工程管理計画

　プロジェクトの大規模化や複雑化が増すとともに時間の価値増大により、作業工程のシステマティックな対応が必要になってきたことから PERT(Program Evaluation and Review Technique)や CPM(Critical Path Method)が開発され、これらは工程管理上重要な手段として使われている。PERT は，主として時間に着目する日程計画法であり、ＣＰＭは時間と費用に着目した日程計画法である。

１　工程管理とネットワーク

（１）アローダイヤグラム

　土木・建築のプロジェクトは多くの工程から成り立っている．各々の行程を作業(job)と呼ぶ。各作業を一定の表記（ここでは□）で示し，その前後の作業との接続関係を矢印で表したものを，フローダイヤダラム(flow　diagram）といい、作業を開始点ｉと終了点ｊを結ぶ矢印(アーク)で示し、作業の前後関係を表したものをアローダイヤグラム(arrow diagram)という。

○に数字が入ったものを結合点（ノード（node)またはイベント（event))、作業（例えばＡは(i,j)と表示する）はアクティビティ（activity）でと呼ぶ。矢印のついていない状態をリンク（link)という．ネットワークとはアークまたはリンクに数字がついたものであり、アローダイヤグラムはネットワークである．ネットワークでアークの方向に従って同じアークを複数回通過することなく，最終結合点まで辿っていく一連の道筋を経路又はパス(path)という。プロジェクトは多くの作業を順序立てて進めることで完成するが、某作業とこれの先行作業及び後続作業がリスト化されていれば、一定の整理作業によりフローダイアグラムおよびアローダイヤグラムを作成することができる。この作成手順については省略する。

（２）表示の規則

・２つの結合点を結ぶ経路は一本に限る。つまり結合点ｉとｊを結ぶ作業は（ｉ,j）で示され、ｉ＜j である。

・一つの結合点に入る作業は全て同じ後続作業をもち、一つの結合点から出て行く作業は全て同じ先行作業をもつ。

・同時作業又は上記のように一つの結合点から複数作業の出入りがあって独立作業や従属作業を表示する場合にはダミー作業（架空の作業で所要時間等はゼロ）を使って表示する。

２　PERT の計算方法

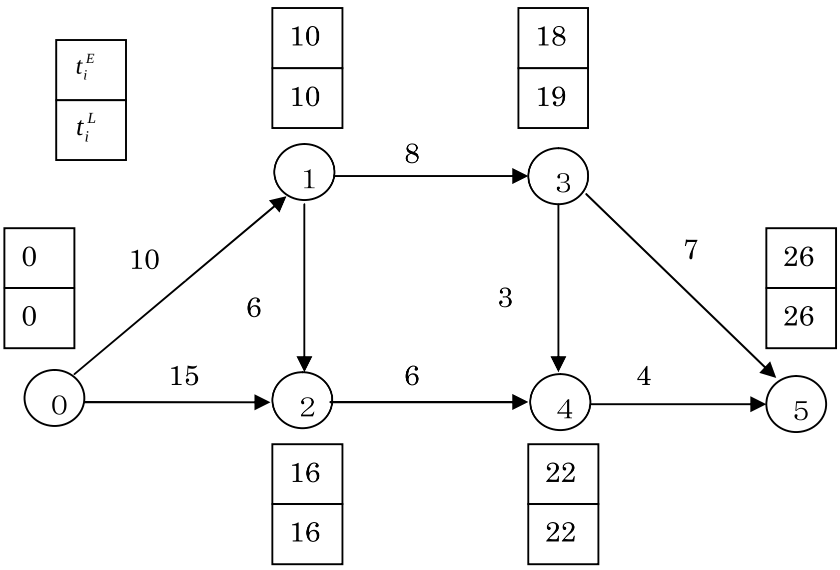
　作業(i,j)の所要時間を D_{ij}、結合点ｉの作業開始時刻を結合点時刻と呼んで t_i で表し、最

早結合点時刻をt_i^Eで示す。また、工期 T を順守するにあたり各結合点を最も遅らせたとしてもいつまでに完了させればよいか示す時刻を最遅結合点時刻t_j^Lで示す。開始点と最終結合点をそれぞれ$0, n$とすると、結合点時刻は次のように計算される。

$$\begin{cases} t_0^E = 0 \\ t_i^E = \max\limits_k (t_k^E + D_{ki}), \quad i = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_n^L = T \quad (= t_n^E) \\ t_j^L = \min\limits_k (t_k^L - D_{jk}), \quad j = n-1,\cdots,1,0 \end{cases}$$

