確率と統計

１．不確定事象と確率

ある事柄が起こる確からしさを表す数量を確率といい、これの平均値などを確率的パラメータという。また考察の対象としている事柄を事象と呼ぶ。確率を導入する背景には、事象に幾つかの不確定要素を含むためであり、これの具体的要素（例えば建設現場での建設機械の故障の生起や故障台数、上水道用水の使用量や不足量、不足の発生頻度など）を不確定事象と呼ぶ。不確定事象に対して確率や確率的パラメータを用いることにより、判断や現象のモデル化が行えるようになる。

（１）確率の定義

１）事象の関係と用語

・和事象：A または B が起こるという事象　$A \cup B$

・積事象：A と B が同時に起こるという事象(A かつ B)　$A \cap B$

・部分事象：　A が起こるならば B が必ず起こる場合(A は B に含まれる)　$A \subset B$

・余事象：全事象に対する以外のすべての事象　$\overline{A}$

・空事象：起こりえない事象　Φ

・排反：A と B が同時に起こることがない場合　$A \cap B = \Phi$

２）確率の定義と３公理

【公理１】確率は、必ず 0 以上 1 以下となる　$\mathbf{0 \le P(E) \le 1}$

【公理２】全事象Ωの起こる確率は１　$\mathbf{P(\Omega) = 1}$

空集合Φとなる確率は０　$\mathbf{P(\Phi) = 0}$

【公理３】排反事象 A, B に対しては、$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

余事象を $\mathbf{\overline{A}}$ とすると $\mathbf{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$

事象 A, B が排反でない場合 $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

確率は、標本空間の性質によって先験的に定まっているものと考える。統計は、標本空間の性質が未知の場合などで観測データから確率を推定することなどを主な狙いとする。実験(試行)を n 回繰り返して，そのうち A 　が出現する回数を k とする.

A の出現確率：$\mathbf{P\{A\} = \lim_{n \to \infty} \frac{k}{n}}$ と書く。

３）独立と従属、条件付き確率

・条件付き確率：A が起こったという条件の下で B が起こる確率　$\mathbf{P(B|A)}$

$\mathbf{P(B|A) = P(A \cap B) / P(A)}$　, $\mathbf{P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)}$（乗法定理）

$\mathbf{P(A \cap B) \equiv P(A \cdot B)}$

・独立:A が起こったという条件の下で B が起こることがない場合　$\mathbf{P}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\mathbf{P}(\mathbf{A})\times\mathbf{P}(\mathbf{B})$

$\mathbf{P}(\mathbf{B}|\mathbf{A})=\mathbf{P}(\mathbf{B})$ 又は　$\mathbf{P}(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})=\mathbf{P}(\mathbf{B})\cdot\mathbf{P}(\mathbf{A})$

・従属：事象どうしが独立でない場合　$\mathbf{P}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\neq\mathbf{P}(\mathbf{A})\times\mathbf{P}(\mathbf{B})$

４）ベイズ(Bayes)の定理

$\Omega=\sum_{i=1}^{n}A_i$ で A_i, A_j　$(i\neq j)$ が排反のとき

$$P(A_k|B)=\frac{P(A_k\cdot B)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i\cdot B)}=\frac{P(A_k)\cdot P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\cdot P(B|A_i)}$$

$\mathbf{P}(\mathbf{A}_i|\mathbf{B})$：事後確率

$\mathbf{P}(\mathbf{A}_i)$：事前確率

２．確率分布

標本のある事象（例えば、建設機械の故障の有無とか故障数など）の出現確率を考えるときに、この事象に充てる数値（例えば故障の有無で有を「１」に無を「０」にし、故障数はそのまま数を用いるなど）を X などの文字を使用して、確率を表現するための変数ということで、この X を確率変数という。そして、X の出現確率を $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ で表す。
実際に事象 i が生じた値を x_i とおくと（x_i は確率変数 X の実現値という）、$\mathbf{P}(\mathbf{X}=\mathbf{x}_i)$ を $\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)$ とおくとき、これを確率関数といい、この関数を X の確率分布と呼ぶ。

また、$\mathbf{P}(\mathbf{x}_j\leq\mathbf{X}\leq\mathbf{x}_k)=(\sum_{i=j}^{k}\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)or\int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_i}\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}=)F(\mathbf{x})$ を累積分布関数または単に分布関数という。

なお、$\sum_{i=j}^{k}\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)$ は離散形で $\int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_i}\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}$ は連続形である。

（１）期待値（平均値）、分散、モーメント

モーメントは下式で定義する。期待値、分散などはモーメントに属することが理解できるであろう。

離散形：$\sum_{\mathbf{k}=-\infty}^{\infty}\mathbf{k}^{\mathbf{i}}\mathbf{p}(\mathbf{k})$

連続形：$\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{x}^{\mathbf{i}}\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}$

1)期待値（平均値）$E[X]$

期待値（平均値）は１次モーメントのことであり $E[X]=\mu$ で表す。

$$E[X]=\sum_{\mathbf{k}=-\infty}^{\infty}\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}(\mathbf{k}) \quad 、\quad E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{x}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}$$

例）バス発着時刻が毎時 0 分、15 分、35 分とすると、待ち時間の期待値（平均値）は 10 分 25 妙である。

$$E[T]=\sum_{t=0}^{15}\frac{\Delta t}{60}(15-t)+\sum_{t=15}^{35}\frac{\Delta t}{60}(35-t)+\sum_{t=35}^{60}\frac{\Delta t}{60}(60-t)$$

$\Delta t\to 0$

$$E[T]=\frac{1}{60}\left\{\int_0^{15}(15-t)dt+\int_{15}^{35}(35-t)dt+\int_{35}^{60}(60-t)dt\right\}=\frac{1}{60}\left(\frac{15^2}{2}+\frac{20^2}{2}+\frac{25^2}{2}\right)=10\frac{5}{12}$$

関数の期待値

$\mathbf{E}[\mathbf{aX}+\mathbf{b}]=\mathbf{a}\cdot\mathbf{E}[\mathbf{X}]+\mathbf{b}$

$\mathbf{E}[\mathbf{X}+\mathbf{Y}]=\mathbf{E}[\mathbf{X}]+\mathbf{E}[\mathbf{Y}]$

$\mathbf{E}[\mathbf{X\,Y}]=\mathbf{E}[\mathbf{X}]\cdot\mathbf{E}[\mathbf{Y}]+\mathbf{Cov}[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$、独立なら $\mathbf{E}[\mathbf{X\,Y}]=\mathbf{E}[\mathbf{X}]\cdot\mathbf{E}[\mathbf{Y}]$

$$\mathbf{E}\left[\sum_{\mathbf{i}}\mathbf{X_i}\right]=\sum_{\mathbf{i}}\mathbf{E}[\mathbf{X_i}]$$

2)分散 $V[X]$

分散は平均値まわりの 2 次モーメントのことであり $V[X]=\sigma^2$ で表す。

$$\sum_{\mathbf{k}=-\infty}^{\infty}(\mathbf{k}-\boldsymbol{\mu})^2\mathbf{p}(\mathbf{k}) \quad 、\quad \int_{-\infty}^{\infty}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^2\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}$$

なお $V[X]=E\left[(X-\mu)^2\right]=E\left[X^2\right]-2\mu E[X]+\mu^2=E\left[X^2\right]-\mu^2$

関数の期待値

$\mathbf{V}[\mathbf{aX}+\mathbf{b}]=\mathbf{a}^2\mathbf{V}[\mathbf{X}]$

$\mathbf{V}[\mathbf{X}+\mathbf{Y}]=\mathbf{V}[\mathbf{X}]+\mathbf{V}[\mathbf{Y}]+\mathbf{2Cov}[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$、独立なら $\mathbf{V}[\mathbf{X}+\mathbf{Y}]=\mathbf{V}[\mathbf{X}]+\mathbf{V}[\mathbf{Y}]$

$\mathbf{V}\left[\sum_{\mathbf{i}}\mathbf{X_i}\right]=\sum_{\mathbf{i}}\mathbf{V}[\mathbf{X_i}]+\mathbf{2}\sum_{\mathbf{i<j}}\mathbf{Cov}[\mathbf{X_i},\mathbf{X_j}]$、独立なら $\mathbf{V}\left[\sum_{\mathbf{i}}\mathbf{X_i}\right]=\sum_{\mathbf{i}}\mathbf{V}[\mathbf{X_i}]$

