電気磁気学Ⅰ　第５回

電界と電位（２）

電子情報システム工学科
奥宏史

今日学ぶこと

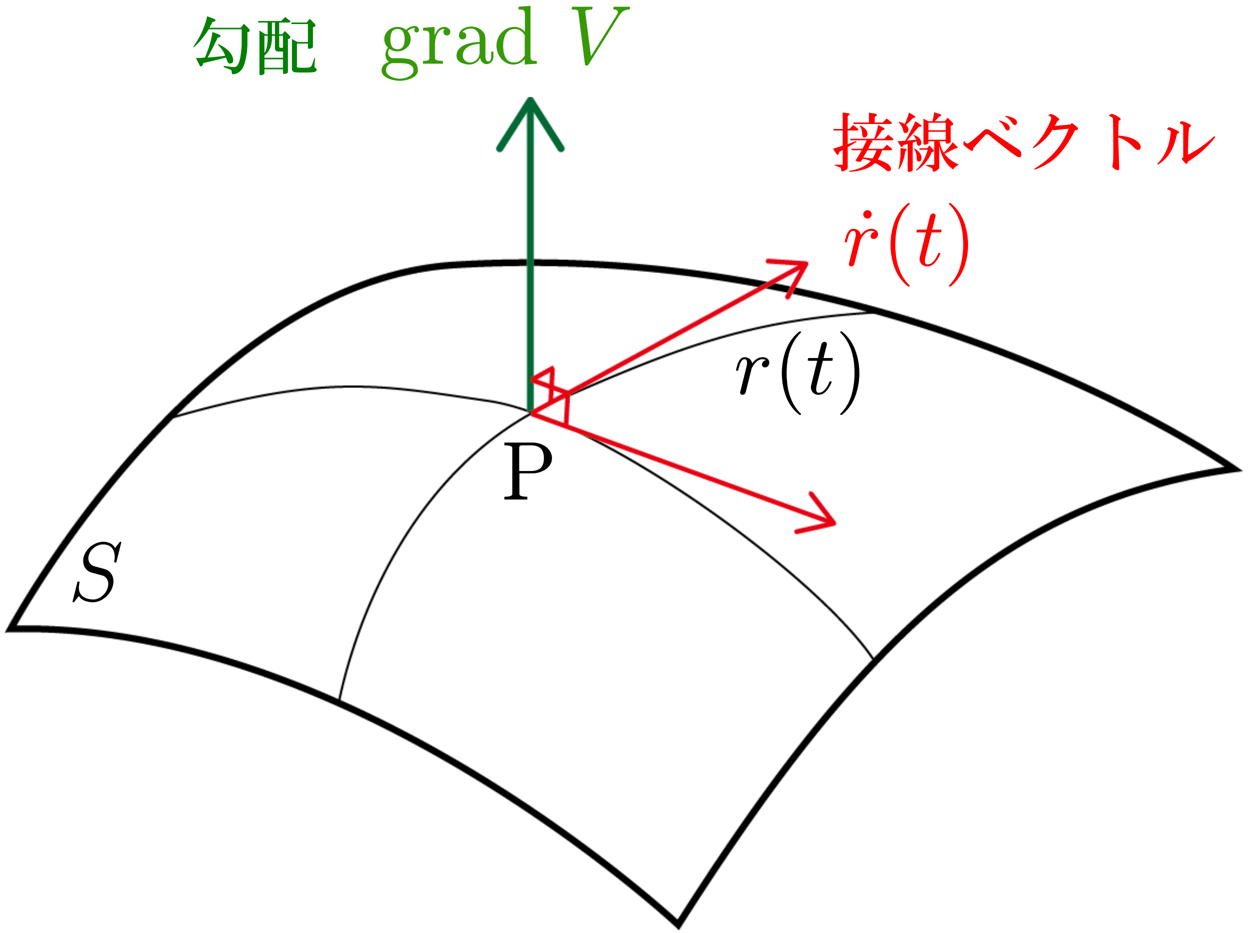
- 等電位面
- 勾配(gradient)