図－　は PERT の計算例を示したものである。結合点（ノード）を〇で表示し内部には結合点番号が示されている。また各ノードには 2 段の□内に数値が示されているが、これは上段にt_i^E、下段にt_j^Lを示したものである。上式の計算結果となっていることを確認されたい。なお作業を示す矢印に記載の数値は所要時間D_{ij}を示す。



作業(i,j)において、t_j^Lからt_i^Eを引いた値は、この作業で使用可能な最大時間を表し、この時間をTA_{ij}で表示しトータル使用可能時間(total　available　time)という。

$TA_{ij} = t_j^L - t_i^E$

また、$TA_{ij} = D_{ij}$のときはその作業に全く余裕がないことになり、この作業をクリティカルな作業という。プロジェクトの開始点から終了点に至る一続きの作業を経路又はパスと呼ぶが、パスを構成する全ての作業がクリティカルな作業となっているとき、クリティカルパスと呼ぶ。ネットワークにおいてクリティカルパスは必ず 1 本以上存在する。

作業工程の管理では、各作業の開始時刻と終了時刻を把握することが基本であり、次の４種類の時刻を定義し日程を計算していく。

1)最早開始時刻（earliest　starting　time）ES_{ij}

その作業(i,j)を最も早く開始可能な時刻

$ES_{ij} = t_i^E$

2)最早終了時刻（earliest　finishing　time）EF_{ij}

その作業(i,j)を最も早く終了可能な時刻

$EF_{ij} = ES_{ij} + D_{ij} = t_i^E + D_{ij}$

3)最遅完了時刻(latest　finishing　time)　LF_{ij}

その作業(i,j)の完了を最大遅延できる時刻

$LF_{ij} = t_j^L$

4)最遅開始時刻(latest　starting　time)　LS_{ij}

その作業(i,j)を最大遅延して開始出来る時刻

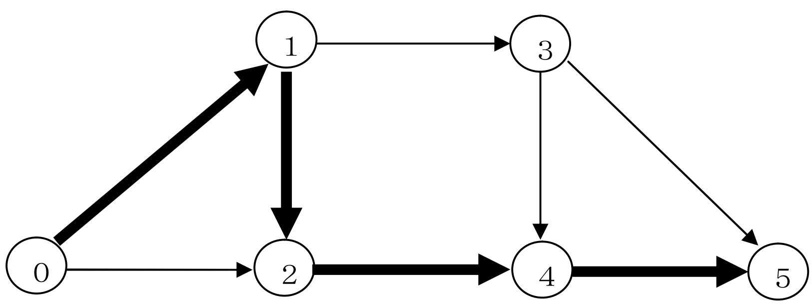
$LS_{ij} = LF_{ij} - D_{ij} = t_j^L - D_{ij}$

また、作業(i,j)が $TA_{ij} - D_{ij} > 0$ のとき、余裕時間を有しており、これをトータルフロート TF_{ij} と呼ぶ。$TF_{ij} = 0$ のときクリティカルな作業となる。

$TF_{ij} = TA_{ij} - D_{ij} = (t_j^L - t_i^E) - D_{ij} = LF_{ij} - EF_{ij}$

作業(i,j)においてトータルフロートを全て使ってしまうと最早結合点時刻 t_j^L で開始することが補償されなくなるので、t_j^L で開始できるためには次のフリーフロート(free　float) FF_{ij} を余裕時間とする必要がある。

$FF_{ij} = (t_j^E - t_i^E) - D_{ij} = ES_{jk} - EF_{ij}$

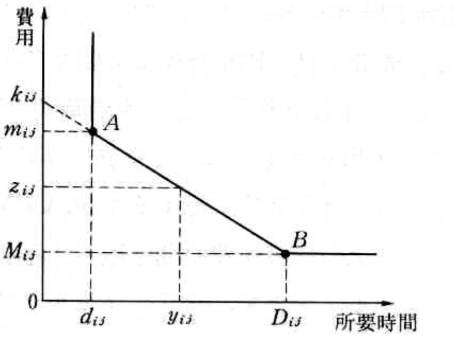


３．CPM

(1)