・標準偏差：分散の正の平方根 $\boldsymbol{\sigma}=\sqrt{\boldsymbol{\sigma}^2}$ で示す

（２）同時確率分布

確率変数 (X,Y) に対して，事象{X=xi}，事象{Y=yi}の積事象{X=xi，Y=yi}の確率の分布を同時確率分布といい、離散形の場合は $\mathbf{p}(\mathbf{x_i},\mathbf{y_j})=\mathbf{P}\{\mathbf{X}=\mathbf{x_i},\mathbf{Y}=\mathbf{y_j}\}$、連続形の場合は $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{P}\{\mathbf{X}\le\mathbf{x},\mathbf{Y}\le\mathbf{y}\}=\int_{-\infty}^{\mathbf{y}}\int_{-\infty}^{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{dxdy}$ である。同時分布では周辺密度関数が重要な役目を果たし、$\mathrm{f_x}(\mathrm{x})=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{dy}$ を X の周辺密度関数、$\mathrm{f_y}(\mathrm{y})=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{d}x$ を Y の周辺密度関数

という。また、$\mathbf{p_x(x_i) = \sum_j p(x_i, y_j)}$ 又は $\mathbf{F_x(x) = P\{X \le x\}} = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f(x,y)dydx} = \int_{-\infty}^{x} \mathbf{f_x(x)dx}$ を X の周辺分布といい、$\mathbf{p_y(y_j) = \sum_i p(x_i, y_j)}$ 又は $\mathbf{F_y(y) = P\{Y \le y\}} = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f(x,y)dxdy} = \int_{-\infty}^{y} \mathbf{f_y(y)dy}$ を Y の周辺分布という。なお、$\mathbf{\sum_i p_x(x_i) = \sum_j p_y(y_j) = \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) = 1}$ 或いは $\mathbf{F_x}(-\infty) = 0, \mathbf{F_x}(\infty) = 1$ 及び $\mathbf{F_y(-\infty) = 0, F_y(\infty) = 1}$ である

・独 立

X, Y が「独立」であるとき、離散形の場合は $\mathbf{p\{x_i, y_j\} = p_x\{x_i\} \cdot p\{y_j\}}$、連続形の場合は $\mathbf{F(x,y) = F_x(x) \cdot F_y(y)}$ 及び $\mathbf{f(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)}$ が成立する。

・各確率変数に対する平均，分散

X について

平均： $\mathbf{E[X]} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{xf(x,y)dydx} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{xf_x(x)dx}$

分散： $\mathbf{V[X]} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{(x - E[X])^2 f(x,y)dydx} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{(x - E[X])^2 f_x(x)dx}$

Y について

平均： $\mathbf{E[Y]} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{yf(x,y)dxdy} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{yf_y(y)dy}$

分散： $\mathbf{V[Y]} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{(y - E[Y])^2 f(x,y)dxdy} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{(y - E[Y])^2 f_y(y)dy}$ ■結合２次モーメント

・確率変数 X と Y の相互関係を表す指標

$\mathbf{E[XY]} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{xyf(x,y)dxdy}$　又は $\mathbf{E[XY]} = \dfrac{\mathbf{\sum_i x_i y_i}}{\mathbf{n}}$

X, Y が独立であれば $\mathbf{E[XY]} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{xf_x(x)dx} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{yf_y(y)dy = E[X]E[Y]}$

・結合２次モーメント

X, Y の平均値まわりの結合２次モーメント $\mathbf{Cov[X,Y]} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{(x - E[X])(y - E[Y])f(x,y)dxdy}$

又は $\mathbf{Cov[X,Y]} == \dfrac{\mathbf{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}}{\mathbf{n}}$ を X と Y の「共分散」という。

・相関係数： $\mathbf{r} = \dfrac{\mathbf{Cov[X,Y]}}{\boldsymbol{\sigma_x \sigma_y}}$

・関数の期待値

平均

１次元変数：離散形 $\mathbf{E}[\varphi(\mathbf{X})] = \sum_{\mathbf{i}} \varphi(\mathbf{x_i})\mathbf{p}(\mathbf{x_i})$ 、連続形 $\mathbf{E}[\varphi(\mathbf{X})] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}$

2 次元変数：離散形 $\mathbf{E}[\varphi(\mathbf{X},\mathbf{Y})] = \sum_{\mathbf{i}}\sum_{\mathbf{j}} \varphi(\mathbf{x_i},\mathbf{y_j})\mathbf{p}(\mathbf{x_i},\mathbf{y_j})$、連続形 $\mathbf{E}[\varphi(\mathbf{X},\mathbf{Y})] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{dxdy}$

分散

$\mathbf{V}[\mathbf{X}] = \mathbf{E}\left[(\mathbf{X}-\mu)^2\right]$、共分散 $\mathbf{Cov}[\mathbf{X},\mathbf{Y}] = \mathbf{E}\left[(\mathbf{X}-\mu_x)(\mathbf{Y}-\mu_y)\right]$

３．標本分布

（１）２項分布

事象と and 余事象のように 2 通りしか生じえない事象を対象としたもの

n 回のベルヌーイ試行で，事象 A が k 回出現する確率

$$P\{X=k\} = {}_nC_k\ p^k(1-p)^{n-k}$$

$$E[X] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\cdot p = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\cdot {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} = np$$

$$V[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2 = np(1-p)$$

例）ダーツの命中率とする。当たりと外れに確率変数を対応させ、命中のとき 1 外れのとき 0 とすれば、この分布の平均値と分散は次のようになる。

$$q \equiv 1-p$$
$$E[X] = 1\cdot p + 0\cdot q = p$$
$$V[X] = E\left[(X-p)^2\right] = (1-p)^2 p + (0-p)^2 q = pq(p+q) = pq$$

これを n 回行うとき、n 倍して $E[X]=np,\ \ V[X]=npq$ となる。下記の計算方法もある。

$P(x) = {}_nC_x p^x(1-p)^{n-x} = {}_nC_x p^x q^{n-x}$ において

$$E(x) = \sum_{x=0}^{n} x\cdot P(x) = np\sum_{x=1}^{n} {}_{n-1}C_{x-1} p^{x-1} q^{n-x} = np\sum_{y=0}^{n-1} {}_{n-1}C_y p^y q^{(n-1)-y} = np \quad (\text{但し } y \equiv x-1)$$

$$\sigma^2(X) = \sum_{x=0}^{n} x^2\cdot P(x) - \left(\sum_{x=0}^{n} x\cdot P(x)\right)^2$$

であるから、先ず第一項目は、

$$\sum_{x=0}^{n} x^2\cdot P(x) = \sum_{x=0}^{n}\{x(x-1)+x\}\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x} =$$

$$n(n-1)p^2\sum_{x=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-2-(x-2))!}p^{x-2}q^{n-2-(x-2)} + np\sum_{x=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-1-(x-1))!}p^{x-1}q^{n-1-(x-1)} =$$

$$n(n-1)p^2 + np$$

よって、$V[X] = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p) = npq$

（２）ポアソン(Poisson)分布

　事象の出現確率が小さいものに使われる．

希少現象である事象が k 回出現する確率をもとめてみよう。二項分布の平均値 $\mu = np$ であったが、これを一定に保ちながら $n \to \infty, p \to 0$ とすると得られる。

但し、$\lambda = np$ とする。

$$ {}_nC_x p^x q^{n-x} = \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \frac{\lambda^x}{x!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-x+1}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} $$

$$ n \to \infty;\ \frac{n-l+1}{n} \to 1, \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}, \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \to 1 $$

$$ \therefore {}_nC_k p^k q^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} $$

全確率は $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$ となる。なお、$E[X] = \lambda, V[X] = \lambda$ である。

（３）幾何分布

　t 回目の試行で，初めて事象 A の出現する確率

$$ P\{T = t\} = p \cdot (1-p)^{t-1} $$

$$ E[T] = \frac{1}{p} $$

$$ V[T] = \frac{1-p}{p^2} $$

（４）指数分布：幾何分布を連続時間で捉えたものである

　t という時間内に，事象 A が初めて出現する確率

$$ P\{T \le t\} = 1 - e^{-\lambda t} $$

$$ f(t) = \lambda e^{-\lambda t} $$

$$ E[T] = \frac{1}{\lambda} $$

$$ V[T] = \frac{1}{\lambda^2} $$

（５）ガンベル分布

ロジットモデル(交通計画でよく用いられる)の導出の際に使われる分布

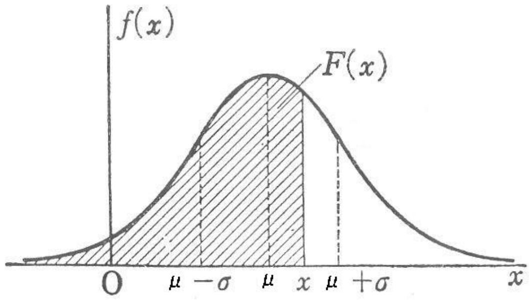
$$ \left.\begin{array}{l} F(x) = \exp\left[-e^{-y}\right] \\ f(x) = a\exp\left[-y-e^{-y}\right] \end{array}\right\} $$

$$ y = a(x - x_0) $$

（6）正規分布

歴史的に偶発誤差の分布法則（1.絶対値の小さい誤差は大きい誤差より高い確率で生じる、2.絶対値の等しい正負の誤差は同じ確率で生じる、3.絶対値の非常に大きな誤差の生じる確率はゼロに近い）として研究され、統計の理論と応用の両面から最も重要な分布である。数学者の名をとってガウス分布とも呼ばれる。p.d.f.は下式で示される。この関数はμとσによって定まるから、これを$N(\mu,\sigma^2)$と記すことが多い。

