線形計画法

線形計画法（LP（Linear Programming）法）は計画や経営等において最適化問題を解く手法として活用される。式が線形であるため簡単であると同時に各種問題の基礎となっている。ここでは線形計画法の理解を助けるため、先にごく単純な例題で説明し、その後で最低限必要と考えられる基礎的事項を説明する。

１．例題

某都市内の２箇所に産業用地を整備し分譲することになった。各用地の整備に必要な単位面積当たりの必要な資源と利用可能な資源の上限及び各用地がもたらす利益は表 1.1 の通りである（単位は省略）。利益を最大にする用地整備規模（適正面積）の組合せを求めたい。

表1.1　各資源量の制約と利益

	用地 A	用地 B	資源の上限
資源1	2	3	15
資源2	2	1	9
利益	4	3	

（1）定式化と図形解法

適正面積について、用地ＡをX_1、用地ＢをX_2として、定式化すると次のようになる。

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1+3x_2 \le 15 \\ 2x_1+x_2 \le 9 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{array}\right\} \qquad (1.1)$$

$$Max \quad Z = 4x_1+3x_2 \qquad (1.2)$$

式(1.1)は制約条件、式(1.2)は目的関数である。

これを図解法で解こう。図 1.1 のハッチングで示した部分（端点 O,A,B,C で囲まれた多角形）は制約条件を満足する領域（制約領域）を示している。なおこの領域内（境界含む）の任意の２点を結ぶ直線上の点は必ず同一領域内にあるが、このような領域を凸領域といい、今回の多角形で囲まれた領域を凸多角形という。目的関数Ｚ

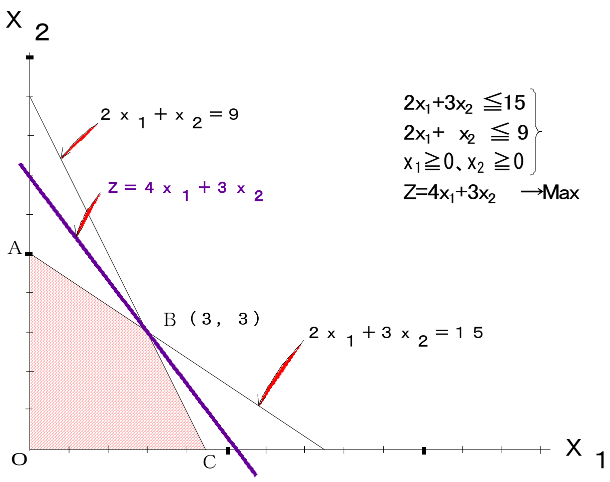


図1.1　線形計画法の図形解法

を最大にするには、目的関数を変形した式　$x_2=(-4/3)x_1+(Z/3)$　の切片を最大にすればよい。それは、つまり傾き(−4/3)の直線を原点から上にずらしていくときこの直線が制約領域をまさに離れんとする時（端点 B を通る時）が最大である。端点 B は直線 $2x_1+3x_2=15$ と $2x_1+x_2=9$ の交点なので、すぐに解けて座標(3、3)となり、これが適正解である。そして、この時の利益は Z＝21 で最大である。

（２）消去法による解法の応用～シンプレックス法

図解法は２次元だとわかりやすいが、３次元になると複雑でわかりにくくなり、４次元以上になるともはや表現は困難である。このため他の解法に頼る必要がある。その一つが連立方程式を消去法で解く方法である。

消去法で解く方法とは、方程式の係数のつくる行列を考え

・任意の二つの行を入れ換えること

・ある行を定数倍すること

・ある行を他の行に加えること

の三つの操作のことである。なお作業上「任意の二つの列を入れ換えること」が必要となる場合もあり、これを含めると四つの操作となる。

式(1.1)の制約式は不等号を含んでおり、このままでは解きにくいので等号にするため x_3、x_4 の新しい非負の変数（スラック（余裕）変数）を導入し、下記のように見通し良く整理して等式表現にする。このように新しく付加されたスラック変数を用いて変換された式(1.3)～(1.5)の形式を標準形と呼び、うち式(1.3)のように、各式においてその式にのみあって他の式にはない変数を含む形式を基底形式と呼ぶ。

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1+3x_2+x_3 \qquad\qquad =15 \\ 2x_1+\ \ x_2 \qquad\qquad +x_4=9 \end{array}\right\} \quad (1.3)$$

$$x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0,\ x_3\geqq 0,\ x_4\geqq 0 \qquad (1.4)$$

$$Z-4x_1-3x_2-0x_3-0x_4=0 \qquad (1.5)$$

式(1.3)の第 1 式では、$2x_1+3x_2\leqq 15$ にスラック(余裕)変数を導入して $2x_1+3x_2+x_3=15$（但し $x_3\geqq 0$）と未知数が３つの等式に変換している。これを図形でイメージすると、x_1、x_2 の 2 次元（平面図形）では $2x_1+3x_2=15$ を境界として原点を含む側になり、空間図形では $x_3\geqq 0$ なる条件より $2x_1+3x_2+x_3=15$ が x_1x_2 平面より上（$x_3\geqq 0$ 側）にある部分に対する点（x_1、x_2）の領域ということになる。第 2 式も同様に考えることができる。このことは連立不等式の解の領域を調べるのにスラック変数を用いることによって連立方程式の解を調べる問題に置き換えられていることがわかるであろう。

凸多角形の端点 O,A,B,C の座標は、O(0,0),A(0,5),B(3,3)),C（9/2,0）となるが、スラック

変数を含んだ第 1 式及び第 2 式に代入すると O(0,0,15,9),A(0,5,0,4),B(3,3,0,0),C(9/2,0,6,0)と、いずれも 0 が 2 つずつ含まれていることがわかる。これは、端点 A についてみると、式(1.1)の第 1 式の境界線と x_2 軸の交点であり、x_2 軸上の点ということは $x_1=0$ を意味し、境界線いわゆる直線 $2x_1+3x_2=15$ 上の点であるということは式(1.3)の第 1 式で $x_3=0$ となり、端点 A の座標を表わす x_1～x_4 の 4 つの要素のうち x_1 と x_3 の 2 つが 0 となる。他の端点も同じように座標の要素のうち 2 つが 0 になっている。ここでの未知数は 2 個であったが 3 個でも同じことが言え、一般に未知数が n 個ある連立不等式にスラック変数を付加した連立方程式の解（いわゆる凸多面体の頂点の座標）は、少なくとも n 個の変数が 0 になっている。このことを足掛かりに、スラック変数を含む全変数のうちいずれか 2 個の変数を必ず 0 に設定するという前提で、式(1.3)を消去法により解いてみよう。

■第 0 ステップ

何も作業を開始していない準備段階なので 0 ステップとして、スラック変数を導入した標準形を設定する。なお各変数の非負条件は省略する（以下、同様)。

$$\left.\begin{array}{ll} 2x_1+3x_2+x_3 \qquad\qquad =15 & ① \\ 2x_1+\ \ x_2 \qquad\qquad +x_4=9 & ② \\ Z-4x_1-3x_2-0x_3-0x_4=0 & ③ \end{array}\right\}$$

制約式群（ここでは①、②式）の中で一つの式にのみ現れる変数（ここでは、第 1 式の x_3，第 2 式の x_4）を基底変数と呼び、それ以外の変数を非基底変数（ここでは x_1、x_2）と呼ぶ。先に述べたように 2 個の変数を必ず 0 にすることを前提にすると言ったが、実は非基底変数の 2 個を 0 にするのである。

最初に、非基底変数 $x_1=0$、$x_2=0$ とすると、$x_3=15$、$x_4=9$　$Z=0$　となる。
これは図 1.1 の原点 O を示している。【座標　$x_1=0$, $x_2=0$; 原点 O】

次のステップへの準備作業として、Z をより大きくすることが目的なので、先の非基底変数の値をどの程度にするかの検討が必要である。第 0 ステップの目的関数をみると各変数の係数値より x_1 を増やしたほうがより大きくなるので、$x_1=\theta$ だけ増やすとすると（この時 $x_2=0$ のまま)、