工事費は直接費（人件費や資材費、機会設備費など）のほか間接費（管理費や共通する配賦費など）や機会費用（滅失利益（このプロジェクトを遂行するにあたり選択されなかった選択肢のうちで 最善の価値）など）で構成されるが、現実にはその多くが直接費が大部分を占めることが多いので直接費のみを対象にして考えても問題はない。

直接費は作業時間を短くするほど増加することが殆どであるため、CPM の計算を簡単にするため作業所要時間と経費の関係を図　のように関係づけて考えることが多い。つまり作業(i,j)の作業所要時間は通常は標準所要時間が D_{ij} で行われるものの、急ぐ場合には特急所要時間は d_{ij} まで短縮可能であるとする。また、この作業所要時間を標準所要時間より長くすることは可能であるが費用は変わらないものとし、特急所要時間より短くすることは不可能（費用は無限大）である。標準所要時間に対する費用を M_{ij}、特急所要時間に対する費用を m_{ij} とすると、作業所要時間 y_{ij} は $d_{ij} \le y_{ij} \le D_{ij}$ の範囲において行われることになり、その時の費用 z_{ij} は次式で与えられる。なお C_{ij} は費用勾配と呼ばれ、作業を 1 日短縮する場合の増加費用を表す。



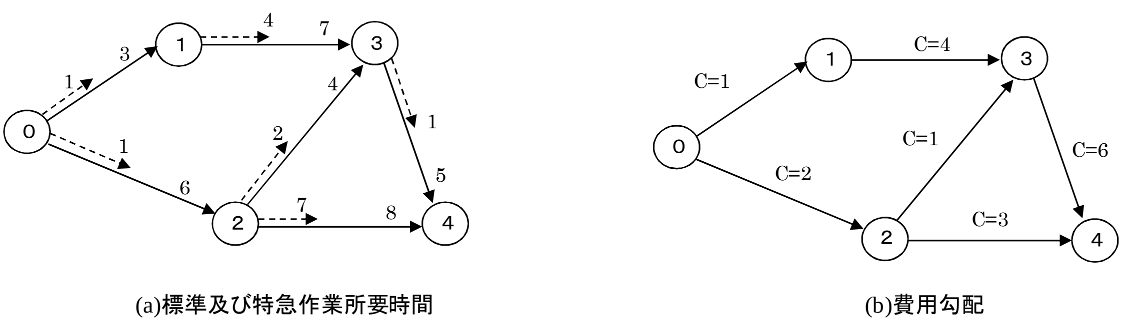
費用曲線

$$z_{ij} = -C_{ij} y_{ij} + k_{ij}$$

$$C_{ij} = \frac{m_{ij} - M_{ij}}{D_{ij} - d_{ij}}, \quad k_{ij} = \frac{m_{ij} D_{ij} - M_{ij} d_{ij}}{D_{ij} - d_{ij}}$$

(2)作業時間の短縮

例をもとに説明しよう。図ー　のアローダイアグラムの(a)に各作業の標準所要時間（実線）と特急所要時間（破線）が示されている。(b)は CPM 計算に必要な諸元（表ー　）から計算された費用勾配が示されている。

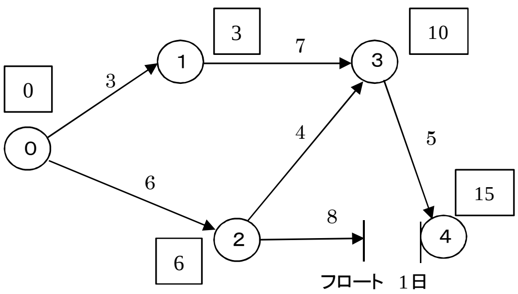


(a)標準及び特急作業所要時間　　(b)費用勾配

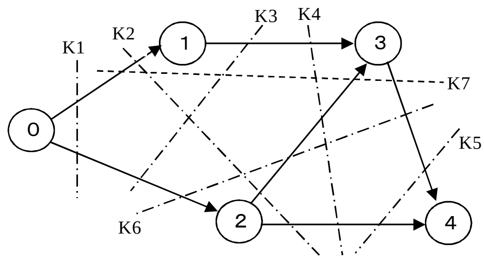
図ー　アローダイアグラム

		表ー　プロジェクトの諸元				
i	j	D_{ij}（日）	M_{ij}（万円）	d_{ij}（日）	m_{ij}（万円）	C_{ij}（万円／日）
0	1	3	20	1	22	1
0	2	6	30	1	40	2
1	3	7	20	4	32	4
2	3	4	10	2	12	1
2	4	8	40	7	43	3
3	4	5	20	1	44	6

