電気磁気学Ｉ　第６回

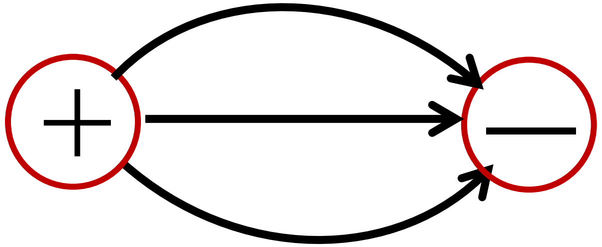
電荷と電界（１）

電子情報システム工学科
奥宏史

今日学ぶこと

- ベクトル場の発散(divergence)と回転(rotation)の演算法
- 面積分

電荷と電界



「電界を電気力線で表したときに，もし電気力線に端があれば、その端が電荷である。」

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E}$$

ナブラ(NABLA)

記法 $$\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

微分演算子を要素とするベクトル

例： スカラ場 $V(x,y,z)$ に対して，

$$\boldsymbol{\nabla} V = \mathrm{grad} V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{bmatrix}$$

発散（divergence, ダイバージェンス）

ベクトル場 $E(x,y,z) = \begin{bmatrix} E_x(x,y,z) \\ E_y(x,y,z) \\ E_z(x,y,z) \end{bmatrix}$ に対して，

$$\mathrm{div}E = \boldsymbol{\nabla} \cdot E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

回転（rotation）

ベクトル場 $E(x,y,z) = \begin{bmatrix} E_x(x,y,z) \\ E_y(x,y,z) \\ E_z(x,y,z) \end{bmatrix}$ に対して，

$$\mathrm{rot}\,E = \boldsymbol{\nabla} \times E = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

ベクトル場

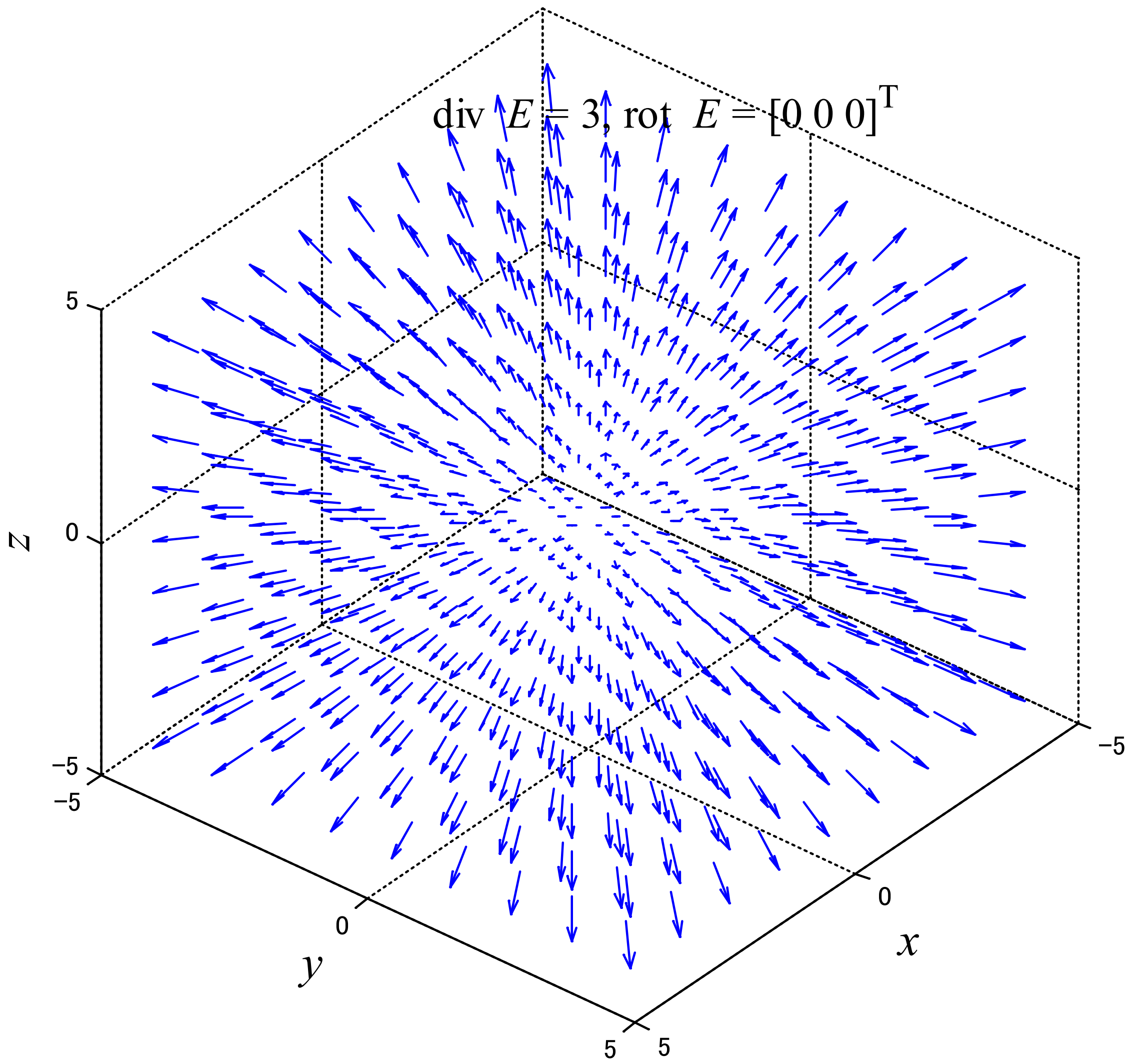
$$E(x,y,z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{div}E = \boldsymbol{\nabla} \cdot E = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