①より　$x_3=15-2x_1\geqq 0$　,　　$x_1=\theta\leqq 15/2$

②より　$x_4=9-2x_1\geqq 0$　,　　$x_1=\theta\leqq 9/2$

となり、これらの条件を満足するのは $\mathrm{Min}\,\theta=9/2$ である。

■第 1 ステップ

第 0 ステップにおいて $x_1=\mathrm{Min}\,\theta=9/2$ が②式で決まった。よって、「②式を x_1 の係数が 1 になるよう整理し、この式を用いて他の①③では x_1 を消去したものに書き換える」という操作を行う。この結果は以下のようになる。

$$\left.\begin{array}{lllr} & 2x_2 + x_3 - x_4 = 6 & & ④ \\ & x_1 + 1/2\,x_2 + 1/2\,x_4 = 9/2 & & ⑤ \\ Z & - x_2 + 2\,x_4 = 18 & & ⑥ \end{array}\right\}$$

非基底変数 $x_2=0$、$x_4=0$ とすると、$x_1=9/2$、$x_3=6$、$Z=18$ となる。これは端点 C を示している。【座標　$x_1=9/2$、$x_2=0$；点 C】

この作業により、非基底変数は先（第 0 ステップ）の x_1，x_2から x_2，x_4と変化し、x_1と x_4が入れ替わった（非基底変数であった x_1が非基底変数に、非基底変数であった x_4が基底変数に、それぞれ入れ替わった）ことに注意したい。

次のステップへの準備作業を行う。目的関数⑥より Z は、変数 x_2の係数がマイナスなので、まだ増やすことができる。Z を大きくするためには非基底変数のうち、$x_2=0$、$x_4=0$ とした状態から $x_2=\theta$ だけ増やすことになる。（$x_4=0$ のまま）

④より　$x_3 = 6 - 2\,x_2 \geqq 0$，　$x_2 \leqq 3$

⑤より　$x_1 = 9/2 - 1/2\,x_2 \geqq 0$，　$x_2 \leqq 9$

となり、これらの条件を満足するのは $\mathrm{Min}\,\theta = 3$ である。

■第 2 ステップ

第 1 ステップにおいて $x_2=\mathrm{Min}\,\theta=3$ が④式で決まったので、④式の x_2の係数が 1 になるように整理し、この式を用いて他の⑤⑥式では x_2を消去したものに書き換える。この結果は以下のようになる。

$$\left.\begin{array}{llr} & x_2 + 1/2\,x_3 - 1/2\,x_4 = 3 & ⑦ \\ & x_1 \quad - 1/4\,x_3 + 3/4\,x_4 = 3 & ⑧ \\ Z & \quad + 1/2\,x_3 + 3/2\,x_4 = 21 & ⑨ \end{array}\right\}$$

x_3，x_4が非基底変数となった。ここでは、第 1 ステップでの基底変数 x_3が追い出されて非基底変数になり、非基底変数だった x_2が基底変数として登場してくる（x_3と x_2の間で基底変換が行われた）。非基底変数 $x_3=0$、$x_4=0$ とすると、$x_1=3$、$x_3=3$、$Z=21$ となる。これは端点 B を示している。【座標　$x_1=32$、$x_2=3$；点 B】

次のステップへの準備作業を行う。目的関数である⑨の x_3、x_4を 0 にしていくらか増やそうとすると各変数の係数がプラスであり、Z 値は 21 より減少する。つまりこれ以上増やせないので作業は終了である。

以上の一連の作業は、基底変換（各端点を移動）しながら最適解を得る作業を行っていることになる。このように消去法による基底変換を逐次行いながら最適解を求める計算方法をシンプレックス法と呼ぶ。

（３）シンプレックス表による解法

シンプレックス法は、消去法に幾つかの作業手続きを加えて機械的に解く方法であったが、これは下表のシンプレックス表（以下、単に表と呼ぶ）が用いられる。表の作成には幾つかスタイルがあるが、ここは用いる表はその一例である。

以下、表の記入と計算手順を述べる。

表 1.2 のイ列にステップ（計算回数）の値を、ロ列は各ステップで出現する基底変数名、ハ列には目的関数に示される基底変数の係数（C_i）、ニ列には各式の右辺項（b_i（基底変数の値））、ホ～リ列には変数名 x_1～x_4 及びＺの係数を記入する。Ｃｊ行には目的関数における各変数の係数を記入する。ヌ列は追い出す基底変数を特定するための計算作業欄である。ヲ欄は備考として表の行番号を示すとともに計算作業を記述する。なお、リ列については変数全てをもれなく記述することを原則としたならば記述すべきと言えようが、しかしこの列は計算過程に直接影響しないため必ずしも記述しておく必要性はない。よってリ列は以下省略する。

表1.2 シンプレックス表の作成様式

イ	ロ	ハ	ニ	ホ	ヘ	ト	チ	リ	ヌ	ヲ
ステップ	基底変数		C_j						θ	備考
		C_i	基底変数の値 b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	Z		

■ 第 0 ステップ

まず、次の標準形の式（再掲）に基づき 0 ステップの表内に値を記入する。

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2+x_3 \qquad\qquad &=15 \quad ① \\ 2x_1+x_2 \qquad\qquad +x_4 &=9 \quad ② \\ Z-4x_1-3x_2-0x_3-0x_4 &=0 \quad ③ \end{aligned}\right\}$$

なお、ハ列（C_i列）及び C_j 行のホ～チ列欄には、下式の目的関数の各変数の係数を記入する。

$$Z=4x_1+3x_2+0x_3+0x_4$$

これらを記入したタブロー（表という意味）を表 1.3 に示す。

		表1.3　0ステップのタブロー							
イ	ロ	ハ	ニ	ホ	ヘ	ト	チ	リ	ヌ
ステップ	基底変数		C_j	4	3	0	0	θ	備考
		C_i	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4		
0	x_3	0	15	2	3	1	0		①
	x_4	0	9	2	1	0	1		②
	z		0	−4	−3	0	0		③

次に、基底変換（基底変数と非基底変数の入れ替え）の準備作業を行う。

・目的関数の係数を示す表 1.3 の③行（シンプレックス基準行という）で各変数の係数（ホ～チ列欄の値）のうち負で絶対値が最大となっている値が存在する列を特定する。【ここでは表 1.4 のホ列である】

・表 1.4 に示すように、制約条件式の係数を表す①～②行（本体部分という）のニ列（b_i列）欄の値を、上記で特定されたホ列の値で除した値をリ列欄に記入し、このうち正で最小となっている値が存在する行を特定する。【ここでは 9/2 の②行である】

・上記でホ列と②行が特定されたので、これらが表で交差する欄（円が表示されている欄：ここをピボットという）を基準にした作業（次のステップの作業）に移行する。

・なお、③行ニ列の欄は目的関数の Z の値であり、この段階では値は 0 で図解法での原点 O（x_1＝0、X_2＝0）にあたる。

		表1.4　0ステップのタブローでのピボットの特定							
イ	ロ	ハ	ニ	ホ	ヘ	ト	チ	リ	ヌ
ステップ	基底変数		C_j	4	3	0	0	θ	備考
		C_i	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4		
0	x_3	0	15	2	3	1	0	15/2	①
	x_4	0	9	2	1	0	1	9/2	②
	z		0	−4	−3	0	0		③

■　第 1 ステップ

・0 ステップでのピボットを 1 にする作業を行う。つまり行全体を 2 で除す。この作業を行う欄は 0 ステップの本体部分で第 2 行目（つまり②の行）だったので、ここでも表 1.5 の 1 ステップの本体部分の第 2 行目（つまり⑤の行）で行う。このとき、この行の基底変数が x_1 に変更となり、C_i 列欄は通常の目的関数における変数の係数を記入する。