grad V の意味

1. 等電位面に直交する法線ベクトル

2. スカラ場 V の最急傾斜方向ベクトル

1. 「等電位面に直交する法線ベクトル」



$V(x,y,z)$：電位（スカラ場）

S：　$V(x,y,z)=c$　等電位面

$r(t)$：点 P を通る等電位面
S 上の任意曲線

$$r(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \in S$$

等電位面の式 $V(x(t), y(t), z(t)) = c$ の両辺を t で微分すると，

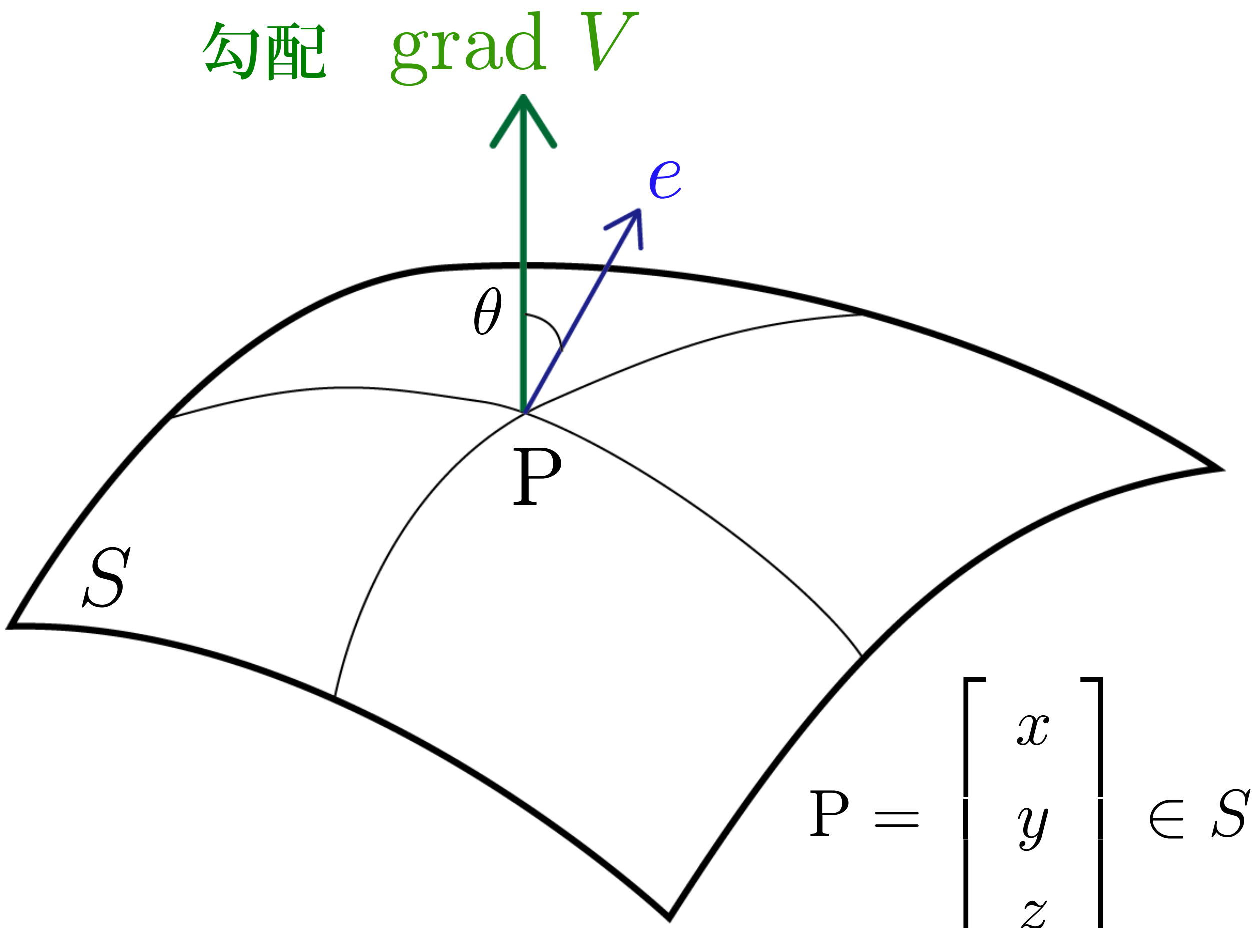
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0$$

よって，

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{つまり，} \quad \mathrm{grad}V \cdot \dot{r} = 0$$