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



この関数の形状は$x=\mu$で最大となり、左右対象で、xがμから遠ざかるに従い、$f(x)$の値は0に近づいていく。点$x=\mu\pm\sigma$は$f(x)$の変曲点である。また、これのc.d.f.は下式の通り。

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$$

正規分布のp.d.f.は二項分布から誘導される。以下、これを示す。

$$P(x){=}_nC_xp^x(1-p)^{n-x},\quad \ln P(x)=\ln n!-\ln x!-\ln(n-x)!+x\ln p+(n-x)\ln(1-p)$$

$$*\,stirling's\,formula\quad \ln x!\cong x\ln x-x\quad ,\quad \frac{d}{dx}\ln P(x)\cong-\ln x+\ln(n-x)+\ln p-\ln(1-p)$$

$$x=\mu\Leftrightarrow\frac{d}{dx}\ln P(x)=0\rightarrow\ln\frac{\mu}{n-\mu}=\ln\frac{p}{1-p}\qquad\therefore\mu=np$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\ln P(x)\cong-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{n-x}\right)=-\frac{n}{x(n-x)},\quad\left[\frac{d^2}{dx^2}\ln P(x)\right]_{x=\mu}\cong-\frac{n}{\mu(n-\mu)}=-\frac{1}{p(1-p)n}\equiv-\frac{1}{\sigma^2}$$

xをμの回りでテーラー展開すると

$$\ln P(x)=\ln P(\mu)+(x-\mu)\left[\frac{d}{dx}\ln P(x)\right]_{x=\mu}+\frac{1}{2}(x-\mu)^2\left[\frac{d^2}{dx^2}\ln P(x)\right]_{x=\mu}+\cdots=\ln P(\mu)-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}+\cdots$$

$$P(x)=P(\mu)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

となる。

また全確率が１、すなわち$\int_{-\infty}^{\infty}P(x)dx=P(\mu)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=1$とするためには$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$を解く必要がある。まずは簡潔な式$\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}dx$からはじめよう。

$1-x^2<e^{-x^2}<\dfrac{1}{(1+x^2)},\quad(0<x)$　であるから、$0<x\le1$では$(1-x^2)^n<e^{-nx^2}$であり、

$0<x$ では $e^{-nx^2} < \frac{1}{(1+x^2)^n}$ である。よって、

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{n}\int_0^\infty e^{-nt^2}dt > \sqrt{n}\int_0^1 e^{-nt^2}dt > \sqrt{n}\int_0^\infty (1-t^2)^n dt = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta d\theta = \sqrt{n}\frac{2\cdot4\cdots\cdot 2n}{1\cdot3\cdots(2n+1)}$$

ただし、$x\equiv\sqrt{n}t,\quad t\equiv\cos\theta$ としている。

$e^{-\frac{x^2}{2}}$ の時は、$\frac{x}{\sqrt{2}}=\sqrt{n}t$ とおいて以下同じ手法でやればよい。一方、

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{n}\int_0^\infty e^{-nt^2}dt < \sqrt{n}\int_0^\infty (1+t^2)^{-n}dt = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2(n-1)}\theta d\theta = \sqrt{n}\frac{\pi}{2}\frac{1\cdot3\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot4\cdots(2n-2)}$$

である。ゆえに、

$\sqrt{n}\frac{2\cdot4\cdots\cdot2n}{1\cdot3\cdots(2n+1)} < \int_0^\infty e^{-x^2}dx < \sqrt{n}\frac{\pi}{2}\frac{1\cdot3\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot4\cdots(2n-2)}$　であり、

ワリスの公式；$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot4\cdots2n}{1\cdot3\cdots2n-1}\right)^2=\pi$　により

$n\to\infty$　により $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ となる。

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}} > \int_0^\infty x^{-x^2}dx > \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot4\cdots2n}{1\cdot3\cdots2n-1}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2 n^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{1}\frac{1}{2n+1}n\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

であるから、従って　$\int_{-\infty}^\infty e^{-a(x-b)^2}dx=\int_{-\infty}^\infty e^{-au^2}du=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$　$(a>0)$ が導かれる。

全確率の定理 $\int_{-\infty}^\infty P(x)dx=1$ より、$P(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ となり、$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$　となる。

なお上記については、次の簡略解法も紹介されることが多い。

$$I\equiv\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

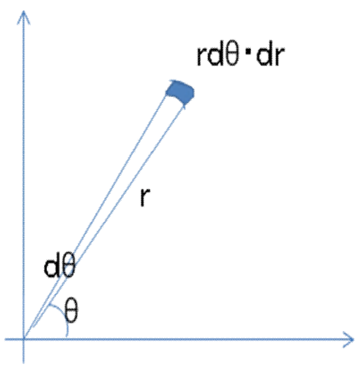
$$I^2=\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}du+\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{v^2}{2}}dv=\int_{-\infty}^\infty du\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(u+v)^2}{2}}dv=*$$

$$u=r\cos\theta, v=r\sin\theta, dudv=rdrd\theta \quad r:0\to\infty, \theta:0\to2\pi$$

$$*=\int_0^\infty rdr\int_0^{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}d\theta$$

$$=2\pi\int_0^\infty re^{-\frac{r^2}{2}}dr=2\pi\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^\infty=2\pi$$

$$\therefore I=\sqrt{2\pi}$$



正規分布の平均値と分散は以下のようになる。

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma t+\mu)e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}te^{-\frac{1}{2}t^2}dt+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=0+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=\mu$$

$$V(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left[t\left\{e^{-\frac{1}{2}t^2}\right\}\right]_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt\right\}=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(0+\sqrt{2\pi}\right)=\sigma^2$$

・正規分布の標準化

確率を求めるときは、一般の正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ ではなく標準正規分布 $N(0,1)$ を用いて標準正規分布表から求める。標準正規分布は、確率変数 X を標準化（$u\equiv\dfrac{X-\mu}{\sigma}$）することにより求められる。

$$u=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

$$E(U)=E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{E(X-\mu)}{\sigma}=\frac{E(X)-\mu}{\sigma}=\frac{\mu-\mu}{\sigma}=0$$

$$V(U)=V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{V(X-\mu)}{\sigma^2}=\frac{V(X)}{\sigma^2}=\frac{\sigma^2}{\sigma^2}=1$$

$$\varphi(u)du=P(u<U\le u+\Delta u)=P\left(\frac{x-\mu}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{x-\mu}{\sigma}+\Delta u\right)=P(x-\mu<X-\mu\le x-\mu+\sigma\Delta u)$$

$$=P(x<X\le x+\sigma\Delta u)=f(x)\sigma(x\ =f(\sigma(\ +\mu)\sigma du=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(\sigma\sigma+\mu-\mu)^2}{2\sigma^2}}\sigma du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-y^2}{2}}du$$

$$\therefore\quad \varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-u^2}{2}}$$

$$E[\Phi]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}ue^{\frac{-u^2}{2}}du=0$$

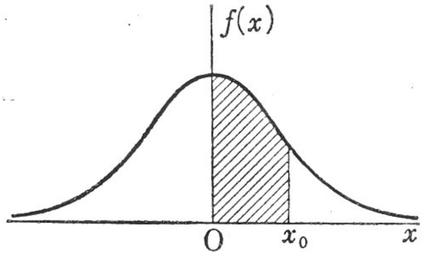
$$V[\Phi]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u^2e^{\frac{-u^2}{2}}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left[u\left(-e^{-\frac{u^2}{2}}\right)\right]_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[0+\sqrt{2\pi}\right]=1$$

なお、$\Phi(u)=\int_{-\infty}^{u}\varphi(u)\,du$ を、$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(u)\,du$ と表現することが多く、$\mathbf{\Phi(x)}$ の $\mathbf{x}$ は $\mathbf{x}$ 値そのものであるが、$\int_{-\infty}^{x}\varphi(u)\,du$ の $\mathbf{x}$ は $x\Rightarrow\dfrac{x-\mu}{\sigma}$ と変換した値であり、注意を要する。

巻末□表は標準正規分布 $N(0,1)$ において x_0 の（0～3）の各値に対して

$$P(0 \le x \le x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_0} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

の確率を示した表である。



定理１　正規分布の加法性：確率変数 X, Y が独立で、それぞれ $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$ に従うとき変数 $X \pm Y$ は $N(\mu_1 \pm \mu_2, \sigma_1^2 \pm \sigma_2^2)$ に従う。