・④の行については、先のピボットを 1 にした列（ホ列）の欄を 0 にする計算（備考欄の計算式を参照）を行い、他の列にも同じ計算式で値を与える。⑥の行も④の行と同じ作業を施す。

・全ての値が記入し終えたらシンプレックス基準行に負の値がないか探す。なければ作業終了。ここではヘ列が－1 となっているので、この列でピボットを探す事になる。θ の計

算値から明らかなように本体部分の１行目（④の行）が 3 と正値で最小なので、ピボットは④行へ列ということになる。次のステップではここを基準にした作業を行う。

・目的関数のＺの値は 18 で、このときは図解法では x_1 =9/2、X_2 =0 の点Ｃにあたる。これは、この１ステップの b_i 列 x_1 =9/2、 x_3 =6 に現れている。（x_3 は 6 となっているもののるもののスラック変数であり図解法の座標（x_1、 x_2）では対象外である。
　またｘ$_2$、 x_4 　は非基底変数であり、いずれも値は 0 である。）

表1.5　1ステップまでのタブロー

イ	ロ	ハ	ニ	ホ	ヘ	ト	チ	リ	ヌ
ステップ	基底変数		C_j	4	3	0	0	θ	備考
		C_i	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4		
0	x_3	0	15	2	3	1	0	15/2	①
	x_4	0	9	2	1	0	1	9/2	②
	z		0	−4	−3	0	0		③
1	x_3	0	6	0	2	1	−1	3	④=①−2*⑤
	x_1	4	9/2	1	1/2	0	1/2	9	⑤=②/2
	z		18	0	−1	0	2		⑥=③−(−4)*⑤

■第 2 ステップ

・第１ステップで行った作業と同じように操作をおこなう。すると表 1.6 のようになる。

・次のステップの作業に入るためのシンプレックス基準行の確認を行う。しかし、負の値は存在しない（目的関数のＺ値を増加できない）ので作業終了となる。

・目的関数のＺの値は 21 で、このとき図解法では x_1 =3, x_2 =3 の点Ｂにあたる。基底変数の値は b_i 列に表われている。

表1.6　2ステップまでのタブロー

イ	ロ	ハ	ニ	ホ	ヘ	ト	チ	リ	ヌ
ステップ	基底変数		C_j	4	3	0	0	θ	備考
		C_i	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4		
0	x_3	0	15	2	3	1	0	15/2	①
	x_4	0	9	2	1	0	1	9/2	②
	z		0	−4	−3	0	0		③
1	x_3	0	6	0	2	1	−1	3	④=①−2*⑤
	x_1	4	9/2	1	1/2	0	1/2	9	⑤=②/2
	z		18	0	−1	0	2		⑥=③−(−4)*⑤
2	x_2	3	3	0	1	1/2	−1/2		⑦=④/2
	x_1	4	3	1	0	−1/4	3/4		⑧=⑤−1/2*⑦
	z		21	0	0	1/2	3/2		⑨=⑥−(−1)*⑦【終了】

表 1.6 がシンプレックス表による解法の最終版であるが、この表は次節以降で度々参照す

る。

ここで、各ステップの b_i、x_3， x_4及び Z 列欄（表 1.2 参照）の係数ベクトルは次のようになっていることに注意しよう。(Z 欄については表 1.2　参照)

先ず b_i については

0 ステップ
$$\begin{bmatrix}15\\9\\0\end{bmatrix}=15\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+9\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \qquad (1.6)$$

1 ステップ
$$\begin{bmatrix}6\\9/2\\18\end{bmatrix}=15\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+9\begin{bmatrix}-1\\1/2\\2\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \qquad (1.7)$$

2 ステップ
$$\begin{bmatrix}3\\3\\21\end{bmatrix}=15\begin{bmatrix}1/2\\-1/4\\1/2\end{bmatrix}+9\begin{bmatrix}-1/2\\3/4\\3/2\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \qquad (1.8)$$

同様に、x_1 については

0 ステップ
$$\begin{bmatrix}2\\2\\-4\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \qquad (1.9)$$

1 ステップ
$$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-1\\1/2\\2\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \qquad (1.10)$$

2 ステップ
$$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1/2\\-1/4\\1/2\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-1/2\\3/4\\3/2\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \qquad (1.11)$$

x_2， x_3， x_4及び Z 欄の係数ベクトルでも同様に示されることを確かめてもらいたい。
この関係は後述の感度分析の計算に大切な役割を果たす。

■演習１　次の問題を図解法、及び消去法で求めよ。

　　シンプレックス表による計算結果を参考にせよ。

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 20 \\ 6x_1 + 4x_2 &\le 27 \\ 3x_1 + x_2 &\le 12 \end{aligned}\right\}$$

$$0 \le x_1, 0 \le x_2$$

$$Z = 4x_1 + 5x_2 \quad \rightarrow \quad Max$$

			Cj	4	5	0	0	0		
ステップ	基底変数	C_i	b_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	θ	計算方法
0	X_3	0	20	2	5	1	0	0	20/5	①
	X_4	0	27	6	4	0	1	0	27/4	②
	X_5	0	12	3	1	0	0	1	12/1	③
	Z		0	−4	−5	0	0	0		④
1	X_2	5	4	2/5	1	1/5	0	0	20/2	⑤＝①／5
	X_4	0	11	22/5	0	−4/5	1	0	55/22	⑥＝②－⑤＊4
	X_5	0	8	13/5	0	−1/5	0	1	40/13	⑦＝③－⑤＊1
	Z		20	−2	0	1	0	0		⑧＝④－⑤＊(－5)
2	X_2	5	3	0	1	3/11	−1/11	0		⑨＝⑤－⑩＊(2/5)
	X_1	4	5/2	1	0	−2/11	5/22	0		⑩＝⑥／(22／5)
	X_5	0	3/2	0	0	3/11	−13/22	1		⑪＝⑦－⑩＊(13／5)
	Z		25	0	0	7/11	5/11	0		⑫＝⑧－⑩＊(－2)

■演習２　次の問題を図解法、消去法及びシンプレックス表により求めよ

$$\left.\begin{aligned} &3X_1 + 4X_2 + X_3 \leqq 2 \\ &X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leqq 1 \\ &X_1 \geqq 0,\ X_2 \geqq 0,\ X_3 \geqq 0 \end{aligned}\right\}$$

$$Z = 3X_1 + 6X_2 + 2X_3 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Max}$$

２．線形計画法の解法

凸計画法のなかで制約条件式・目的関数いずれも一次式で表される場合を線形計画法と呼ぶ。凸計画法は凸領域を扱う問題である。凸領域とは、当該領域内（境界含む）の異なる 2 点を結ぶ直線上の任意の点が常に同一領域内にあるような空間をいう。本節は、数理計画法（関根泰次著　岩波）などが詳しいので参照されたい。

（１）線形制約条件式の性質

式(2.1)の方程式ｍ個、変数ｎ個の線形連立方程式を考える。一般に変数値はｍ＜ｎなら一義的に決まらず、ｍ＝ｎなら一義的に決めることができ、ｍ＞ｎなら決められるときと決められないときがある。

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \quad (2.1)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (2.2)$$

これは行列とベクトル表示で見通しがよくなる。

$$\left.\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \quad (2.3)$$

但し　$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

或いは

$$x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + \cdots + x_n\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_0 \qquad (2.4)$$

但し　$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \equiv [\mathbf{p}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_m], \qquad \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \equiv \mathbf{p}_0$