湧き出し

$$\mathrm{rot}E = \boldsymbol{\nabla} \times E = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

渦なし



ベクトル場

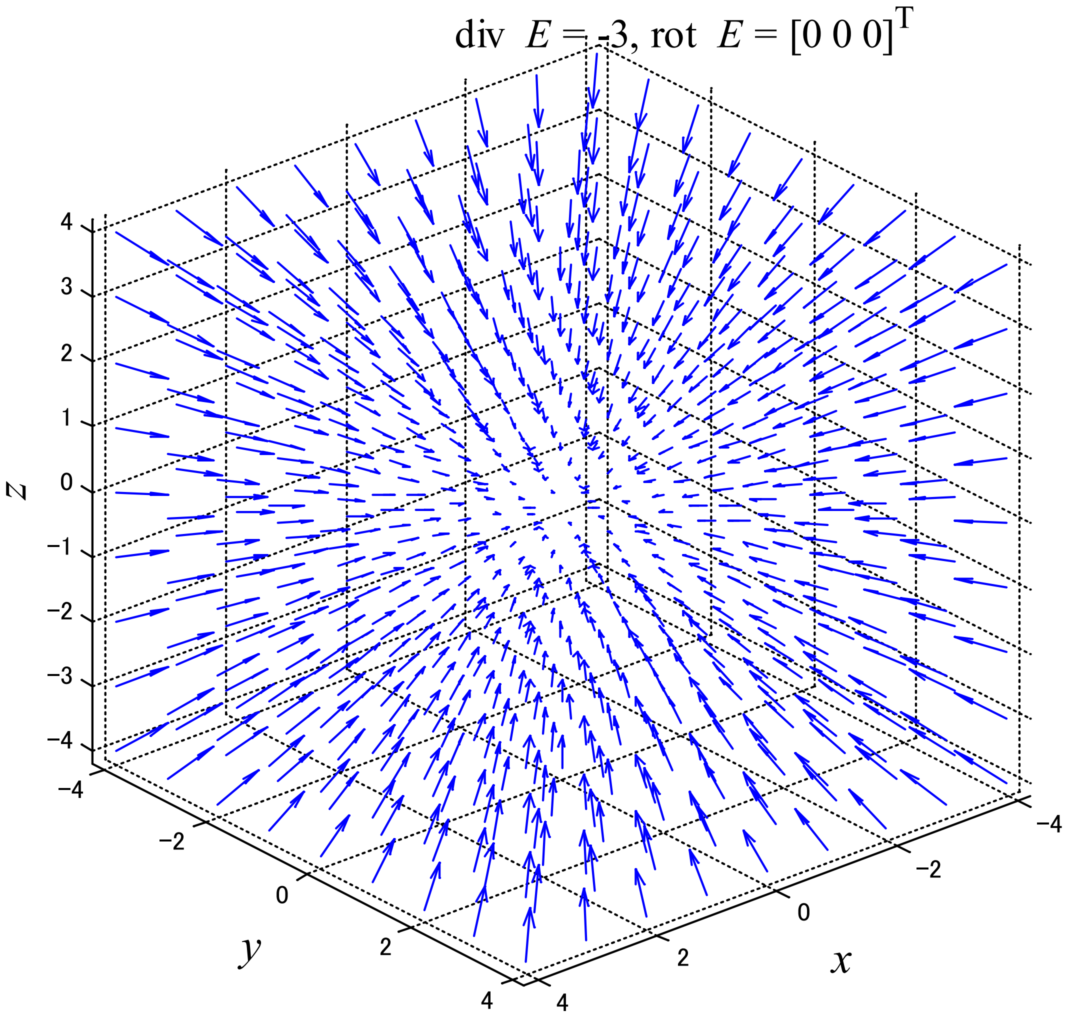
$$E(x,y,z) = -\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{div}E = \boldsymbol{\nabla} \cdot E = \frac{\partial(-x)}{\partial x} + \frac{\partial(-y)}{\partial y} + \frac{\partial(-z)}{\partial z} = -3$$