－証明－

X, Y の p.d.f.を次のようにする。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}, \quad g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2}$$

X, Y の同時 p.d.f.は $f(x) \cdot g(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}}$ である。

$Z = X + Y$ の p.d.f.を $h(z)$ とすれば、$h(z)$ の c.d.f. $H(z)$ は次のようになる。

$$H(z) = \int_{-\infty}^{z} h(z)dz = P(-\infty < Z \le z) = \iint_{x+y \le z} f(x)g(y)dxdy = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2} \int_{-\infty}^{z-y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} dxdy$$

微分して、

$$h(z) = H'(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{z-y-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right)} dy = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(y - \frac{\sigma_1^2\mu_2 + \sigma_2^2(z-\mu_1)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2 + \frac{(z-\mu_1-\mu_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)} dy = *$$

$$s \equiv \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(y - \frac{\sigma_1^2\mu_2 + \sigma_2^2(z-\mu_1)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right), \ dy = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} ds \quad y; -\infty \to \infty, \ s; -\infty \to \infty$$

$$* = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(z-\mu_1-\mu_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \cdot \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} ds = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(z-\mu_1-\mu_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(z-\mu_1-\mu_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$$

となる。

$Z = X - Y$ でも全く同様の方法で証明される。なお、式の整頓では下式のように、・の部分を先の平方式で生じる項の相殺項として加えて整理すると見通しよく整理できる。

$$\frac{\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(y-\frac{\left\{\sigma_1^2\mu_2+\sigma_2^2(z-\mu_1)\right\}}{\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}\right)^2\underbrace{-\frac{\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\cdot\frac{\left\{\sigma_1^2\mu_2+\sigma_2^2(z-\mu_1)\right\}^2}{\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)^2}}_{\bullet}+\frac{\left\{\sigma_1^2\mu_2^2+\sigma_2^2(z-\mu_1)^2\right\}}{\sigma_1^2\sigma_2^2}$$

定理２　確率変数 $X_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ が互いに独立でそれぞれ $N(\mu_i,\sigma_i^2)$ に従うとき、

$X=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$ は $N(a_1\mu_1+a_2\mu_2+\cdots+a_n\mu_n,a_1^2\sigma_1^2+a_2^2\sigma_2^2+\cdots+a_n^2\sigma_n^2)$ に従う。

X が $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとき aX は $N(a\mu,a^2\sigma^2)$ に従うので（下記参照）、上記の定理より導かれる。

$$Y=aX,\ pdf;h(y)$$

$$\int_{-\infty}^{y}h(y)dy=P(-\infty<Y\le y)=P\left(-\infty<X\le\frac{y}{a}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\frac{y}{a}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}a\sigma}\int_{-\infty}^{\frac{y}{a}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-a\mu}{a\sigma}\right)^2\right]dt$$

$$\because x=\frac{1}{a}t,\quad dx=\frac{1}{a}dt$$

$$\therefore g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}a\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-a\mu}{a\sigma}\right)^2\right]$$

系　確率変数 $X_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ が互いに独立で $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとき、$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ は

$N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。これは定理４で $a_i=\frac{1}{n},\mu_i=\mu,\sigma_i^2=\sigma^2$ の場合に当たる。

定理３　中心極限定理:確率変数 $X_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ が互いに独立で、平均値と分散が μ,σ^2 となる分布に従うとき、分布の形はどうであっても、n が十分大きいとき $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ とすれば、

$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ の分布は $N(0,1)$ に近づく。　証明略。

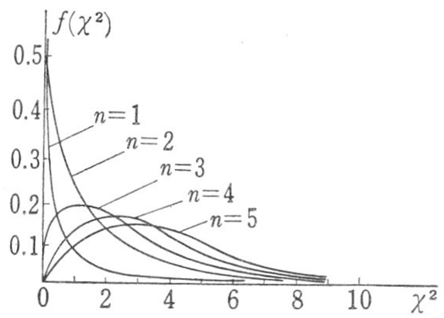
（７）カイ二乗分布

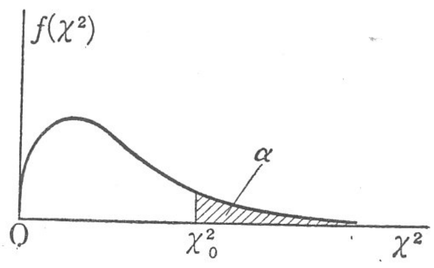
確率変数 $X_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ が互いに独立でそれぞれ $N(0,1)$ に従うとき、$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ なる統計量は次の p.d.f.の分布に従う。χ^2 値は当然、確率変数である。これを自由度 n のカイ二乗分布という。

$$f_n(\chi^2)=\frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$

カイ二乗分布の形状は n の大きさによって定まる。よって n はこの分布の母数に当たる。図は n ＝1,2,3,4,5 に対してのカイ二乗分布を示したものである。

巻末□表は、自由度 1 ～30 までの $P(\chi^2 \geq \chi_0^2)=\int_{\chi_0^2}^{\infty} f(\chi^2)d\chi^2=\alpha$ を満たす確率 α の各値（0.99 ～0.001）に対する χ_0^2 の値を示したものである。自由度 n でこの式を満たす χ_0^2 を自由度 n のカイ二乗分布の α 点といい、 $\chi_n^2(\alpha)$ で示すことが多い。





カイ二乗分布の p.d.f.を誘導してみよう。その前にガンマ関数とベータ関数が前知識として必要となるので、これについて簡単に紹介しておく。

1）ガンマ関数の性質

ガンマ関数は次式で定義される。

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}dx \qquad (0<s)$$

いくつか具体例を計算してみよう。

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty}e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^{\infty}=1$$

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-x}dx=\left[\frac{x^n}{n}e^{-x}\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}\frac{x^n}{n}(-e^{-x})dx=\frac{1}{n}\Gamma(n+1)$$

よって自然数nに対して、$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots=n!$となる。ガンマ関数は階乗の概念を実数ないしは複素数にまで拡張したものである。また、ガンマ関数の積についてみると、以下のようになる。

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\int_0^{\infty}x^{p-1}e^{-x}dx\int_0^{\infty}y^{q-1}e^{-y}dy=\iint_D x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}dxdy \qquad (D=\{(x,y)\,|\,0\le x, 0\le y\})$$

ここで$x=u^2, y=v^2$とすると、ヤコビアン$J(u,v)$は、

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial u^2}{\partial u} & \frac{\partial u^2}{\partial v}\\ \frac{\partial v^2}{\partial u} & \frac{\partial v^2}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2u & 0\\ 0 & 2v\end{vmatrix}=4uv$$

であるから多変数の微積分の定理から$dxdy=4uvdudv$となるので、

$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\iint_D u^{2p-1}v^{2q-1}e^{-(u^2+v^2)}dudv$　　と置換される。　さらに、

$u=r\cos\theta, v=r\sin\theta \quad (D=\left\{(r,\theta)\,|\,0\le r,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\})$と置換すると

$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial \theta}\\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$であるから、$dudv=rdrd\theta$となり、

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\iint_D r^{2p-1}r^{2q-1}e^{-r^2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta rdrd\theta$$
$$=4\cdot\int_0^{\infty}r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr\cdot\int_0^{\pi/2}\cos^{2(p-1)}\theta\sin^{2(q-1)}\theta\cdot\cos\theta\sin\theta d\theta$$

ここで、第一項の積分式は、$r^2=x$　とおいて、

$$\int_0^{\infty}r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr=\int_0^{\infty}\frac{x^{p+q}}{x}e^{-x}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}x^{(p+q)-1}e^{-x}dx=\frac{1}{2}\Gamma(p+q)$$

第二項の積分式は、$\cos^2\theta = x$ とおいて、

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2(p-1)}\theta\sin^{2(q-1)}\theta\cdot\cos\theta\sin\theta d\theta = \int_1^0 x^{p-1}(1-x)^{q-1}(-\frac{1}{2})dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{1}{2}B(p,q)$$

よって、$B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ 　が成り立つ。但し、$B(p,q)$ はベータ関数と呼ばれるもので、次のように定義されるものである。

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (p>0, q>0)$$

2)ベータ関数の性質

$$B(1,1) = \int_0^1 dx = 1$$

$$B(\frac{1}{2},1) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2$$

$$B(1,\frac{1}{2}) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = -\left[2\sqrt{1-x}\right]_0^1 = 2$$

$$B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}(1-4(x-\frac{1}{2})^2)}} = \int_0^1 \frac{2dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\pi/2} 2d\theta = \pi$$