工期短縮のためには、クリティカルパス上の作業を短縮することになるが、その際にはクリティカルパス上にない作業のフロートも一緒に考慮しなければならない。このフロートには先述のトータルフロートとフリーフロートがあるが、トータルフロートを使い切ってしまうと以後の作業が最早結合点時刻で開始できない場合が生じるので、フリーフロートを用いて計算を行う。図ー　は標準所要時間に対するフリーフロートを求めたもので作業(2,4)が１日出てくる。



図ー　標準所要時間と最早結合点時刻及びフリーフロート



図ー　作業短縮断面

作業(i,j)のフリーフロートを標準所要時間と特急所要時間に対してそれぞれ下式にて表すことにする。

$$\mathbf{ff1_{ij}} = t_j^E - t_i^E - D_{ij}$$

$$\mathbf{ff2_{ij}} = t_j^E - t_i^E - d_{ij}$$

なお ff2≧0 である。

また工期が短縮されるためには、結合点の集合をプロジェクトの始点側と終点側に分離する断面における作業集合について短縮しなければならない。図ー　は作業短縮断面を示したものであり K1 から K6 の６断面が存在する。K7 は始点側と終点側を分離するものではないため正しくない断面である。

1)計算ステップ１

図－　は、ff1 と ff2 を示したものと、短縮すると費用がかかる作業（ff1≦0）を示したものである（よって作業(2,4)にはアークが非表示となっている）。各作業短縮断面の費用勾配（万円／日）は次のようになっている。なお単位は省略する（以下同じ）。

K1＝3

K2＝5

K3＝6

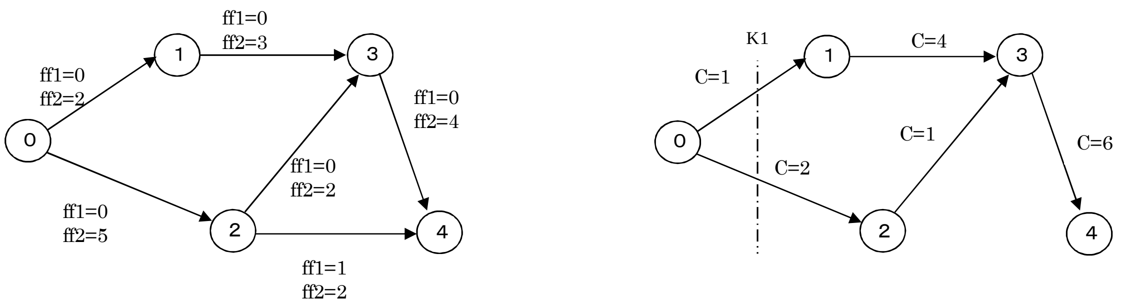
K4＝5

K5＝6

K6＝8

この中で最小の費用となる作業短縮断面は K3 である。なお K6＝8 については、作業(2,3)は作業の方向が始点側の結合点集合に向かっており、既存のクリティカルパス上の所要時間を常に等しく保つ必要から短縮日数分だけ延ばす必要がある。つまりルート○→①→③と○→②→③の間、ルート②→③→④と②→④の間の時間が等しくなるようにしなければならず、作業(0,2)と作業(3,4)を x 日短縮するのであれば作業(2,3)は x 日延ばさなければならない。但し費用はそのままで変化しないから費用勾配は 0 である。よって K6 は作業(0,2)と作業(3,4)の費用勾配の和として 8 である。

短縮時間は、作業短縮断面上の各作業について、ff1≧0 の場合は ff1 を、ff1≦0 の場合は ff2 を、それぞれ着目してこれらの値の中の最小値を採用する。断面 K1 の短縮時間は 2 日である。よって短縮に要する費用は 3 万円／日×２日＝６万円ということになる。