（２）可能解と基底解

式(2.3)の制約式を満足する x を実行可能解（または可能解）と呼んでいる。標準形の制約式において、１行目の式を $a_{11}(\neq 0)$ で除し、１行目以外の式では x_1 の係数を 0 にする作業を行うことで(2.5)のようになり、順次この作業を繰り返して(2.6)のようになる。但し、上付きの(h)は作業回数を示す。これを基底形式（または標準形）と呼ぶが、 $x_1 \cdots x_m$ のｍ個の係数ベクトルは各々独立であり他のベクトルを線形結合により表示できる。

$$
\left.\begin{array}{l}
x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\
\qquad a'_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\
\qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad a'_{m2}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \\
\\
x_1, \cdots\cdots\cdots, x_n \geq 0
\end{array}\right\}(2.5)
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + a_{m,m+1}{}^{(h)}x_{m+1} + + a_{m,m+2}{}^{(h)}x_{m+2} + \cdots + a_{m,n}{}^{(h)}x_n = b_1^{(h)} \\
\quad x_2 \qquad\qquad\qquad + a_{m,m+1}{}^{(h)}x_{m+1} + + a_{m,m+2}{}^{(h)}x_{m+2} + \cdots + a_{m,n}{}^{(h)}x_n = b_2^{(h)} \\
\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad\qquad x_m \quad + a_{m,m+1}{}^{(h)}x_{m+1} + + a_{m,m+2}{}^{(h)}x_{m+2} + \cdots + a_{m,n}{}^{(h)}x_n = b_m^{(h)} \\
\\
x_1, \cdots\cdots\cdots, x_n \geq 0
\end{array}\right\}(2.6)
$$

そして、変数の非負条件により(2.6)から(2.7)となる。

$$
\left.\begin{array}{c}
a_{m,m+1}{}^{(h)}x_{m+1} + + a_{m,m+2}{}^{(h)}x_{m+2} + \cdots + a_{m,n}{}^{(h)}x_n \leq b_1^{(h)} \\
a_{m,m+1}{}^{(h)}x_{m+1} + + a_{m,m+2}{}^{(h)}x_{m+2} + \cdots + a_{m,n}{}^{(h)}x_n \leq b_2^{(h)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m,m+1}{}^{(h)}x_{m+1} + + a_{m,m+2}{}^{(h)}x_{m+2} + \cdots + a_{m,n}{}^{(h)}x_n \leq b_m^{(h)} \\
x_1, \cdots\cdots\cdots, x_n \geq 0
\end{array}\right\}(2.7)
$$

ところで(2.7)の、たとえば

$$a_{m,m+1}{}^{(h)}x_{m+1} + a_{m,m+2}{}^{(h)}x_{m+2} + \cdots + a_{m,n}{}^{(h)}x_n \leq b_m^{(h)}$$

を満たす各変数は

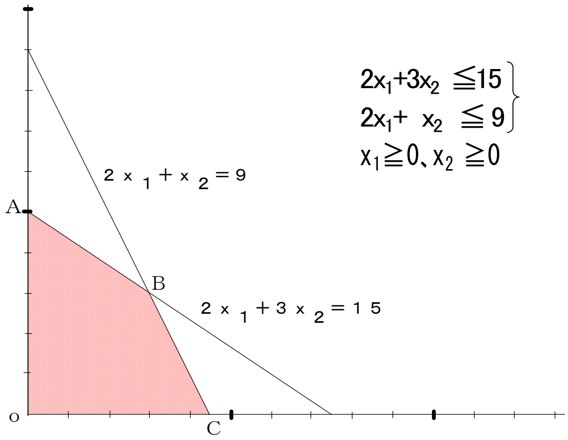
$$a_{m,m+1}{}^{(h)}x_{m+1} + a_{m,m+2}{}^{(h)}x_{m+2} + \cdots + a_{m,n}{}^{(h)}x_n = b_m^{(h)}$$

によって二分される空間の片側を表している。このことは n 次元空間における m 個の超平面が交わってできる点の集合が、(n—m)次元空間では m 個の超平面の片側の重なり合う部分で表わされることを示している。

次に、式(2.8)は既に基底形式となっており、式(2.9)と等価である。ｘ３、ｘ４をスラック変数と考えると、スラック変数を含む等式群ははじめから基底形式となっているということである

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2+x_3 \quad &= 15 \\ 2x_1+\ x_2 \quad +x_4 &= 9 \end{aligned}\right\}(2.8)$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2 \quad &\leq 15 \\ 2x_1+\ x_2 \quad &\leq\ 9 \end{aligned}\right\}\ (2.9)$$
$$x_1,x_2 \geq 0$$



式(2.8)は n－m=2 の 2 次元空間における反平面で表わすことができ、それは図のハッチング部分である。式(2.8)の係数をベクトル表示したとしよう。すると独立なのは x_3,x_4 の係数ベクトルである。こうした独立の係数ベクトルとなっている変数を基底変数（ここでは x_3,x_4 ）と呼び、そうでない変数を非基底変数（ここでは x_1,x_2 ）と呼ぶ。いま基底変数を 0 とおけば基底変数の値は一義的に決まる。このようにして決定される変数の値（つまり $x_1=0, x_2=0, x_3=15, x_4=9$) の組を基底解と呼ぶ。

一般に、n 個の変数のうち(n－m)個の変数を全て 0 とおき、m 個の基底変数だけを残して変数 m 個の m 元連立一次方程式について考えるのだが、この結果として(n－m)個超の変数が 0 となることがあり、この場合を退化しているという。ここでは説明を単純にするため退化の場合は扱わないことにする。

話を戻して、基底解の組合せは ${}_n\mathrm{C}_m$ 個存在し、(1.5)では ${}_4\mathrm{C}_2=6$ となる。表 2.1 は基底解の組合せを示したものである。このうち変数は非負条件があるため、これに適合するものを可能基底解と呼ぶ。式(2.8)において可能基底解は 4 個であり図の制約領域の端点 O,A,B,C にあたる。

表2.1 基底解の組合せ

連番	x_1	x_2	x_3	x_4	可能基底解	図中の端点
1	0	0	15	9	○	O
2	0	5	0	4	○	A
3	0	3	−9	0	×	
4	−15	0	0	6	×	
5	9/2	0	6	0	○	C
6	3	3	0	0	○	B

（３）制約領域の性質

式(2.1)(2.2)で示される制約領域の性質を確認しておこう。

①制約領域は凸である

式(2.1)を満たす $\mathbf{x}^{S1}(\geq \mathbf{0})$ と $\mathbf{x}^{S2}(\geq \mathbf{0})$ があると仮定して $A\mathbf{x}^{S1} = \mathbf{p}_0$, $A\mathbf{x}^{S2} = \mathbf{p}_0$ $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}^{S1} + (1-\alpha)\mathbf{x}^{S2}$ に対しては $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ であり $A\mathbf{x} = A(\alpha\mathbf{x}^{S1} + (1-\alpha)\mathbf{x}^{S2}) = \alpha\mathbf{p}_0 + (1-\alpha)\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_0$ となる。

よって、一般に線形制約条件に基づく制約領域は凸である。

②(2.1)を満たす端点 $\mathbf{x}^s$ の 0 でない要素 r 個による $\sum_{l=1}^{r} x_l^S \mathbf{p}_l = \mathbf{p}_0 \alpha_l$ において $\mathbf{p}_l$ は線形独立である。なぜなら $\mathbf{p}_l$ が線形従属と仮定しよう・。すると $\sum_{l=1}^{r} \alpha_l \mathbf{p}_l = 0$ において の少なくとも一つは 0 でない。よって線形従属なら等式

$$\sum_{l=1}^{r} x_l^S \mathbf{p}_l \pm k \sum_{l=1}^{r} \alpha_l \mathbf{p}_l = \sum_{l=1}^{r} (x_l^S \pm k\alpha_l)\mathbf{p}_l = \mathbf{p}_0$$

において k を十分小さな値として

$$x_l^S + k\alpha_l > 0, \quad x_l^S \pm k\alpha_l > 0, \quad l = 1 \cdots r$$

とすると

$$\mathbf{x}^{S1} = \begin{bmatrix} x_1^s + k\alpha_1 & \cdots & x_r^s + k\alpha_r & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T, \mathbf{x}^{S2} = \begin{bmatrix} x_1^s - k\alpha_1 & \cdots & x_r^s - k\alpha_r & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$$

とすると $\mathbf{x}^S = (\mathbf{x}^{S1} + \mathbf{x}^{S2})/2$ であるから、端点が他の二つの基底解の一次結合で表わされることになり不合理である。