吸い込み

$$\mathrm{rot}E = \boldsymbol{\nabla} \times E = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -x & -y & -z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

渦なし



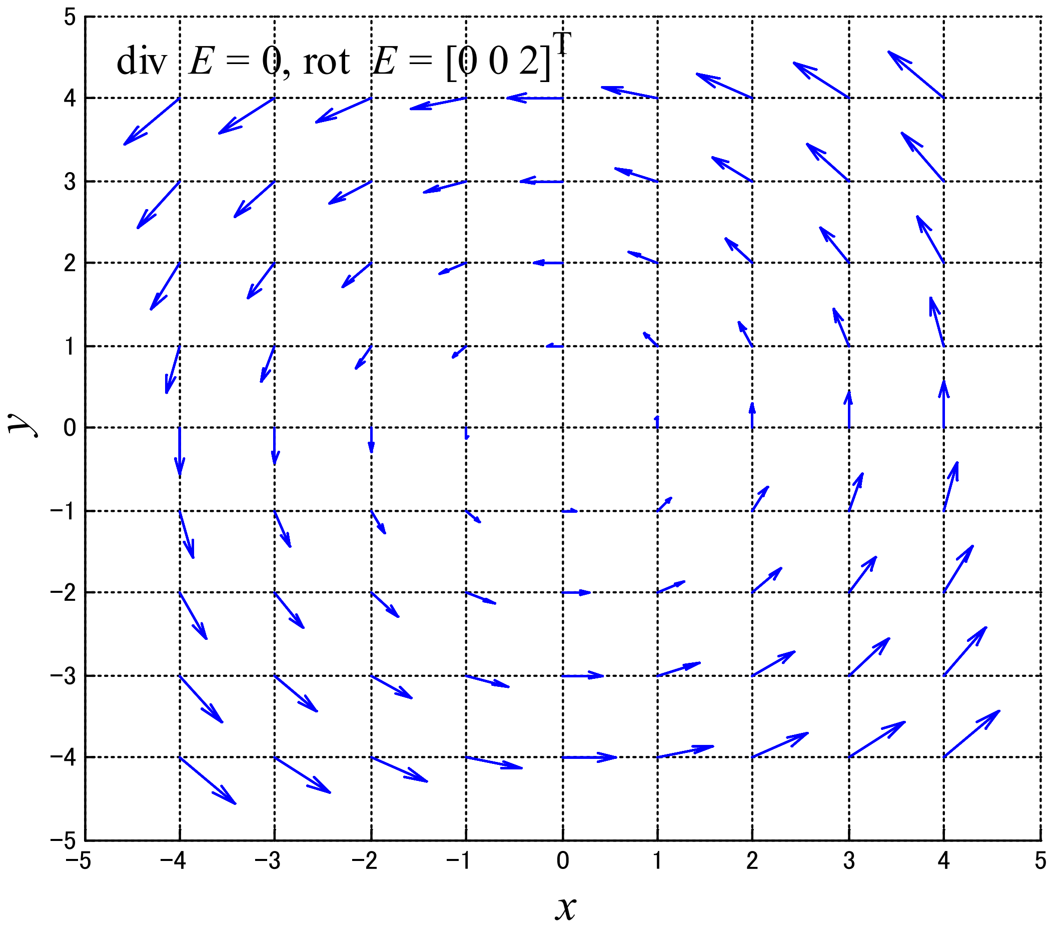
ベクトル場

$$E(x, y, z) = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{div}E = \boldsymbol{\nabla} \cdot E = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

湧き出し吸い込みなし

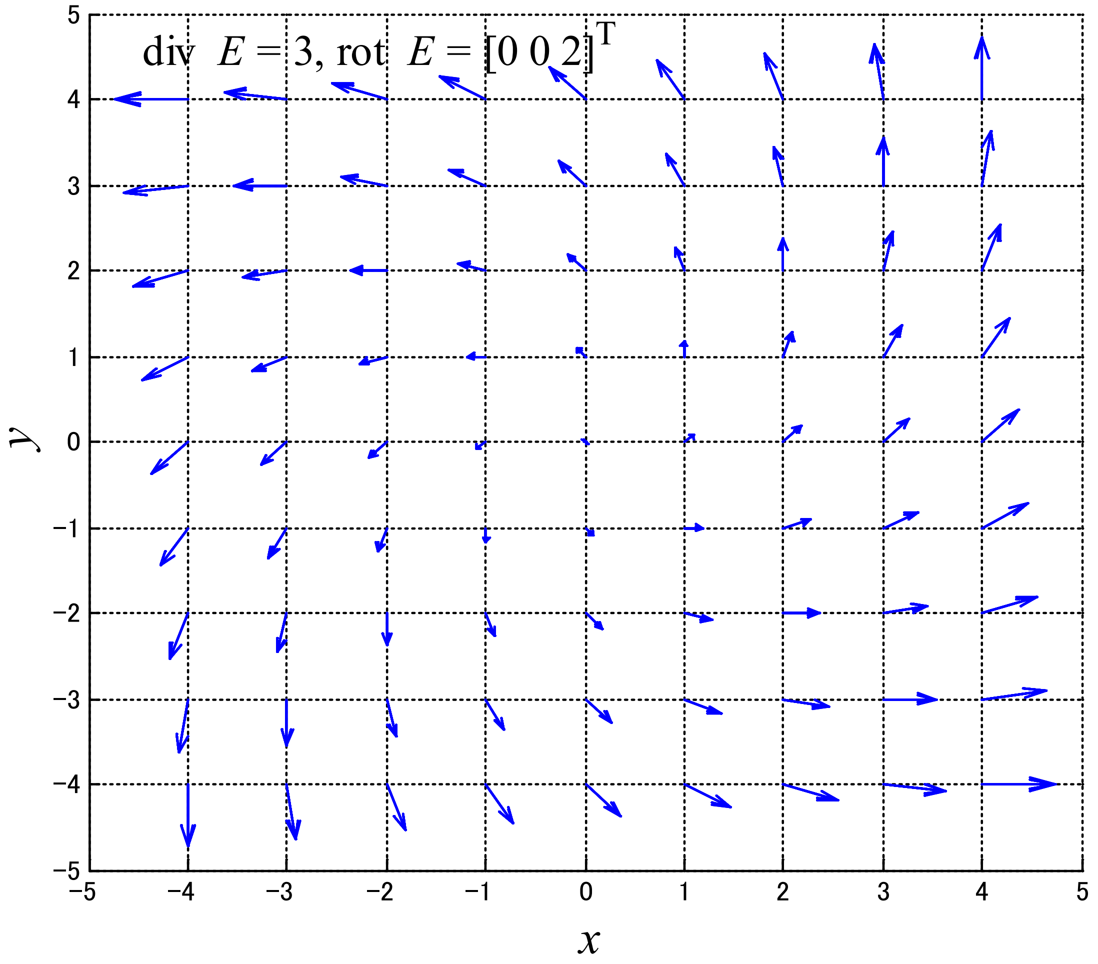
$$\mathrm{rot}E = \boldsymbol{\nabla} \times E = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$