これは等電位面 S 上の任意の曲線の接線ベクトルと勾配が直交することを意味する．したがって， $\mathrm{grad}V$ は等電位面の法線ベクトルである．

2. 「スカラ場 V の最急傾斜方向ベクトル」



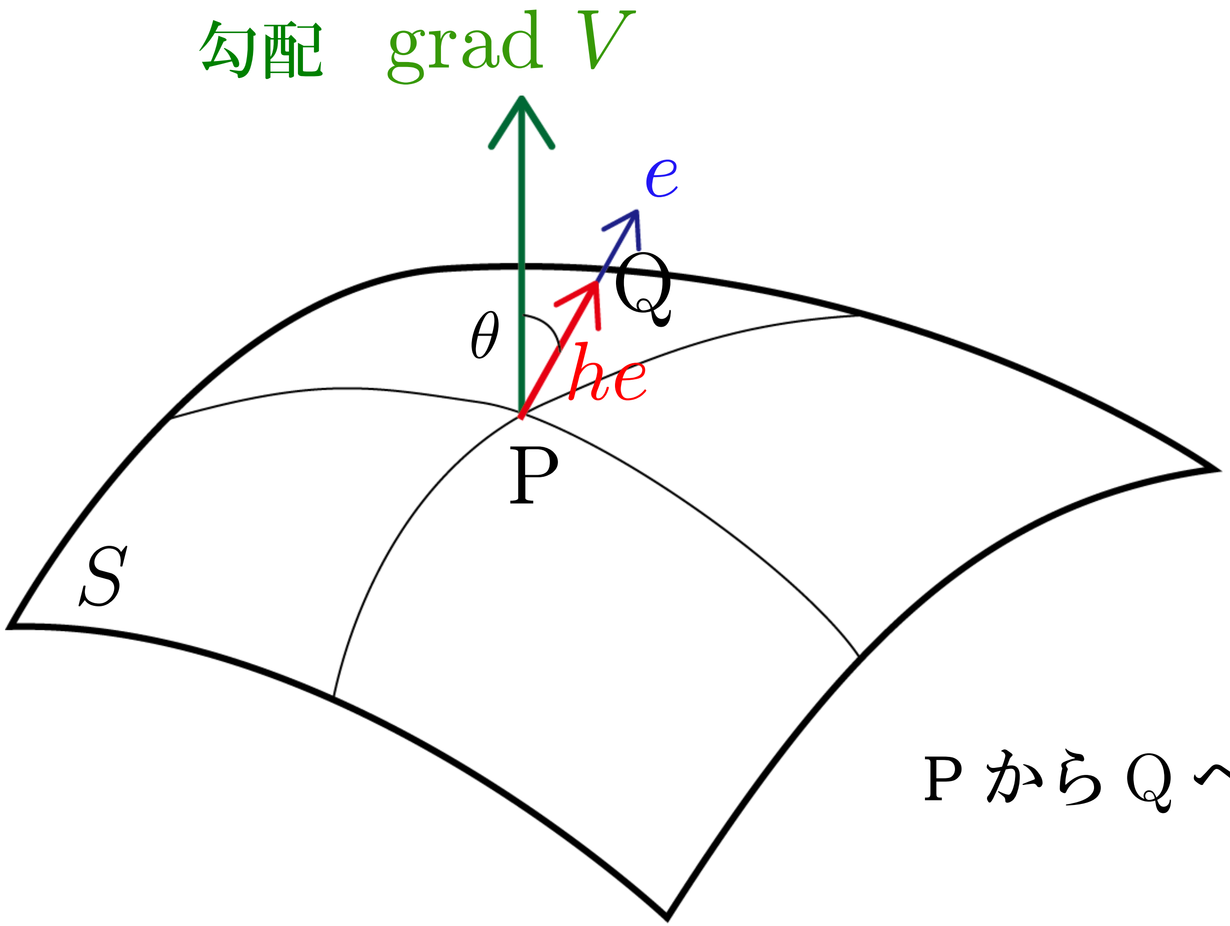
$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in S$$

$V(x, y, z)$：電位（スカラ場）

S：　$V(x, y, z) = c$　等電位面

e：　任意の単位ベクトル

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}, \quad \|e\| = 1$$



点 P から e 方向へ微小距離 h だけ移動した点を Q とする．つまり，

$$\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} x + he_1 \\ y + he_2 \\ z + he_3 \end{bmatrix}$$

P から Q へ位置が変化したときの V の変化率は，

$$\frac{V(\mathrm{Q}) - V(\mathrm{P})}{h} = \frac{V(x + he_1, y + he_2, z + he_3) - V(x, y, z)}{h}$$

$$\frac{V(\mathrm{Q})-V(\mathrm{P})}{h}=\frac{V(x+he_1,y+he_2,z+he_3)-V(x,y,z)}{h}$$