図－　計算ステップ１のff1とff2及び工期短縮断面

2)計算ステップ２

ステップ１で K1 断面の作業を 2 日短縮したので、これらの作業の ff1 と ff2 を 2 日減じる。これによって作業(0,1)は ff2＝0 となり特急所要時間までの余裕がなくなったことから費用 C＝∞となり、この作業を含む工期短縮断面は考えない。残りの作業集合に対する工期短縮断面は次のようになる。

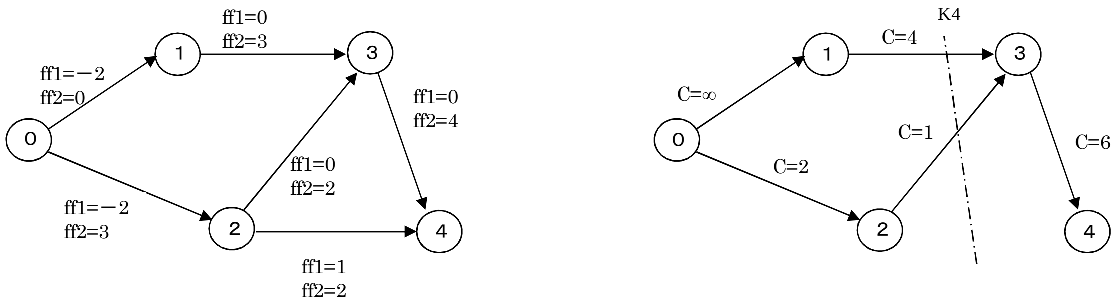
K3＝6

K4＝5

K5＝6

K6＝8

K4＝5 が最小となっているので、ここで工期を短縮する。短縮日数は作業(2,4)の ff1＝1 が最小なので 1 日である。よって短縮に要する費用は 5 万円／日×1 日＝5 万円ということになる。



図－ 計算ステップ2のff1とff2及び工期短縮断面

3)計算ステップ 3

ステップ 2 で K4 断面の作業を 1 日短縮したので、これらの作業の ff1 と ff2 を 1 日減じる。これによって作業(2,4)は ff1＝0 となりフリーフロートのない作業となる。作業集合に対する工期短縮断面は次のようになる。

K3＝6

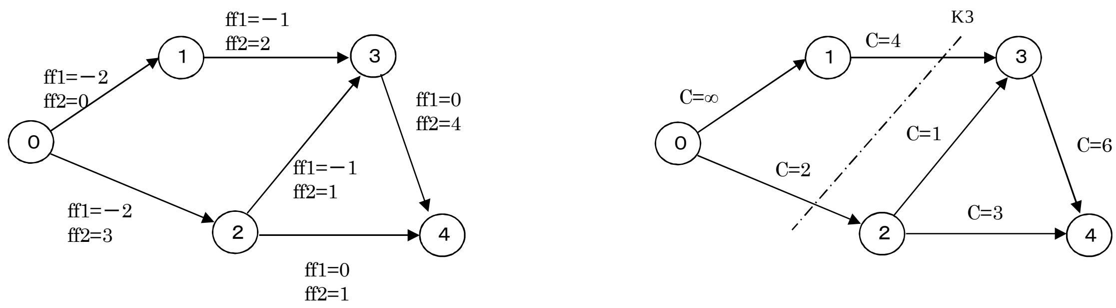
K4＝8

K5＝9

K6＝7

K6＝7 については、作業(2，3)が始点側の結合点集合に向かう作業であり工期短縮のためには作業時間を伸長する必要があるが、ff1＝－1 と既に標準所要時間から特急所要時間までの費用付き余裕時間を利用しており、これを返上することになる（いわゆる費用が戻ってくる）ためである。工期短縮日数を検討する場合、作業短縮断面に逆方向の作業があって、これの ff1 が負値の場合には、この値の絶対値が先の工期短縮日数として着目する対象となる。

ここでは K3＝6 が最小なので、ここで工期を短縮する。短縮日数は作業(1,3)の ff2＝2 が最小なので 2 日である。よって短縮に要する費用は 6 万円／日×2 日＝12 万円ということになる。