渦あり

ベクトル場

$$E(x,y,z) = \begin{bmatrix} x-y \\ y+x \\ z \end{bmatrix}$$



$$\mathrm{div}E = \nabla \cdot E$$
$$= \frac{\partial(x-y)}{\partial x} + \frac{\partial(y+x)}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

湧き出し

$$\mathrm{rot}E = \nabla \times E = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-y & y+x & z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

渦あり

ベクトル場

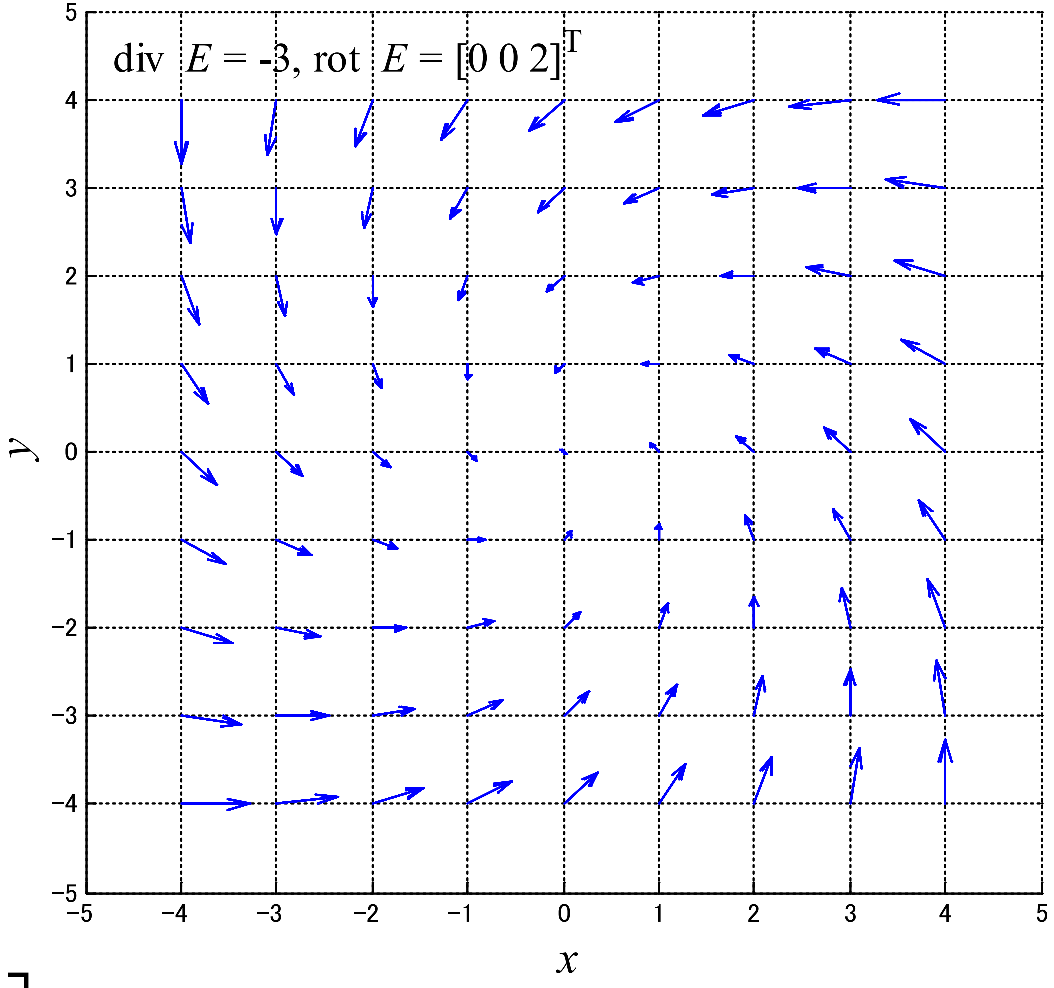
$$E(x, y, z) = \begin{bmatrix} -x - y \\ -y + x \\ -z \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{div}E = \boldsymbol{\nabla} \cdot E$$

$$= \frac{\partial(-x-y)}{\partial x} + \frac{\partial(-y+x)}{\partial y} + \frac{\partial(-z)}{\partial z}$$

$$= -3$$

吸い込み



$$\mathrm{rot}E = \boldsymbol{\nabla} \times E = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -x-y & -y+x & -z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