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)} = B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi \quad \therefore \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-x}dx = 2\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \quad *$$

$$S \equiv \int_0^\infty e^{-t^2}dt$$

$$S^2 = \iint e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^\infty re^{-r^2}dr\int_0^{\pi/2}d\theta = \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\infty \left[\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

$$* \quad = 2S = \sqrt{\pi}$$

ガンマ関数とベータ関数の概要が分かったのでカイ二乗分布の p. d. f. を誘導しよう。

―誘導―

確率変数 X が標準正規分布 $N(0,1)$ に従っているとき、$Y = X^2$ の c. d. f F 、p. d. f. f を考える。

$Y = X^2$

$F(y) = P(Y < y) = P(X^2 < y) = P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \varphi(x)dx$

となる。両辺を微分して

$$f(y) = F'(y) = \varphi(\sqrt{y})\frac{d}{dy}\sqrt{y} - \varphi(-\sqrt{y})\frac{d}{dy}(-\sqrt{y}) = \varphi(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} + \varphi(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}\frac{1}{2\sqrt{y}} = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(\frac{1}{2})}y^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}$$

となる。これは自由度１のカイ二乗分布と呼ばれる。

カイ二乗分布は再生性があり、二つの確率変数 χ_1^2、χ_2^2 が独立で、自由度がそれぞれ n_1、n_2 のカイ二乗分布に従うとき、$\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2$ なる確率変数 χ^2 は自由度 $(m+n)$ のカイ二乗分布に従う。

以下これを確認するが、煩雑さを避けるため $X \equiv \chi_1^2, m \equiv n_{1,}$ $Y \equiv \chi_2^2, n \equiv n_2$, $Z \equiv X + Y$ のように記号を変更して $Z = X + Y$ のカイ二乗分布をみてみる。

$Z = X + Y$ において、X と Y の同時 p. d. f. を $f(x, y)$ とするとき、X と Y は独立なので、$f(x, y) = f_m(x)f_n(y)$ であり、Z の c. d. f を $G(Z)$ とすれば、

$$G(z) = P(Z < z) = P(X + Y < z) = \iint_{\{x+y<z\}} f(x, y)dxdy = \int_0^z \left[\int_0^{z-y} f_m(x)f_n(y)dx\right]dy$$

となる。両辺を微分して、

$$g(z) = G'(Z) = \int_0^z f_m(z-y)f_n(y)dy = \int_0^z \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(\frac{m}{2})}(z-y)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{(z-y)}{2}}\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}dy$$

$$= \int_0^z \frac{1}{2^{(m+n)/2}\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}(z-y)^{\frac{m}{2}-1}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{z}{2}}dy = \int_0^z \frac{1}{2^{(m+n)/2}\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}(z-zt)^{\frac{m}{2}-1}(zt)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{z}{2}}zdt$$

$$= \frac{1}{2^{(m+n)/2}\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}z^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-\frac{z}{2}}\int_0^1 (1-t)^{\frac{m}{2}-1}t^{\frac{n}{2}-1}dt$$

となる。但し、途中で $y = zt$ とおいて置換積分を行っている。最後の積分の項はベータ関数であり，ベータ関数とガンマ関数との関係

$B(s,t) = \dfrac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$ を用いると $\int_0^1 (1-t)^{\frac{m}{2}-1}t^{\frac{n}{2}-1}dt = B(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})$ であるからして

$$g(z)=\frac{1}{2^{(m+n)/2}\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}z^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-\frac{z}{2}}\frac{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{m+n}{2})}=\frac{1}{2^{(m+n)/2}\Gamma(\frac{m+n}{2})}z^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-\frac{z}{2}}=f_{m+n}(z)$$

となり再生性があることがわかる。

■ $N(\mu,\sigma^2)$ から得られた標本を $X_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ とするとき

$\chi^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ は、$\frac{X_i-\mu}{\sigma}$ が $N(0,1)$ に従うから、自由度 n のカイ二乗分布に従う。

■ $N(\mu,\sigma^2)$ から得られた標本 $X_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ の平均を $\overline{X}$ とするとき

$\chi^2=\frac{(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2/n}$ は、$\overline{X}$ が $N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従い、$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ は $N(0,1)$ に従うから、自由度 1 のカイ二乗分布に従う。

（８） F 分布

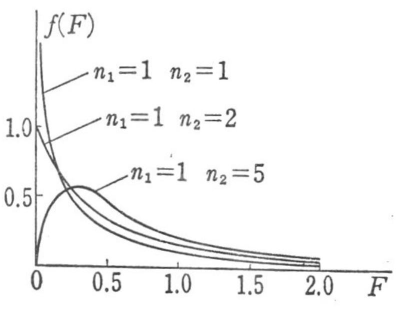
定理４　二つの確率変数 χ_1^2、χ_2^2 が独立で、自由度がそれぞれ n_1、n_2 のカイ二乗分布に従うとき、

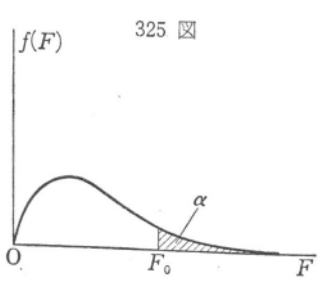
$F=\frac{\chi_1^2/n_1}{\chi_2^2/n_2}$ なる確率変数 F は、次の p.d.f.をもつ分布に従う。

$$f(F)=\frac{n_1^{\frac{1}{2}n_1}n_2^{\frac{1}{2}n_2}}{B\left(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\right)}\cdot\frac{F^{\frac{1}{2}n_1-1}}{(n_1F+n_2)^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)}}$$

これを自由度 (n_1,n_2) の F 分布という。

図は自由度 (n_1,n_2) が $(1,1)$、$(1,2)$、$(1,5)$ の F の形状を示したものである。巻末□表は自由度 (n_1,n_2) のそれぞれに対応して $P(F\geq F_0)=\int_{F_0}^{\infty}f(F)dF=\alpha$ を満たす F_0 の値を示したものである。但し、この表は通常慣用されている $\alpha=0.05$ と $\alpha=0.01$ について示した。自由度 (n_1,n_2) でこの式を満たす定数 F_0 を自由度 (n_1,n_2) の F 分布の α 点といい、$F_{n_1,n_2}(\alpha)$ で示す。





F 分布の p.d.f.を導出してみよう。煩雑さを避けるため

$X \equiv \chi_1^2, m \equiv n_1,\ Y \equiv \chi_2^2, n \equiv n_2,\quad Z \equiv \dfrac{X/m}{Y/n}$ のように記号を変更する。

$$G(z) = P(Z < z) = P\left(\frac{X/m}{Y/n} < z\right) = \iint_{D=\{(x,y)|x<\frac{m}{n}yz\}} f_X(x) f_Y(y)\,dxdy = \int_0^\infty dy \int_0^{\frac{m}{n}yz} f_X(x) f_Y(y)\,dx$$

両辺を微分して

$$g(z) = G'(z) = \int_0^\infty f_X\left(\frac{m}{n}yz\right)\frac{m}{n} y f_Y(y)\,dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(\frac{m}{2})} e^{-\frac{1}{2}\frac{m}{n}yz}\left(\frac{m}{n}yz\right)^{m/2-1}\frac{m}{n} y \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} e^{-y/2} y^{n/2-1}\,dy = \frac{(\frac{m}{n})^{m/2} z^{m/2-1}}{2^{(m+n)/2}\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^\infty e^{-\frac{y}{2}(1-\frac{m}{n}z)} y^{(m+n)/2-1}\,dy = *$$

$$s \equiv \frac{y}{2}\left(1+\frac{m}{n}z)\right) \to \quad y = \frac{2s}{1+\frac{m}{n}z},\quad dy = \frac{2}{1+\frac{m}{n}z}ds,\quad z;0 \to \infty,\ s;0 \to \infty$$

$$* = \frac{(\frac{m}{n})^{m/2} z^{m/2-1}}{2^{(m+n)/2}\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^\infty e^{-s}\frac{2^{(m+n)/2-1}s^{(m+n)/2-1}}{(1+\frac{m}{n}z)^{(m+n)/2-1}}\frac{2}{1+\frac{m}{n}z}ds$$

$$= \frac{(\frac{m}{n})^{m/2} z^{m/2-1}}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{m}{n}z\right)^{-(m+n)/2}\int_0^\infty e^{-s}s^{(m+n)/2-1}ds = \frac{(\frac{m}{n})^{m/2} z^{m/2-1}}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{m}{n}z\right)^{-(m+n)/2}\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{m}{n}z\right)^{-(m+n)/2}\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} z^{m/2-1} = \frac{m^{\frac{1}{2}m} n^{\frac{1}{2}n}}{B(\frac{m}{2},\frac{n}{2})}\frac{z^{\frac{1}{2}m-1}}{(mz+n)^{\frac{1}{2}(m+n)}}$$

となる。

■ $N(\mu,\sigma^2)$ から得られた標本 $X_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ の平均を $\overline{X}$ とし、$U^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ とするとき、$\dfrac{(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2/n}$ は自由度 1 のカイ二乗分布、$\dfrac{(n-1)U^2}{\sigma^2} = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ は自由度 $n-1$ のカイ二乗分布で、かつ独立であるから、上記定理より $F = \dfrac{n(\overline{X}-\mu)^2}{U^2}$ は自由度 $(1, n-1)$ の F 分布に従う。