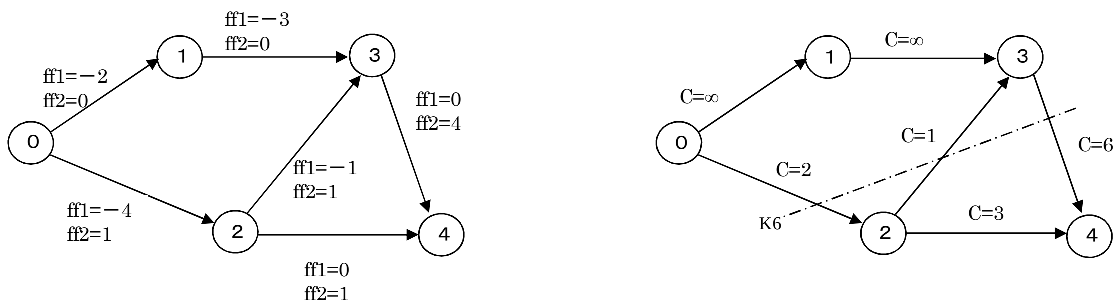
図ー　計算ステップ3のff1とff2及び工期短縮断面

4)計算ステップ４

ステップ３で K3 断面の作業を２日短縮したので、これらの作業の ff1 と ff2 を２日減じる。これによって作業(1,3)は ff2＝0 となり特急所要時間までの余裕がなくなったことから費用 C＝∞となり、この作業を含む工期短縮断面は考えない。残りの作業集合に対する工期短縮断面は次のようになる。K6＝7 の計算過程はステップ４で述べた。

K5＝9

K6＝7



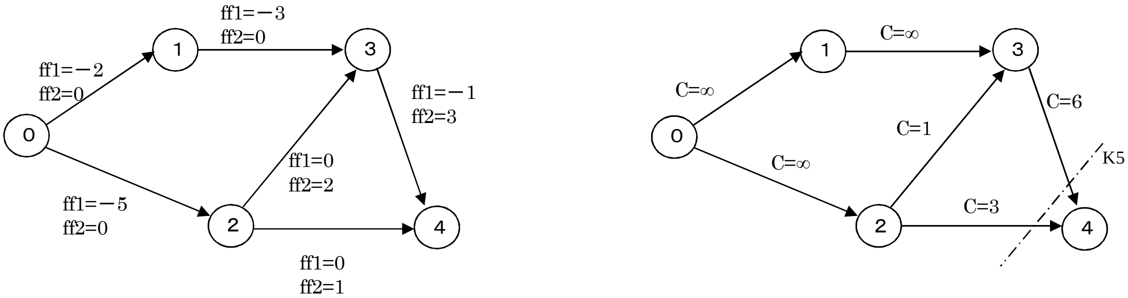
図ー　計算ステップ4のff1とff2及び工期短縮断面

K6＝7 が最小となっているので、ここで工期を短縮する。短縮日数は作業(2,4)の ff1＝－1 に着目し、１日である。よって短縮に要する費用は 7 万円／日×１日＝７万円ということになる。

5)計算ステップ５

ステップ４で K6 断面の作業を１日短縮したので、作業（0,2）と作業(3,4)の ff1 と ff2 を１日減じ、作業(2,3)は ff1 と ff2 に１日加算する。作業(0,2)は ff2＝0 となり特急所要時間までの余裕がなくなったことから費用 C＝∞となり、この作業を含む工期短縮断面は考えない。残りの作業集合に対する工期短縮断面は次のようになる。