渦あり

まとめ

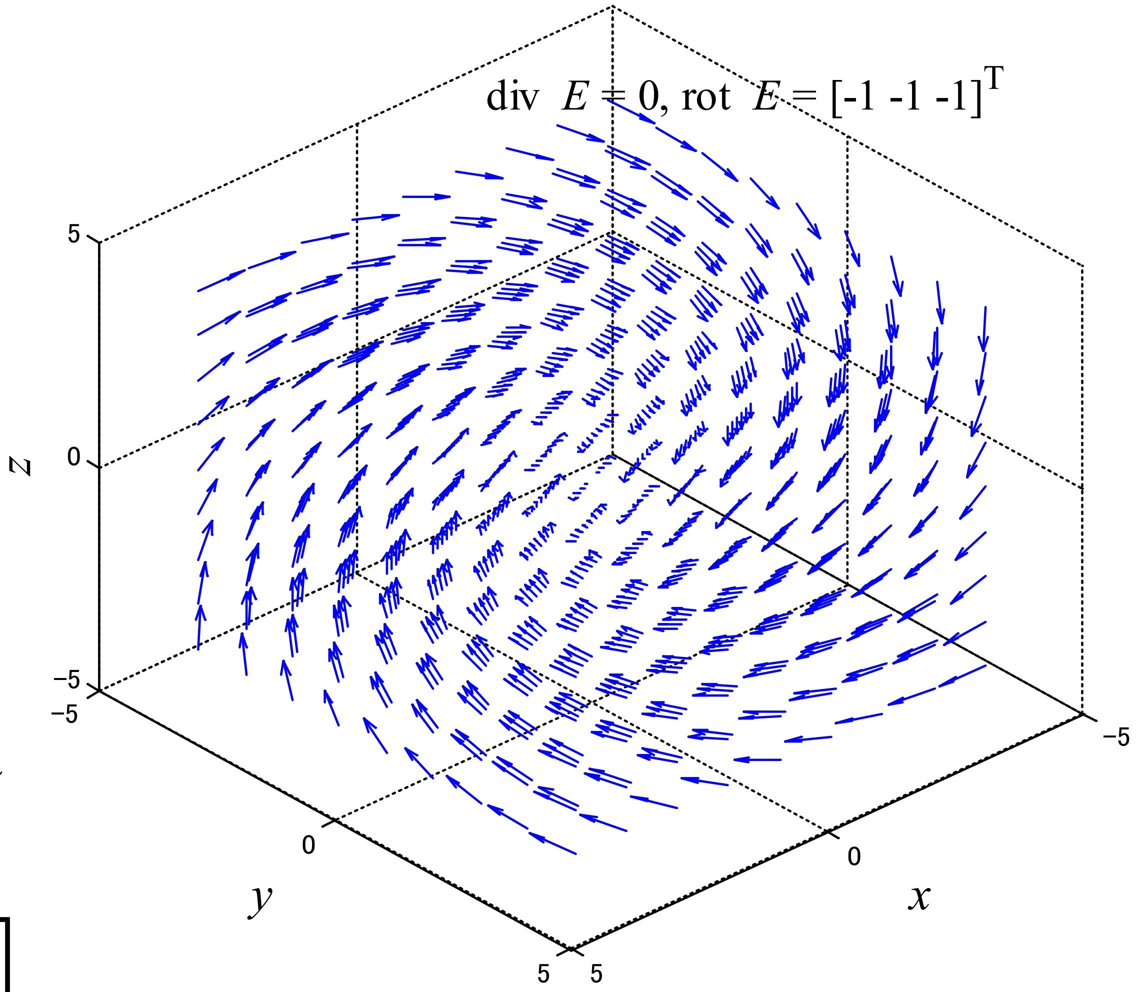
- 演算子ナブラの導入
- 発散と回転の演算法
- 発散と回転の，湧き出し，吸い込み，渦との関係

ベクトル場

$$E(x,y,z) = \begin{bmatrix} y \\ z \\ x \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{div}E = \boldsymbol{\nabla}\cdot E = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