上式の $h \to 0$ に対する極限値が存在するとき，

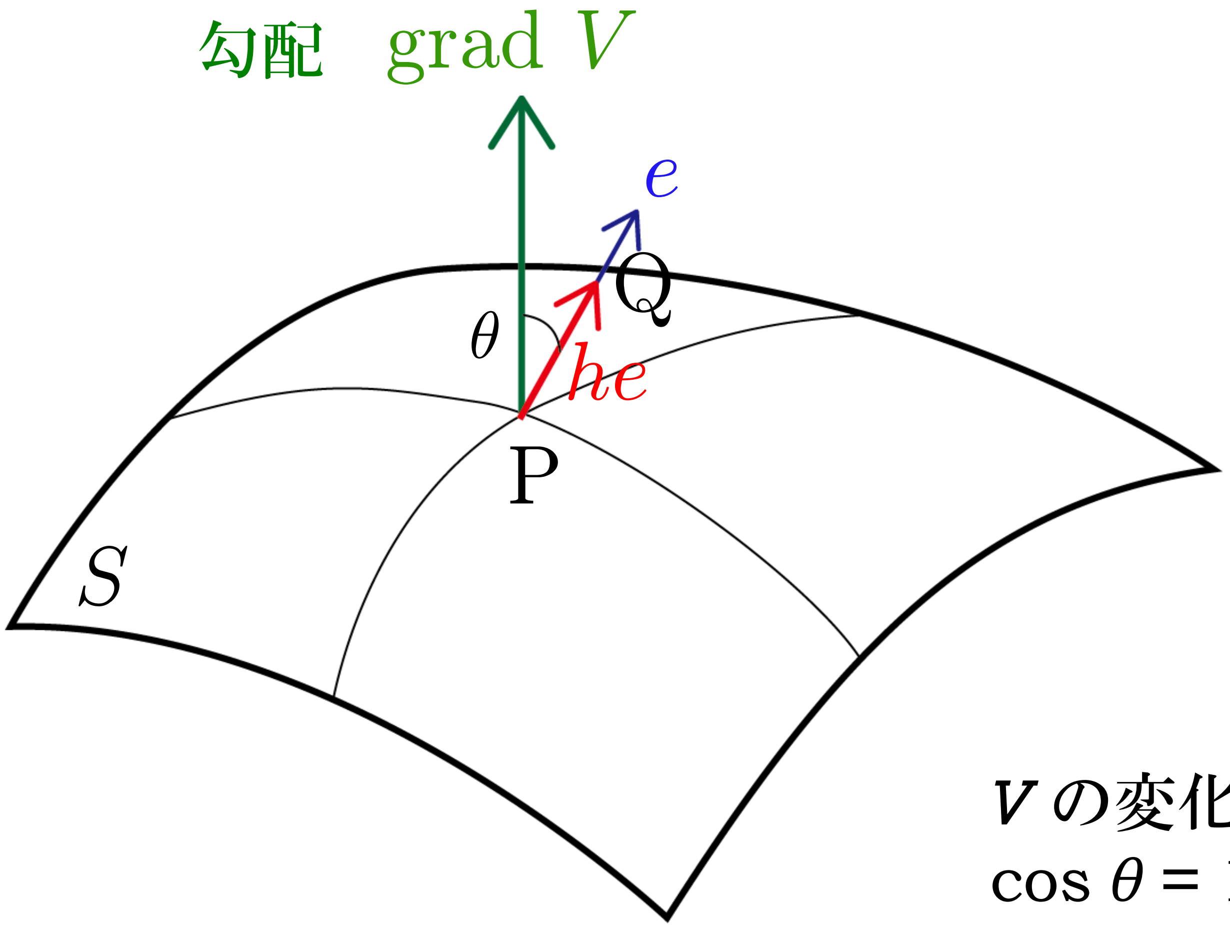
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}e}&=\lim_{h\to 0}\frac{V(\mathrm{Q})-V(\mathrm{P})}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{V(x+he_1,y+he_2,z+he_3)-V(x,y,z)}{h}\end{aligned}$$

は，Ｖのｅ方向への**方向微分**と呼ばれる．さらに式変形すると，

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}e} = \lim_{h\to 0} \frac{V(x+he_1, y+he_2, z+he_3) - V(x,y,z)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\{V(x+he_1, y+he_2, z+he_3) - V(x, y+he_2, z+he_3)$$
$$+V(x, y+he_2, z+he_3) - V(x, y, z+he_3)$$
$$+V(x, y, z+he_3) - V(x,y,z)\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{V(x+he_1, y+he_2, z+he_3) - V(x, y+he_2, z+he_3)}{he_1} e_1 \right.$$
$$+ \frac{V(x, y+he_2, z+he_3) - V(x, y, z+he_3)}{he_2} e_2$$
$$\left. + \frac{V(x, y, z+he_3) - V(x,y,z)}{he_3} e_3 \right\}$$



$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}e} = \frac{\partial V}{\partial x}e_1 + \frac{\partial V}{\partial y}e_2 + \frac{\partial V}{\partial z}e_3$$
$$= \mathrm{grad}V \cdot e = \|e\|\|\mathrm{grad}V\|\cos\theta$$
$$= \|\mathrm{grad}V\|\cos\theta$$

ただし，θ はベクトル e と勾配とのなす角とする．

V の変化率 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}e$ が最大になる e の方向は，$\cos\theta = 1$ となるとき，つまり，$\theta = 0$ のときである．

以上より，grad V はスカラ場 V の最急傾斜方向に向いていることがわかる．

まとめ

- 勾配の意味について学んだ.