■ $N(\mu,\sigma^2)$ から、大きさ n_1, n_2 の独立な標本をとるとり、それぞれの標本平均を $\overline{X}_1$、$\overline{X}_2$ ；不偏分散を U_1^2、U_2^2 とし、$U^2 = \dfrac{(n_1-1)U_1^2+(n_2-1)U_2^2}{n_1+n_2-2}$ とおけば、$F = \dfrac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)^2}{U^2}\dfrac{n_1 n_2}{n_1+n_2}$ は自由度 $(1, n_1+n_2-2)$ の F 分布に従う。

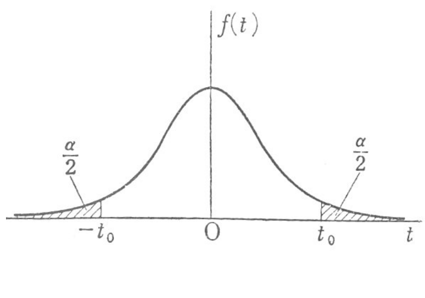
何故なら、第 1 に、$(n_1-1)U_1^2+(n_2-1)U_2^2=\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i}-\overline{X}_1)^2+\sum_{j=1}^{n_2}(X_{2j}-\overline{X}_2)^2$ に当たるから、カイ二乗分布の加法性から $\dfrac{(n_1+n_2-2)U^2}{\sigma^2}$ は自由度 (n_1+n_2-2) のカイ二乗分布に従う。一方、第 2 に、$\overline{X}_1$、$\overline{X}_2$ はそれぞれ $N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n_1}\right)$、$N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n_2}\right)$ に従うから $\overline{X}_1-\overline{X}_2$ は $N\left(0,\dfrac{n_1+n_2}{n_1n_2}\sigma^2\right)$ に従い、しかるに $\dfrac{n_1n_2}{(n_1+n_2)\sigma^2}(\overline{X}_1-\overline{X}_2)^2$ は自由度 1 のカイ二乗分布に従う。この 2 つのことから、定理 5 と正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ の平均と分散における独立性により導かれる。

■共通の分散をもつ $N(\mu_1,\sigma^2)$ $N(\mu_2,\sigma^2)$ から、それぞれ大きさ n_1,n_2 の標本をとるとき、その不偏分散を U_1^2,U_2^2 とすると、$\dfrac{(n_1-1)U_1^2}{\sigma^2}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i}-\overline{X}_1)^2,\dfrac{(n_2-1)U_2^2}{\sigma^2}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n_2}(X_{2j}-\overline{X}_2)^2$ はそれぞれ自由度 n_1-1,n_2-1 のカイ二乗分布に従うから、上記定理から $F=\dfrac{U_1^2}{U_2^2}$ は自由度 (n_1-1,n_2-1) の F 分布に従う。

（9） t 分布

確率変数 X は $N(0,1)$ に従い、確率変数 χ^2 は自由度 n のカイ二乗分布に従い、互いに独立のとき、$t=\dfrac{X}{\sqrt{\chi^2/n}}$ は次の p.d.f.をもつ分布に従う。

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{n}B\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)}\cdot\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}(n+1)}$$



これを自由度 n の t 分布という。図のように $f(t)$ は縦軸に関して対称である。
巻末□表は自由度 n のそれぞれに対して α が 0.50、0.25、0.10、0.05、0.025、0.01、0.005 であるとき、$P(|t|\geq t_0)=\int_{-\infty}^{-t_0}f(t)dt+\int_{t_0}^{\infty}f(t)dt=\alpha$ を満たす t_0 を示したものである。自由度 n でこの式を満たす定数 t_0 を、自由度 n の t 分布の α 点いい、$t_0(\alpha)$ で示す。

t分布の p.d.f.を誘導してみよう。$T \equiv \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ とおいて、

$$G(t) = P(T < t) = \iint_{\{T<t\}} f(x,y)dxdy = \iint_{X<\sqrt{Y/n}t} f(x,y)dxdy = \int_0^\infty dy \int_{-\infty}^{\sqrt{Y/n}t} f(x,y)dx$$

$$= \int_0^\infty dy \int_{-\infty}^{\sqrt{Y/n}t} \varphi(x) f(y)dx = \int_0^\infty dy \int_{-\infty}^{\sqrt{Y/n}t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} y^{n/2-1} e^{-\frac{y}{2}} dx$$

$$= \int_0^\infty dy \int_{-\infty}^{\sqrt{Y/n}t} \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{2^{(n+1)/2}} y^{n/2-1} e^{-(\frac{x^2}{2}+\frac{y}{2})} dx$$

両辺を微分して、

$$g(t) = G'(t) = \int_0^\infty f(\sqrt{\frac{y}{n}}t, y)\sqrt{\frac{y}{n}}dy = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{2^{(n+1)/2}} y^{n/2-1} e^{-\frac{\left(\sqrt{y/n}t\right)^2}{2}-\frac{y}{2}} \sqrt{\frac{y}{n}}dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty \frac{1}{2^{(n+1)/2}} y^{(n-1)/2} e^{-(1+\frac{t^2}{n})y/2} dy = * \quad s \equiv \frac{(1+\frac{t^2}{n})y}{2}, \quad ds = \frac{(1+\frac{t^2}{n})}{2} dy$$

$$* = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty \frac{1}{2^{(n+1)/2}} \left(\frac{s}{(1+t^2/n)/2} \right)^{(n-1)/2} e^{-s} \frac{1}{(1+t^2/n)/2} ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} (1+\frac{t^2}{n})^{-(n+1)/2} \int_0^\infty s^{(n+1)/2-1} e^{-s} ds = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} (1+\frac{t^2}{n})^{-(n+1)/2} = \frac{1}{\sqrt{n}B(\frac{n}{2},\frac{1}{2})} (1+\frac{t^2}{n})^{-(n+1)/2}$$

となる。

■ $N(\mu,\sigma^2)$ から得られた標本 $X_i \ (i = 1,2,\cdots,n)$ の標本平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ 、標本分散 $S^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$ 、不偏分散 $U^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$ とするとき、$Y_i = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma}$ とすれば Y_i は $N(0,1)$ に従うから、$\overline{Y} = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}$、$S^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 = \dfrac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2$ であることから、

$$t = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n-1}} = \frac{\sqrt{n}\overline{Y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2 \Big/ (n-1)}}$$

となり、$\sqrt{n}\overline{Y}$ は $N(0,1)$ に従い、$\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2$ は自由度 $n-1$ のカイ二乗分布に従うから、

$$t = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n-1}} = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{U^2/n}}$$ は自由度 $n-1$ の t 分布に従う。

４．標本データ

（１）標本

検討の対象となるもの（例えば実験用試料（供試体）、生物等々）全体の一つを標本と言い、これらの属性（大きさ、重さ、耐力等）の値を標本値と言う。標本全体の集合を母集団と言い、標本数が無限の場合を無限母集団、有限の場合を有限母集団という。

（２）標本平均、標本分散、不偏分散

平均：$\bar{\mathbf{x}} = \dfrac{1}{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{x_i}$

分散：$\mathbf{s}^2 = \dfrac{1}{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} \{\mathbf{x_i} - \bar{\mathbf{x}}\}^2$

標本相関係数；$\mathbf{r} = \dfrac{\mathbf{S_{xy}}}{\mathbf{S_x S_y}}$

$$\mathbf{S_{xy}} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{N}} (\mathbf{x_i} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{y_i} - \bar{\mathbf{y}})、\ \mathbf{S_x}^2 = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{N}} (\mathbf{x_i} - \bar{\mathbf{x}})^2\ 、\ \mathbf{S_y}^2 = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{N}} (\mathbf{y_i} - \bar{\mathbf{y}})^2$$

不偏分散；$u^2 = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}-1} \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} \{\mathbf{x_i} - \bar{\mathbf{x}}\}^2$

５．統計的推定

通常、我々は母集団については未知の点が多く、そこから取り出された標本についての情報を得ているだけの場合が多い。この限られた情報から母集団の特性を示す母数（母平均や母分散など）を推論しようというのが推定である。推定は標本分布の理論に基づくことになるため、母集団については未知と雖も、その分布の型は正規分布や二項分布など既知であることを条件とする（但し、ノンパラメトリック推定は除く）。推定の方法には点推定と区間推定がある。

（１）点推定の方法

点推定は、標本$X_1, X_2, \cdots, X_n$を用いて未知母数θを最もよく表現できると思われる標本の関数$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$をつくり、これに実現値（実際に得られた標本値）を代入して$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$で$\theta$を表現する方法である。この$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$は幾通りも考えることができる。具体的な例として