よって、 $\mathbf{p}_l, (l = 1, \cdots, r)$ は線形独立でなければならない。

③(2.1)を満たす端点 $\mathbf{x}^e$ の 0 でない要素の数は m 個を超えることはない。

$\mathbf{p}_l$ の次元は m であるから(m+1)個のベクトルは必ず線形従属となるため r は m を超えることはない。

以上をまとめると

・線形制約領域は凸である

・基底解のうち基底変数が非負の端点は可能基底解である

・基底解はたかだか m 個の 0 でない要素を持ち制約領域の端点である

（４）線形計画法の定式化

線形計画法の一般的な数学モデルとしては以下のように定式化される。

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n \geq 0 \end{array}\right\} (2.10\text{a})$$

$$Max \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \quad (\text{但し} \, c_i \geq 0)(2.10\text{b})$$

また、これにスラック変数を加えて等式に変換した式(2.11)～(2.13)を標準形式と呼び、式(2.10)の形を基底形式と呼んだ。

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+\cdots\cdots\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1} \qquad\qquad\qquad = b_1 \\ a_{21}x_1+\cdots\cdots\cdots+a_{2n}x_n \qquad +x_{n+2} \qquad\quad = b_2 \\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots\cdots\cdots+a_{mn}x_n \qquad\qquad +x_{n+m} = b_m \end{array}\right\} (2.11)$$

$$x_1,\cdots\cdots\cdots,x_n,x_{n+1},x_{n+2},\cdots,x_{n+m}\geq 0 \qquad (2.12)$$

$$z=c_1x_1+\cdots\cdots\cdots\cdots+c_nx_n+c_{n+1}x_{n+1}+c_{n+2}x_{n+2}+\cdots+c_{n+m}x_{n+m} \quad \to \max \quad (2.13)$$

（但し、$c_{n+1}=c_{n+2}=\cdots=c_{n+m}=0$）

これは行列とベクトルを用いて簡潔に表現される。

$$\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{b} \qquad (2.11)'$$

$$\tilde{\mathbf{x}}\geq 0 \qquad (2.12)'$$

$$z=\tilde{\mathbf{c}}\tilde{\mathbf{x}}\to Max \qquad (2.13)'$$

但し、$\tilde{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, $\tilde{\mathbf{x}}^t=[x_1 \ \cdots \ x_n \ \ x_{n+1} \ \cdots \ x_{n+m}]$,

$\mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, $\tilde{\mathbf{c}}=[c_1 \ \cdots \ c_n \ \ 0 \ \cdots \ 0]$

また制約条件式で式(2.14)のようにも表わせる。

$$I_m\mathbf{x}_m=\mathbf{b}-A\mathbf{x} \qquad (2.14)$$

但し、

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $I_m=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_m=\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$

いま $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ とすると $\mathbf{x}_m=\mathbf{b}$ となり $z=0$ となるも可能基底解の一つである。これより目的関数を増加させることを考える。(2.14)を個別に書くと次のようになる。

$$x_{n+1}=b_1-(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)=b_1-\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j$$

$$x_{n+2}=b_2-(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n)=b_2-\sum_{j=1}^{n}a_{2j}x_j$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$x_{n+m}=b_m-(a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n)=b_m-\sum_{j=1}^{n}a_{mj}x_j$$

これを目的関数に代入すると次のようになる。

$$z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}x_{n+i}=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}(b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j)=\sum_{i=1}^{m}b_ic_{n+i}+\sum_{j=1}^{n}(c_j-\sum_{i=1}^{m}a_{ij}c_{n+i})x_j=w_0-\sum_{j=1}^{n}w_jx_j$$

但し、 $w_0=\sum_{i=1}^{m}b_ic_{n+i}$, $w_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}c_{n+i}-c_j$

いま $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ なので $z=w_0$ であるが $b_i\geq 0$ なら x_j を幾分増加させることは可能である。 $w_j>0$ なら z は減少し、 $w_j<0$ なら増加である。 $w_j<0$ のうち $\max(abs(w_j))$ を増加させるとより早く増加する。問題はどこまで大きくできるかである。いま一つの端点を、

$$\tilde{\mathbf{x}}^S=[x_1\ \cdots\ x_m\ 0\ \cdots\ 0]^t, x_i>0, i=1,\cdots,m$$

とすると、

$$x_1\mathbf{p}_1+x_2\mathbf{p}_2+\cdots x_m\mathbf{p}_m=\mathbf{p}_0 \quad (2.15)$$

の関係がある。m 個の m 次元ベクトル $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_m$ は独立なので n 個の m 次元ベクトル $\mathbf{p}_j(j=1,\cdots,n)$ は $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_m$ の線形結合として表わせる。

$$\mathbf{p}_j=\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\mathbf{p}_i$$

例えば、 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_m$ 以外の任意のベクトル $\mathbf{p}_{m+1}$ は次のように表わされる。

$$\mathbf{p}_{m+1}=x_{1,m+1}\mathbf{p}_1+x_{2,m+1}\mathbf{p}_2+\cdots+x_{m,m+1}\mathbf{p}_m \quad (2.16)$$

(3.9)を θ 倍して(3.8)との差をとったものを整理すると下式となる。

$$(x_1-\theta x_{1,m+1})\mathbf{p}_1+(x_2-\theta x_{2,m+1}\mathbf{p}_2+\cdots(x_m-\theta x_{m,m+1})\mathbf{p}_m+\theta\mathbf{p}_{m+1}=\mathbf{p}_0$$

よって各要素が非負の $\tilde{\mathbf{x}}=[x_1-\theta x_{1,m+1}\ \cdots\ x_m-\theta x_{m,m+1}\ \ \theta\ \cdots\ 0]^t$ となっている。非負なので $x_i-\theta x_{i,m+1}\geq 0, \theta>0, i=1,\cdots,m$ という条件の下で $\mathbf{x}^{S1}$ となる新たな可能解が決まる。

特に端点 $\tilde{\mathbf{x}}$ が決定されるためには $0<\theta\leq\min\frac{x_i}{x_{i,m+1}}$ でなければならず、

$\theta_0=\min_{i\in I}\frac{x_i}{x_{i,m+1}}$ とすればよい。

このことは、従来の基底ベクトル $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_m$ の係数のうち少なくとも一つは 0 となり（非基底ベクトルとなり） $\mathbf{p}_{m+1}$ が新たに基底ベクトルとして加わることを示している。いわゆる基底変数と非基底変数が入れ替わる（基底変換する）ことになる。

以上の作業を $w_j<0$ となっている x_j について繰り返して行い、 $w_j\geq 0$ となった時点で基底変換作業を中止することで z の最適解が得られる。この方法をシンプレックス法と呼び、一連の計算作業を表形式で行っているものをシンプレックス表という。

３．シンプレックス表による解法

式(2.11)(2.13)を下記のように書直して、各変数の係数を表形式にする。

$$\mathbf{b} = \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} \qquad (3.1)$$

$$0 = -\tilde{\mathbf{c}}\tilde{\mathbf{x}} + Z \qquad (3.2)$$

式(3.1)(3.2)において各変数の係数を表 3.1 のように書き並べることにしよう。

表3.1　目的関数を含む基底形式（初期段階）

基底変数	基底変数の値	変　数								
		x_1	…	x_j	…	x_n	x_{n+1}	…	x_{n+m}	Z
x_{n+1}	b_1	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	1	…	0	0
x_{n+2}	b_2	a_{21}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	0	…	0	0
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮		⋮	⋮
x_{n+i}	b_i	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{in}	0	…	0	0
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮		⋮	⋮
x_{n+m}	b_m	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	0	…	1	0
Z	ω_0	ω_1	…	ω_j	…	ω_n	0	…	0	1