K5＝9

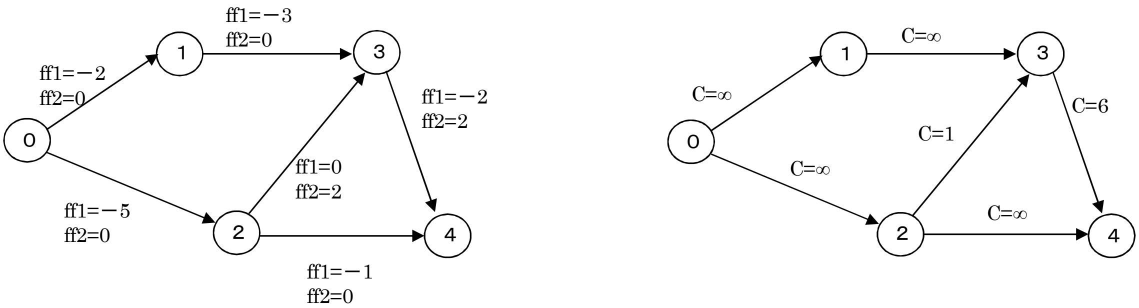


図ー 計算ステップ5のff1とff2及び工期短縮断面

K5＝9 のみとなっているので、ここで工期を短縮する。短縮日数は作業(2,4)の ff2＝1 に着目し、１日である。よって短縮に要する費用は 9 万円／日×１日＝９万円ということになる。

6)計算ステップ６

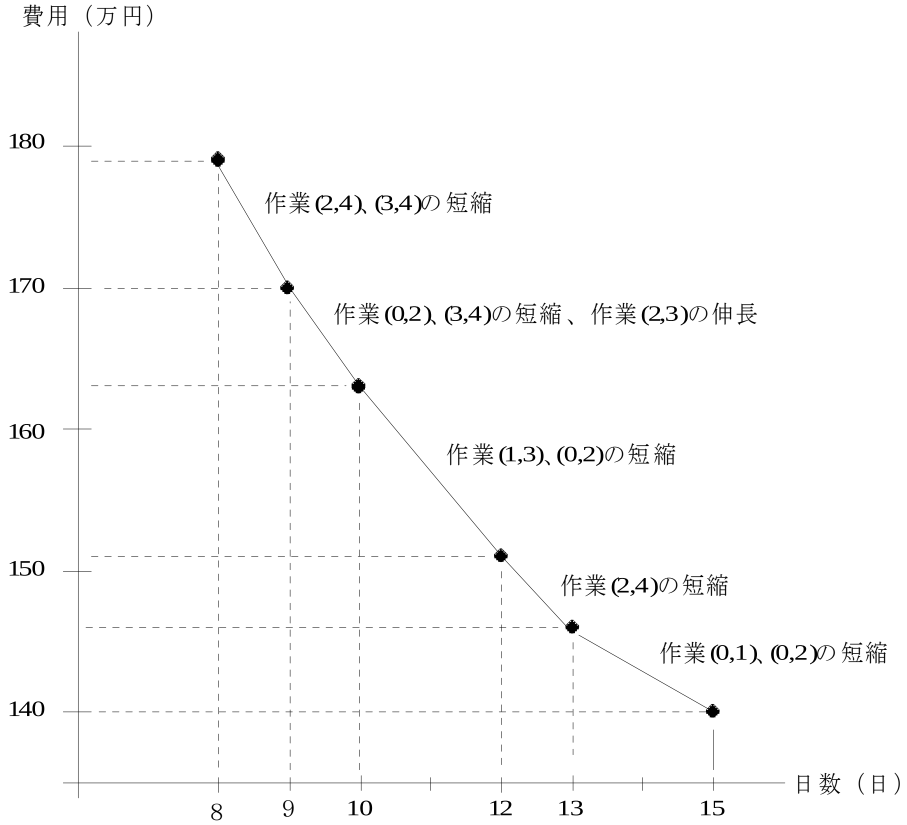
ステップ５で K5 断面の作業を１日短縮したので、作業（2,4）と作業(3,4)の ff1 と ff2 を１日減じる。作業(2,4)は ff2＝0 となり特急所要時間までの余裕がなくなったことから費用 C＝∞となる。



図ー 計算ステップ6のff1とff2及び工期短縮断面

殆どの作業の費用勾配が C＝∞となり、作業(2,3)と作業(3,4)が短縮できそうであるが、しかし工期短縮断面は存在しないため、工期短縮のための計算作業は終了となる。

以上より、全体の工期短縮日数とこれに要する費用増加は 7 日で 39 万円となる。各計算ステップの短縮日数とコスト増加の関係をみたものが図―　である。この図をプロジェクト費用曲線という。各作業を標準所要時間で行うと工期 15 日の費用 140 万円であり、増加費用の小さい順に工期を短縮して行く場合の総費用がわかる。例えば 140 万円から 20 万円増の 160 万円までの費用増しか許されなかった場合は、3 日間は短縮可能ということになる。



図―　　プロジェクト費用曲線