母平均μの点推定

$\hat{\mu} = \dfrac{1}{n} \sum_i x_i \quad (= \bar{x})$　　　$\bar{\mathbf{x}}$：標本平均

母分散の点推定

母平均が既知のとき　$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \mu)^2$

母平均が未知のとき　$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \quad (= S^2)$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \quad (= U^2)$$

母平均が未知のとき推定量が 2 つ示されているが最も好ましいのはどれだろうか。この好ましいという条件は何を基準にすればよいだろうか。このためには、次の三つの観点があるといわれる。

①不偏性：$E(\hat{\theta}) = \theta$

この時の$\hat{\theta}$を不偏推定量という。

②一致性：$\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = 1$　（$\hat{\theta}_n$がθに確率収束する）

この時の$\hat{\theta}_n$を不偏推定量という。

③有効性：同じ不偏性をもつθの推定量$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$について、$E(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_2) = \theta$及び$E(\hat{\theta}_1 - \theta)^2 < E(\hat{\theta}_2 - \theta)^2$のとき、推定量$\hat{\theta}_1$は$\hat{\theta}_2$よりも有効であるといい、分散の最小となるものを有効推定量という。

先の母平均が未知のときの不偏推定量は

$$E[S^2] = E\left\{\frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^2\right\} = \frac{1}{n}E\left[\sum_i \{(x_i - \mu) - (\bar{x} - \mu)\}^2\right] = \frac{1}{n}\left[\sum_i E(x_i - \mu)^2 - nE(\bar{x} - \mu)^2\right] = \frac{1}{n}\left[\sum_i \sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}\right] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$E[U^2] = \frac{n}{n-1}E[S^2] = \sigma^2$$

よりU^2である。

（2）区間推定の方法

点推定は未知母数の値を標本から直接、推定量として得たものであるが、どれだけ信頼してよいものかの確率的背景にとぼしい。この点を補うものに区間推定の方法がある。

これは信頼度$P(\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_H) = 1 - \alpha$となる信頼区間$(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{L}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{H}})$を求めることである。$\alpha$=0.05

などが頻繁に用いられ、この場合は信頼度 0.95（又は 95%）ということになる。

区間推定の種類と利用する確率関数

① 母平均の区間推定

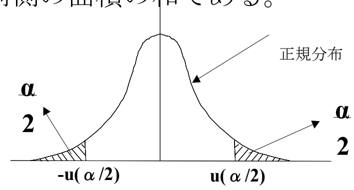
１）母分散σ^2が既知の場合

標本平均$\bar{\mathbf{x}}$は標本数が十分大きければ$N(\mu,\sigma^2/n)$の正規分布にしたがう。このことから$\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$は標本数が十分大きければ$N(0,1^2)$の標準正規分布にしたがう。

いま標準正規分布の両側をとるとして$P(|\varphi|\geq u_0)=\int_{-\infty}^{-u_0}\varphi(u)du+\int_{u_0}^{\infty}\varphi(u)du=\alpha$を満たす

u_0を、標準正規分布のα点と呼んで$u_0(\alpha/2)$で示そう。信頼度は$P\left(\hat{\theta}_L\leq\theta\leq\hat{\theta}_H\right)=1-\alpha$で

あったから$\pm u_0(\alpha/2)$点が信頼限界点となる。当然、αは図のように両側の面積の和である。ゆえに



$$P\left(-u\left(\frac{\alpha}{2}\right)\leq\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\leq u\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)=1-\alpha$$

を満たすμを求める。$\bar{\mathbf{x}}$はデータから明らかであり、

信頼度 95%で求めるとするならばα=0.05 と予め設定し、$u\left(\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}\right)=u(0.025)$となる値を標準正規分布表から得ることでμは求められる。つまりＰの括弧内を変形して、

$\bar{x}-u\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq\mu\leq\bar{x}+u\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$により求められる。

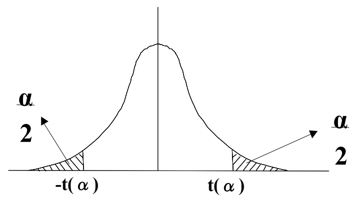
２）母分散σ^2が未知の場合

正規母集団$N(\mu,\sigma^2)$においてμの推定量として標本平均$\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$をとり、１）の統計量

$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$の$\sigma$は未知のため、$\sigma$のかわりに不偏分散$U^2$の平方根$U$を用いるとき、$t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{U/\sqrt{n}}$は

自由度$n-1$のｔ分布に従う。ゆえに、信頼度$1-\alpha$で$P\left\{\dfrac{|\bar{X}-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}}<t_{n-1}(\alpha)\right\}=1-\alpha$

ここでの$t_{n-1}(\alpha)$は図のｔ分布のα点であり、値はｔ分布表から求められる。



$$P\left\{\overline{X}-t_{n-1}(\alpha)\frac{U}{\sqrt{n}}\le\mu\le\overline{X}+t_{n-1}(\alpha)\frac{U}{\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha$$

より確率変数 $\overline{X},U$ に対する実現値を $\bar{x},u$ として、信頼区間は $\left\{\bar{x}-t_{n-1}(\alpha)\frac{u}{\sqrt{n}}\quad,\quad\bar{x}+t_{n-1}(\alpha)\frac{u}{\sqrt{n}}\right\}$ である。

U の代わりに S を用いる場合は $\frac{U}{\sqrt{n}}$ を $\frac{S}{\sqrt{n-1}}$ とすればよい。また、統計量 t の代わりに $t^2=F$ を用いてもよい。この場合 $F=\frac{(\overline{X}-\mu)^2}{U^2/n}$ は自由度 $(1,n-1)$ の F 分布に従う。

② 母分散の区間推定

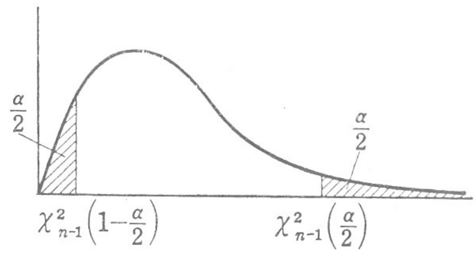
1）母平均 μ が既知の場合　自由度 n の χ(カイ)2 乗分布

2）母平均 μ が未知の場合　自由度 n－１の χ(カイ)2 乗分布

正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ から得られた標本 $X_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ の標本平均を $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

とするとき $\chi^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}$ は自由度 $n-1$ のカイ二乗分布に従うから、信頼度 $1-\alpha$ で

$$P\left\{\chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\le\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\le\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}=1-\alpha$$



但し、$\chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$、$\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ は図の自由度 $n-1$ のカイ二乗分布の $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ 点、$\frac{\alpha}{2}$ 点であり、カイ二乗分布表から求められる。変形して

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\le\sigma^2\le\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right\}=1-\alpha$$

よって $X_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 及び $\overline{X}$ の実現値 $x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$、$\bar{x}$ に対して σ^2 の信頼区間は

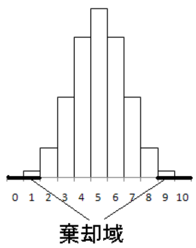
$$\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad , \quad \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \right\}$$ である。

５．統計的検定

　検定は、先述の母数の推定方法をもとに、母集団に対するある種の予想（仮説）をたて、標本を調べることにより、この仮説の正否を判定する方法である。

（１）仮説検定

　例えば、1 枚の硬貨を 10 回投げて表の出る回数が 1 回だけだったとすると、この硬貨は正常につくられているだろうかという疑念が生じる。正常な硬貨なら表が出る確率θは$1/2$であろうから、今回の場合の出現確率は$P(X=1)={}_{10}C_1(1/2)^1(1/2)^9=0.01$と極めて小さく常識的におかしい。さらに常識的におかしい事象として、表が 0 回、1 回しか出現しないというのがあるし、反対に 9 回、10 回も出現するという場合がある。これらのいずれかの場合が生じる確率は、$P(X=0)+P(X=1)+P(X=9)+P(X=10)=0.0215$で非常に小さく、この 10 回投貨の試行を 1000 回繰り返しても､この例以上はずれることは 21 回くらいしか出現しないことを示している。よって、この硬貨は異常であると考えてもおかしくない。この例の結果から、0.0215 の危険性はあるが、滅多に起こらないケースは信用できないという立場にたてば、この硬貨は正常（$\theta=1/2$）であるという前提（これを統計的仮説という）を否定してよいだろう。逆に、表の出る回数が 3 回～8 回以内ならば、このケースは信用できないわけではないので、この統計的仮説を否定はできない。このように、標本から得られる統計量（上例の硬貨の表の出る回数など）の出現によって統計的仮説を捨てる（棄却する)、或いは捨てない（採択する）ということを判断する手続きを統計的仮説検定という。仮説を棄却するか否かの判定の基準となる確率を危険率（又は有意水準）といい、実現値がこの範囲にはいるとき、仮説は棄却されるものとして、予め設定された統計量の値域を棄却域という。実際の検定では、通常、危険率を 0.05 又は 0.01 とすることが多い。