この表の最右欄（Z 列）は計算に直接影響しないので省略することが殆どである。この表 3.1 を、消去法における各操作を数回施して整理したものが表 3.2 である（Z 列は省略）。なお、上付き(h)は計算回数を示している。基底変換毎の各計算表をタブローとも呼ぶ。各タブローの最下行（基底変数 Z 行）をシンプレックス基準行と呼び、基底変数 x_1～x_mの行全体を本体部分と呼ぶことにする。

表3.2　目的関数を含む基底形式（基底変数変換作業をh回施した段階）

基底変数	基底変数の値	変　数							
		x_1	…	x_m	x_{m+1}	…	x_j	…	x_{m+n}
x_1	$b_1^{(h)}$	1	…	0	$a_{1,m+1}^{(h)}$	…	$a_{1j}^{(h)}$	…	$a_{1,m+n}^{(h)}$
x_2	$b_2^{(h)}$	0	…	0	$a_{2,m+1}^{(h)}$	…	$a_{2j}^{(h)}$	…	$a_{2,m+n}^{(h)}$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮		⋮		⋮
x_i	$b_i^{(h)}$	0	…	0	$a_{i,m+1}^{(h)}$	…	$a_{ij}^{(h)}$	…	$a_{i,m+n}^{(h)}$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮		⋮		⋮
x_m	$b_m^{(h)}$	0	…	1	$a_{m,m+1}^{(h)}$	…	$a_{mj}^{(h)}$	…	$a_{m,m+n}^{(h)}$
Z	$\omega_0^{(h)}$	0	…	0	$\omega_{m+1}^{(h)}$	…	$\omega_j^{(h)}$	…	$\omega_{m+n}^{(h)}$

この表の内容を式で書くと次のようになる。但し、N= n ＋m としている。

$$
\begin{aligned}
x_i &= b_i^{(h)} - \sum_{j=m+1}^{N(=n+m)} a_{ij}^{(h)} x_j \qquad (i = 1, \cdots, m) \\
Z &= \omega_0^{(h)} - \sum_{j=m+1}^{N} \omega_j^{(h)} x_j
\end{aligned}
\qquad (3.3)
$$

シンプレックス基準行の $\omega_{ij}^{(h)}$ は、非基底変数が 1 単位変化したときの目的関数の増加量を示している。

$$Z = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{j=m+1}^{N} c_j x_j \qquad (3.4)$$

とも表現できる。(4.2)に(4.1)の第 1 式を代入すると次のようになる。

$$Z = \sum_{i=1}^{m} c_i (b_i^{(h)} - \sum_{j=m+1}^{N} a_{ij}^{(h)} x_j) + \sum_{j=m+1}^{N} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i - \sum_{j=m+1}^{N} (\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}^{(h)} - c_j) x_j \qquad (3.5)$$

(4.2)式と(4.3)式の右辺の各項を比較すると次のことが成立していることが分かる。

$$\omega_0^{(h)} = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i \qquad (3.6)$$

$$\omega_j^{(h)} = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}^{(h)} - c_j \qquad (3.7)$$

この式は、シンプレックス表を計算していく際に計算過程の確認をする上で重要なものである。表 4.1 のシンプレックス基準行の値も式(3.6)(3.7)から得られることを確認されたい。

さて、順次のタブローどう行っていくかであるが、これはシンプレックス基準が負で絶対値が最大の非基底変数を新たに基底変数に加える（この時、現在の基底変数のうちどれか一つが非基底変数へ追い出される）作業を行うことである。具体的には次の順序で行う。

手順１．シンプレックス表での計算の回数（ステップ） $h = 0$ とする。

手順２．シンプレックス判定

全ての $\omega_j^{(h)}$ を調べる。全てが非負なら最適解なので作業終了。そうでなければ手順３へ。

手順３．基底に組み入れる変数の決定

$\omega_j^{(h)} < 0$ のうち絶対値が最大のもの（$\omega_k^{(h)}$）に対応する変数 x_k を特定する（選ぶ)。

手順４．基底から追い出す変数の決定

x_k の $a_{ik}^{(h)} > 0$ が存在するならば、それについて $\theta_i (= b_i^{(h)} / a_{ik}^{(h)})$ を計算し、うち最小のも

の（θ_l）に対応する x_l を基底から追い出す。基底変数の係数全てが $a_{ik}^{(h)} \leq 0$ ならば、目的関数の改良が無限となるので計算中止。

手順５． 新しい基底形式の計算

次の新しいタブローに入り以下の作業を行う。この新タブローのステップを $h = h+1$ とする。手順３・４で特定された (l, k) 要素をピボット（pivot）とする下記の計算を行い新しい基底形式を求める。

〔本体部分〕

・l 行 $(i = l)$ ：

$$b_l^{(h+1)} = b_l^{(h)} \Big/ a_{lk}^{(h)}, \quad a_{lj}^{(h+1)} = a_{lj}^{(h)} \Big/ a_{lk}^{(h)}$$

・l 行以外の行 $(i = 1, \cdots m, i \neq l)$ ：

$$b_i^{(h+1)} = b_i^{(h)} - (b_l^{(h)} \Big/ a_{lk}^{(h)}) a_{ik}^{(h)}, \quad a_{ij}^{(h+1)} = a_{ij}^{(h)} - (a_{ij}^{(h)} \Big/ a_{lk}^{(h)}) a_{ik}^{(h)}$$

〔シンプレックス基準行〕

$$\omega_0^{(h+1)} = \omega_0^{(h)} - (b_l^{(h)} \Big/ a_{lk}^{(h)}) \omega_k^{(h)}, \quad \omega_j^{(h+1)} = \omega_j^{(h)} - (a_{ij}^{(h)} \Big/ a_{lk}^{(h)}) \omega_k^{(h)}$$

手順２に戻る。

なお手順 4 で最小の θ_i が一意に決まらない場合、同じ最小値をもつ複数行の中から任意の一つを選んで作業を進めると、次のステップで基底変数の値が０となるものが表われる（これを退化しているという）。この場合、作業を進めても過去の作業過程で得られた基底が再び得られ（循環現象（サイクリング）という）、最適解に達することが出来ない場合が起こる。この場合には最小の θ_i を与える複数行のうちどれか一つの行の基底変数の値に微小値 ε を加算して作業を進め、最後に ε ＝０として最適解を得る方法（摂動法と呼ぶ）がある。

以上の計算作業において、目的関数の変数の係数が頻繁に用いられるが、表 3.2 にはその係数を明示したものとなっていないので、実際の作業で不便である。表 1.6 では C_i 列と C_j 行を追記した表となっている。

ところで式(3.1)と似た形式、つまり表 3.1 の最下行（Z 行）と最右列（Z 列）の係数も含めた形式にしたもの（目的関数含む基底形式）にすると、b_j、x_1〜x_{n+m}、および Z までを対応づけて考えることができる。

$$P_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ -c_1 \end{bmatrix}, \cdots, P_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \\ -c_n \end{bmatrix}, P_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, P_{n+m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とすると

$$P_0 = b_1 P_{n+1} + b_2 P_{n+2} + \cdots + b_m P_{n+m} + 0 \cdot \mathbf{z}$$

$$P_j = a_{1j} P_{n+1} + a_{2j} P_{n+2} + \cdots + a_{mj} P_{n+m} - c_j \mathbf{z} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

となり、表 3.2（h ステップのタブロー）では次のように示される。

$$P_0^{(h)} = b_1 P_{n+1}^{(h)} + b_2 P_{n+2}^{(h)} + \cdots + b_m P_{n+m}^{(h)} + 0 \cdot \mathbf{z}^{(h)} \tag{3.8}$$

$$P_j^{(h)} = a_{1j} P_{n+1}^{(h)} + a_{2j} P_{n+2}^{(h)} + \cdots + a_{mj} P_{n+m}^{(h)} - c_j \mathbf{z}^{(h)} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.9}$$

