Japan, 第 15 回計量経済学の理論と応用に関する国際シンポジウム提出原稿，大阪大学豊中キャンパス, http://www.oit.ac.jp/center/~nakanishi/english/SETA2019-06-02Nakanishi_modified_paper.pdf (accessed 2021-09-22).
135) S. Nakanishi, and M. Ohnishi, “Geometric Characterizations of Standard Normal Distribution – Two Types of Differential Equations, Relationships with Square and Circle, and Their Similar Characterizations －”，不確実性の下での意思決定理論とその応用：計画数学の展開，京都大学数理解析研究所講究録, No.2078, 2018, 58 頁-64 頁.
136) S. Nakanishi, and M. Ohnishi, “Geometric Characterizations of Standard Normal Distribution – Two Types of Differential Equations, Relationships with Square and Circle, and Their Similar Characterizations － (修正版)”, http://www.oit.ac.jp/center/~nakanishi/RIMS2078-10(Modified-Version-on-November-22-2018).pdf.
137) イアン・スチュアート,「もっとも美しい対称性」，日経 BP 社，(2008).
138) Ian Stewart, “Why Beauty Is Truth: The History of Symmetry”, Basic Books, (2007).
139) イアン・スチュアート著（川辺治之 訳)，「対称性（不変性の表現）」，丸善出版，(2017).
140) 新日本聖書刊行会，「聖書　新改訳 2017」，いのちのことば社，2018.
141) 三田一郎，「科学者はなぜ神を信じるのか コペルニクスからホーキングまで」，講談社ブルーバックス，2018.
142) Mario Livio, (千葉敏生 訳),「神は数学者か？ 数学の不可思議の歴史」，早川書房，2017