　以上を整理して検定の方式を以下の整理しておく。

1.検定しようとする母集団の未知の母数θに関して、統計的仮説　$H_0;\theta=\theta_0$をたてる。

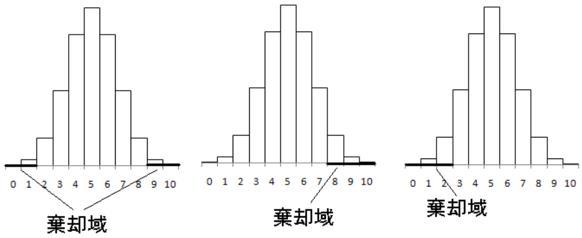
2.母集団からとられた標本により検定のための統計量R（以下、検定統計量という。記号は推定で用いたものなどを適宜用いる。）をつくり、これの標本分布を定める。

3.予め定められた有意水準αに関して$P(R\in W)\le\alpha$を満たす棄却域Wを定める。

4. 統計量の実現値Rが、W内ならH_0を棄却、そうでないならH_0を採択する。
検定の結果、仮説H_0が棄却されるとき、この検定は有意であるという。

検定は、仮説H_0自身が真か偽か、また検定の結果が棄却か採択か、により組合せとして四つの場合がある。つまり、「1.H_0が真で採択」「2.H_0が真で棄却」「3.H_0が偽で採択」「4.H_0が偽で棄却」がある。このうち 1.と 4.は正しい判断であったといえるが、2.と 3.は誤った判断ということになる。2.を第 1 種の誤り、3.を第 2 種の誤りという。有意水準αは第 1 種の誤りの確率を表している。一方、第 2 種の誤りに対しては危険率αのように確率的な保障を明確に与えることはできないという問題を孕んでいる。しかるに統計的仮説検定はH_0を棄却しようとする意図をもつことになり、この意味を含んでH_0を帰無仮説と呼ぶことが多い。

なお、棄却域は種々考えられるが、統計量の分布特性や第 2 種の誤りに対する配慮などから棄却域を両側にとって行う両側検定と片側にのみ棄却域をとって行う片側検定とがある。



（2）仮説検定の方法

1）平均値の検定

① 正規母集団$N(\mu,\sigma^2)$で母分散σ^2が既知のとき

帰無仮説　H_0 ; $\mu=\mu_0$

検定統計量　$u=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$は$N(0,1)$に従う。

有意水準（危険率）αに対する検定として両側検定の場合、$P(u_\alpha)=\dfrac{\alpha}{2}$の$u_\alpha$を$N(0,1)$から求める。$u<u_\alpha$なら$H_0$を採択、$u>u_\alpha$なら$H_0$を棄却する。

②正規母集団$N(\mu,\sigma^2)$で母分散σ^2が未知のとき

帰無仮説　H_0 ; $\mu=\mu_0$

検定統計量　$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n-1}}$　$\left(=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{U/\sqrt{n}}\right)$は自由度$n-1$の$t$分布に従う。

有意水準（危険率）αに対する両側検定として$P\big(t_{n-1}(\alpha)\big)=\dfrac{\alpha}{2}$の$t_{n-1}(\alpha)$を$t$分布表から求め

る。なお$t_{n-1}(\alpha)$表は$t_{n-1}(\alpha/2)$値として表示されている。$|t|<t_{n-1}(\alpha)$ならH_0を採択、

$|t|>t_{n-1}(\alpha)$ならH_0を棄却する。

２）平均値の有意差の検定
帰無仮説　H_0；$\mu_1=\mu_2$

検定統計量　$t=\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{U}\sqrt{\dfrac{n_1 n_2}{n_1+n_2}}$は自由度$n_1+n_2-2$の$t$分布に従う。

ただし$U=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)U_1^2+(n_2-1)U_2^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\dfrac{n_1S_1^2+n_2S_2^2}{n_1+n_2-2}}$

有意水準（危険率）αに対する両側検定として$P\left(t_{n_1+n_2-2}(\alpha)\right)=\dfrac{\alpha}{2}$の$t_{n_1+n_2-2}(\alpha)$を$t$分布表から求める。$|t|<t_{n_1+n_2-2}(\alpha)$なら$H_0$を採択、$|t|>t_{n_1+n_2-2}(\alpha)$なら$H_0$を棄却する。

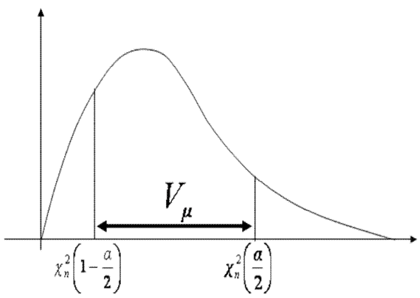
３）分散の検定
①母平均μが既知の場合

帰無仮説　H_0；　$\sigma^2=\sigma_0^2$

検定統計量　$V_\mu=\dfrac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$は自由度$n$のカイ二乗分布に従う。

有意水準（危険率）αに対する両側検定として$P\left(\chi_n^2\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)=1-\dfrac{\alpha}{2}$を満たす$\chi_n^2(1-\alpha/2)$、

$P\left(\chi_n^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)=\dfrac{\alpha}{2}$　を満たす$\chi_n^2(\alpha/2)$をカイ二乗分布表から求める。



$V_\mu\geq\chi_n^2\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$, $V_\mu\leq\chi_n^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$　なら　H_0　を採択、

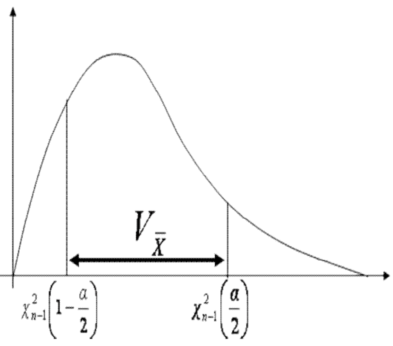
$V_\mu\leq\chi_n^2\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$, $V_\mu\geq\chi_n^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$なら$H_0$を棄却する。

②平均μが未知の場合

帰無仮説　H_0 ；　$\sigma^2 = \sigma_0^2$

検定統計量　$V_{\bar{X}} = \dfrac{(n-1)U^2}{\sigma^2}$ は自由度 $n-1$ のカイ二乗分布に従う。

有意水準（危険率）α に対する両側検定として $P\left(\chi_{n-1}^2\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)\right) = 1-\dfrac{\alpha}{2}$ を満たす $\chi_{n-1}^2(1-\alpha/2)$ 、$P\left(\chi_{n-1}^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right) = \dfrac{\alpha}{2}$ を満たす $\chi_{n-1}^2(\alpha/2)$ をカイ二乗分布表から求める。



$V_{\bar{X}} \geq \chi_{n-1}^2\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$, $V_{\bar{X}} \leq \chi_{n-1}^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ なら H_0 を採択、$V_{\bar{X}} \leq \chi_{n-1}^2\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$, $V_{\bar{X}} \geq \chi_{n-1}^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ なら H_0 を棄却する。

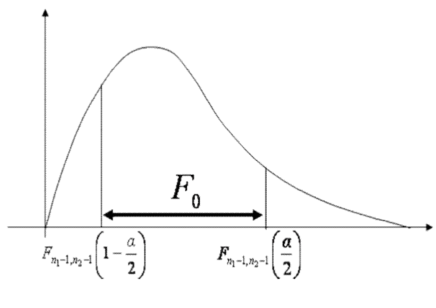
４）分散の有意差の検定

母平均、母分散ともに不明の二つの母集団 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$、$N(\mu_2, \sigma_2^2)$ から得られた標本値で、母分散 σ_1^2 と σ_2^2 の有意差を検定する。

帰無仮説　H_0 ；$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$　とする。

検定統計量　$F_0 = \dfrac{U_1^2}{U_2^2}$ は自由度 (n_1-1, n_2-1) の F 分布に従う。

有意水準（危険率）α に対する両側検定として $P\left(F_{n_1-1,n_2-1}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)\right) = 1-\dfrac{\alpha}{2}$ を満たす $F_{n_1-1,n_2-1}(1-\alpha/2)$ 、$P\left(F_{n_1-1,n_2-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right) = \dfrac{\alpha}{2}$ を満たす $F_{n_1-1,n_2-1}(\alpha/2)$ をカイ二乗分布表から求める。$F_0 \geq F_{n_1-1,n_2-1}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$, $F_0 \leq F_{n_1-1,n_2-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$



なら H_0 を採択、$F_0 \leq F_{n_1-1,n_2-1}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$, $F_0 \geq F_{n_1-1,n_2-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ なら H_0 を棄却する。