式(1.6)~(1.8)は式(3.8)を、式(1.9)~(1.11)は式(3.9)を、それぞれ具体的数値で示したものである。

４．シンプレックス法の一般化

（１）等式の制約条件がある場合

次のように第 1 式が等号であったとする。

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

この場合、ν_1（技巧変数という）を用いて次のように書き換える。

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n + \nu_1 = b_1$$

そして目的関数では、技巧変数に－M を乗じたものを加えて表現する。

$$Max \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n - M\nu_1$$

この M は罰金といわれるもので、正の極めて大きな値と想定する。このことは目的関数を最大にするためにはシンプレックス計算において最終的に $\nu_1 = 0$ でなければならず、等式条件が満足される。

下記は具体例を示したものである。シンプレックス表の最初のステップは標準形の係数を忠実に書き写したものであるが、式(3.6)、(3.7)が成立していない。この式が成立するように書き直した 0 ステップから計算を進める必要がある。

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 = 15 \\ 2x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{array}\right\} \qquad (1.1)$$

$$Max \quad Z = 4x_1 + 3x_2 \qquad (1.2)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + \nu_1 \qquad = 15 \\ 2x_1 + x_2 \qquad + x_3 = 9 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{array}\right\}$$

$$Max \quad Z = 4x_1 + 3x - M\nu_1$$

ステップ	基底変数		Cj	4	3	－M	0	θ	
		Ci	bi	X1	X2	ν1	X3		
－	ν1	-M	15	2	3	1	0		
	X3	0	9	2	1	0	1		
	z			-4	-3	M	0		
0		-M	15	2	3	1	0	5	
		0	9	2	1	0	1	9	
	z		-15M	-2M-4	-3M-3	0	0		
1	X2	3	5	2/3	1	1/3	0	15/2	
	X3	0	4	4/3	0	-1/3	1	3	
	z		15	-2	0	M+1	0		
2	X2	3	3	0	1	1/6	-1/2		
	X1	4	3	1	0	-1/4	3/4		
	z		21	0	0	1/2+M	3/2		

（２）不等号の向きが逆の場合

下式のように不等号が逆になっている場合を考えよう。

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n \ge b_1 \qquad (b_1 > 0)$$

このときは、両辺に－1 を乗じて不等号を通常の向きに直す。

$$-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \cdots\cdots\cdots - a_{1n}x_n \le b_1$$

ここでスラック変数 x_{n+1} を付加する。

$$-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \cdots\cdots\cdots - a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1$$

この場合、最初の基底解が $x_{n+1} = -b_1$ となって非負条件に反することになるから、この等

式に再度－1 を乗じておき、技巧変数を加える。

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n - x_{n+1} + v_1 = b_1$$

目的関数は下式のように設定する。

$$Max \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + 0 \cdot x_{n+1} - Mv_1$$

（3） b が負の場合

これの場合は両辺に－1 を乗じて（2）の場合と同様の方法で設定する。

５．感度分析

線形計画法を用いた作業を行う際に、条件を変更したり新しく追加したりすることが起こりうるので、そのときの影響の程度や最適解の変化を調べる必要がでてくる。このような解析を感度分析という。

（１）目的関数の係数 C_j の変更

１）基底変数に対応する係数 C_k が変化するとき

表 3.2 の最終タブロー（h ステップ目）でのチェックを行う。このタブローに現れる基底変数 X_k の係数 C_k が ΔC_k だけ変化したときシンプレックス基準は、次のようになる。

$$\omega_j^{(h)'} = \sum_i c_i a_{ij}^{(h)} + \Delta c_k a_{kj}^{(h)} - c_j = \omega_j^{(h)} + \Delta c_k a_{kj}^{(h)}$$

これが非負であれば最適解が変化しない。

$$\omega_j^{(h)'} = \omega_j^{(h)} + \Delta c_k a_{kj}^{(h)} \geq 0$$

より ΔC_k がとる範囲は次のようになる。

$$\Delta c_k \geq -\omega_j^{(h)} / a_{kj}^{(h)} \qquad (a_{kj}^{(h)} > 0)$$
$$\Delta c_k \leq -\omega_j^{(h)} / a_{kj}^{(h)} \qquad (a_{kj}^{(h)} < 0)$$

これが次のようであれば最適解は変化しないことになる。

$$\max_{a_{kj}^{(h)}>0}\left\{-\omega_j^{(h)} / a_{kj}^{(h)}\right\} \leq \Delta c_k \geq \min_{a_{kj}^{(h)}<0}\left\{-\omega_j^{(h)} / a_{kj}^{(h)}\right\}$$

なおここでの j は、基底変数はシンプレックス基準が常に 0 なので、非基底変数が対象になる。

例として表 1.6 のステップ 2 をもとにして計算すると、基底変数 x_1 の目的関数の係数 C_1 が最適解に影響しないで変更出来る値は、－（3/2／3/4）≦ ΔC_1 ≦－（1/2／－1/4）、つまり－2≦ ΔC_1 ≦2 となり、よって 2≦ C_1 ≦6 ならば最適解に影響しないことになる。また基底変数 x_2 の目的関数の係数 C_2 の場合は、同様にして、－（1/2／1/2）≦ ΔC_1 ≦－（3/2／－1/2)、つまり－1≦ ΔC_1 ≦3 となり、よって 2≦ C_2 ≦6 ならば最適解に影響しないことになる。

２）非基底変数に対応する係数 C_k が変化するとき

非基底変数 X_k の係数 C_k が ΔC_k だけ変化したとき、その非基底変数に対応するシンプレックス基準のみが変化し、下式のようになる。これが非負であれば最適解は変わらない。

$$\omega_k^{(h)'} = \sum_{i \in N_B} c_i a_{ij}^{(h)} - (c_k + \Delta c_k) = \omega_k^{(h)} - \Delta c_k \qquad (N_B\text{は基底変数集合})$$

$$\omega_k^{(h)} - \Delta c_k \geq 0$$

$$\omega_k^{(h)} \geq \Delta c_k$$

同様に表 1.6 のステップ 2 をもとにして計算すると、非基底変数 x_3 の目的関数の係数 C_3 が最適解に影響しないで変更出来る値は、式（）に代入して、$\Delta C_1 \leqq 1/2$、x_4 の目的関数の係数 C_4 の場合は $\Delta C_4 \leqq 3/2$ となる。

（2）制約条件の定数 b_i の変更

シンプレックス計算が h 回まで進んだとき最適解が得られているとして、その時の係数ベクトルの関係式(3.8)を各要素ごとに表わすと

$$b_i^{(h)} = \sum_{k=1}^{m} b_k \cdot a_{i,n+k}^{(h)} \qquad (i = 1,2,\cdots,m)$$

となる。b_l が Δb_l だけ変化しても、解が実行可能であるためには下式のようでなければならない。

$$\sum_{k=1}^{m} b_k \cdot a_{i,n+k}^{(h)} + \Delta b_l \cdot a_{i,n+l}^{(h)} = b_i^{(h)} + \Delta b_l \cdot a_{i,n+l}^{(h)} \geq 0$$

つまり、

$$\Delta b_l \geq -b_i^{(h)} / a_{i,n+l}^{(h)} \qquad (a_{i,n+l}^{(h)} > 0)$$

$$\Delta b_l \leq -b_i^{(h)} / a_{i,n+l}^{(h)} \qquad (a_{i,n+l}^{(h)} < 0)$$

そして下式が全ての i に成立していれば最適解は変化しない。

$$\max_{a_{i,n+l}^{(h)} > 0} \left\{ -b_i^{(h)} / a_{i,n+l}^{(h)} \right\} \leq \Delta b_l \geq \min_{a_{i,n+l}^{(h)} < 0} \left\{ -b_i^{(h)} / a_{i,n+l}^{(h)} \right\}$$

例として表 1.6 のステップ 2 をもとにして計算すると、b_1 の変更が最適解に影響しないで変更出来る値は、－（3／1/2）≦ Δb_1 ≦－（3／－1/4）、つまり－6≦ Δb_1 ≦12 となり、よって 9≦b_1≦27 ならば最適解に影響しないことになる。また b_2 の場合は、同様にして、－（3／3/4）≦ Δb_2 ≦－（3／－1/2）、つまり－4≦ Δb_1 ≦6 となり、よって 5≦b_2≦15 ならば最適解に影響しないことになる。

（3）新しい変数の追加

新しい変数 X_k が追加された場合、最終（h 回目）タブローにおける係数ベクトルは式■で求められる。元の問題の最適解が変化しないためには、この変数のシンプレックス基準が非負でなければならない。よって、下式のように示される。

$$\omega_k^{(h)} = \sum_{i \in N_B} c_i a_{ij}^{(h)} - c_k \geq 0$$

６．双対問題

（１）主問題と双対問題

これまでは、下記の問題について考えてきた。これを主問題と呼ぶ。

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+\cdots\cdots\cdots+a_{1n}x_n\le b_1 \\ a_{21}x_1+\cdots\cdots\cdots+a_{2n}x_n\le b_2 \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots\cdots\cdots+a_{mn}x_n\le b_m \end{array}\right\}$$

$$x_1,\cdots\cdots\cdots,x_n\ge 0$$

$$z=c_1x_1+\cdots\cdots\cdots\cdots+c_nx_n\quad\to\max$$

これに対して、下記のように定式化したものを考える。これを双対問題と呼ぶ。

$$\left.\begin{array}{l} y_1a_{11}+\cdots\cdots\cdots+y_ma_{m1}\ge c_1 \\ y_1a_{12}+\cdots\cdots\cdots+y_ma_{m2}\ge c_2 \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1a_{1n}+\cdots\cdots\cdots+y_ma_{mn}\ge c_n \end{array}\right\}$$

$$y_1,\cdots\cdots\cdots,y_m\ge 0$$

$$w=y_1b_1+\cdots\cdots\cdots\cdots+y_mb_m\quad\to\min$$

ベクトル表示で書くと以下のようになる。

主問題：$\begin{cases} A\mathbf{x}\le\mathbf{b} \\ \mathbf{0}\le\mathbf{x} \\ z=\mathbf{cx}\quad\max \end{cases}$、双対問題：$\begin{cases} \mathbf{y}A\ge\mathbf{c} \\ \mathbf{0}\le\mathbf{y} \\ w=\mathbf{yb}\quad\min \end{cases}$

但し、$A=\begin{bmatrix} a_{11}, & \cdots & ,a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}, & \cdots & ,a_{mn} \end{bmatrix},\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},\mathbf{c}=[c_1,\ \cdots\ ,c_n],\mathbf{y}=[y_1,\ \cdots\ ,y_m]$

この問題は例えば次のような企業行動として理解できる。

ある企業が製造部門と業務開拓部門をもっていたとすると、製造部門は限られた資源制約の下で生産額を最大にするように行動する（主問題）であろうし、業務開拓部門は製品価格をどんなに高くてもたかだか資源の生産性（１単位の製品を生産するのに必要な資源の価格）に止める条件を出すことで他社の追随を許さず全資源購入価格を最小にするよう

に行動する（双対問題）であろう。

双対問題もシンプレックス表で解くことができる。
式(1.1)、(1.2)を双対問題に書き換えると(6.1)、(6.2)のようになる。

主問題

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1+3x_2 \le 15 \\ 2x_1+x_2 \le 9 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{array}\right\} \qquad (1.1)$$

$$Max \quad Z = 4x_1 + 3x_2 \qquad (1.2)$$

双対問題

$$\left.\begin{array}{l} 2y_1+2y_2 \ge 4 \\ 3y_1+\ \ y_2 \ge 3 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0 \end{array}\right\} \qquad (6.1)$$

$$Min \quad w = 15y_1 + 9y_2 \qquad (6.2)$$

この(6.1)、(6.2)にマイナスを乗じて主問題の形式にしてスラック変数を導入し標準形にして（式(6.3)、(6.4))、シンプレックス計算しようとするとシンプレックス基準行がプラスなので進めることができない。罰金法を用いれば可能であるが作業がやや煩雑になる。

$$\left.\begin{array}{l} -2y_1-2y_2+y_3 \qquad = -4 \\ -3y_1-\ \ y_2 \qquad +y_4 = -3 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0 \end{array}\right\} \qquad (6.3)$$

$$Max \quad w' = -15y_1 - 9y_2 + 0y_3 + 0y_4 \qquad (6.4)$$

そこで表 6.1 のように、シンプレックス表の行と列を入れ換えた計算作業を行う方法がある。

表6．1　双対法によるシンプレックス計算表

ステップ	基底変数	b_i	b_j / c_i	-15	-9	0	0	備考
				y_1	y_2	y_3	y_4	
0	y_3	0	-4	-2	-2	1	0	①
	y_4	0	-3	-3	-1	0	1	②
	w'		0	15	9	0	0	③
	θ			15/2	9/2			④=③／①
1	y_2	-9	2	1	1	-1/2	0	⑤=①／(−2)
	y_4	0	-1	-2	0	-1/2	1	⑥=②+⑤
	w'		-18	6	0	9/2	0	⑦=③−9*⑤
	θ			3		9		⑧=⑦／⑥
2	y_2	-9	3/2	0	1	-3/4	1/2	⑩=⑤−⑨
	y_1	-15	1/2	1	0	1/4	-1/2	⑨=⑥／(−2)
	w'		-21					
	θ			0	0	3	3	

これは、主問題の解き方と殆ど同じであるが、異なるのはピボットを探すときにまず負の基底変数のうち絶対値が最大の行を選び、この行の中で係数が負となっているものを対象に、シンプレックス基準行をこの係数値で除した値のうち絶対値が最大の列を選ぶ。この交点がピボットである。これをもとに新しい基底形式を求め次のサイクルに移る作業を行う。これを繰り返しながら新しい基底解が全て正の値になれば、そこが最適解であり計算が終了する。なお最初のステップでシンプレックス基準行の非基底変数の値は非負であることが必要である。この表 6.1 と表 1.6 を比較してみると、主問題の解と双対問題の解が各表のシンプレックス基準行と基底変数列の間で入れ替わって表示されているだけで、同じ解が得られている。

（2）双対定理

主問題に対して双対問題を定義するとき、一方が実行可能解をもてば他方も解をもち、次の関係がある。　$z = \mathbf{cx} \le \mathbf{yb} = w$　　そして、両問題の最適解を、それぞれ $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*$ とすると、$\mathbf{cx}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b}$ の関係が成立している。

主問題が $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と等式条件の場合は、$A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$ と $-A\mathbf{x} \le -\mathbf{b}$ の２つの式に書き直せて、そのとき、これらを制約式群として捉えた場合の双対問題は $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}$ を変数とする次の形式となる。

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{(1)}A - \mathbf{y}^{(2)}A \ge \mathbf{c} \\ \mathbf{0} \le \mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{0} \le \mathbf{y}^{(2)} \\ w = \mathbf{y}^{(1)}\mathbf{b} - \mathbf{y}^{(2)}\mathbf{b} \quad \min \end{cases}$$

これは、

$$\begin{cases} (\mathbf{y}^{(1)} - \mathbf{y}^{(2)})A \ge \mathbf{c} \\ \mathbf{0} \le \mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{0} \le \mathbf{y}^{(2)} \\ w = (\mathbf{y}^{(1)} - \mathbf{y}^{(2)})\mathbf{b} \quad \min \end{cases}$$

となり、ここで $\mathbf{y}^{(1)} - \mathbf{y}^{(2)} \equiv \mathbf{y}$ とすると、$\mathbf{y}$ は符号制約のない変数ベクトルとなり、次のようになり、このような双対生を非対称双対性と呼ぶ。

主問題：$\begin{cases} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \le \mathbf{x} \\ z = \mathbf{cx} \quad \max \end{cases}$　　双対問題：$\begin{cases} \mathbf{y}A \ge \mathbf{c} \\ \mathbf{0} \le \mathbf{y}, \mathbf{0} > \mathbf{y} \\ w = \mathbf{yb} \quad \min \end{cases}$