湧き出し吸い込みなし



$$\mathrm{rot}E = \boldsymbol{\nabla}\times E = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

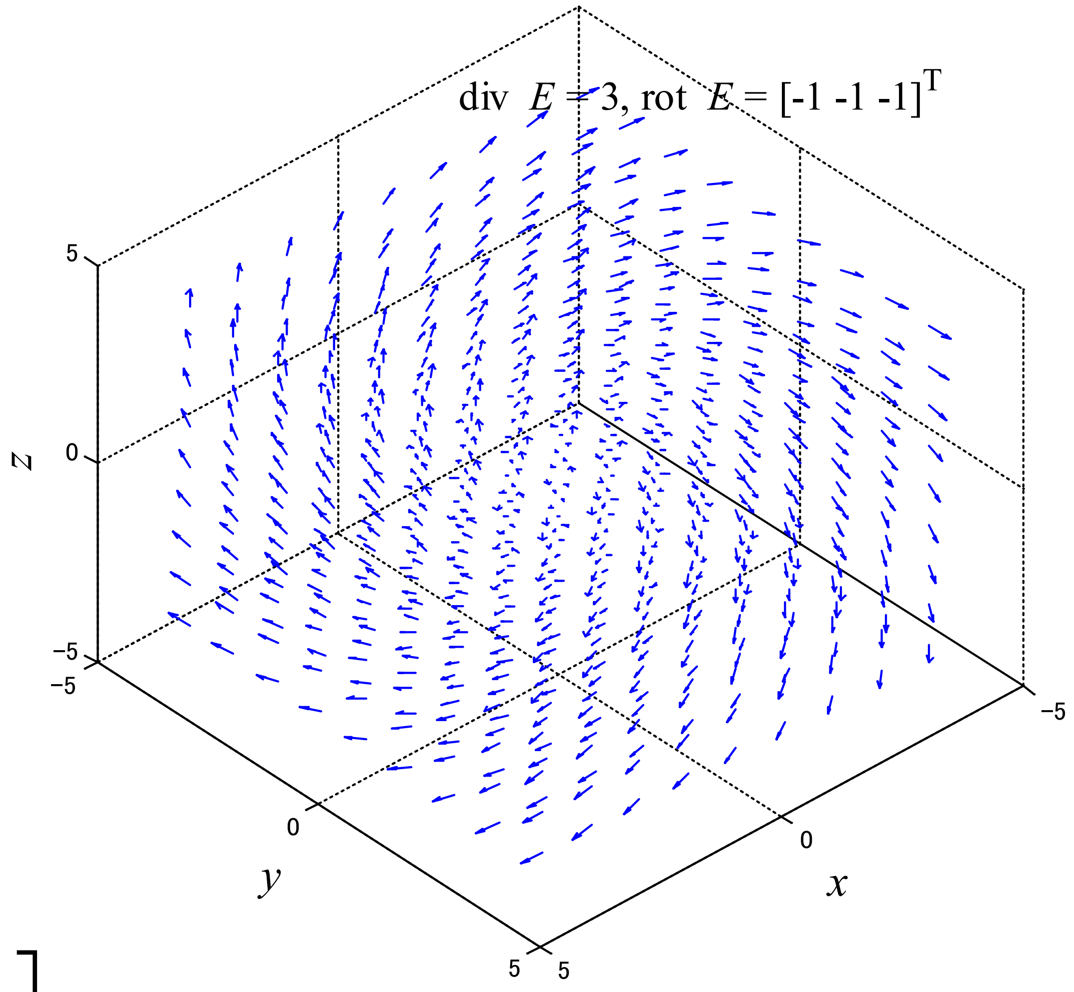
渦あり

ベクトル場

$$E(x,y,z) = \begin{bmatrix} x+y \\ y+z \\ z+x \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{div}E &= \boldsymbol{\nabla} \cdot E \\ &= \frac{\partial(x+y)}{\partial x} + \frac{\partial(y+z)}{\partial y} + \frac{\partial(z+x)}{\partial z} \\ &= 3 \end{aligned}$$

湧き出し



$$\mathrm{rot}E = \boldsymbol{\nabla} \times E = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

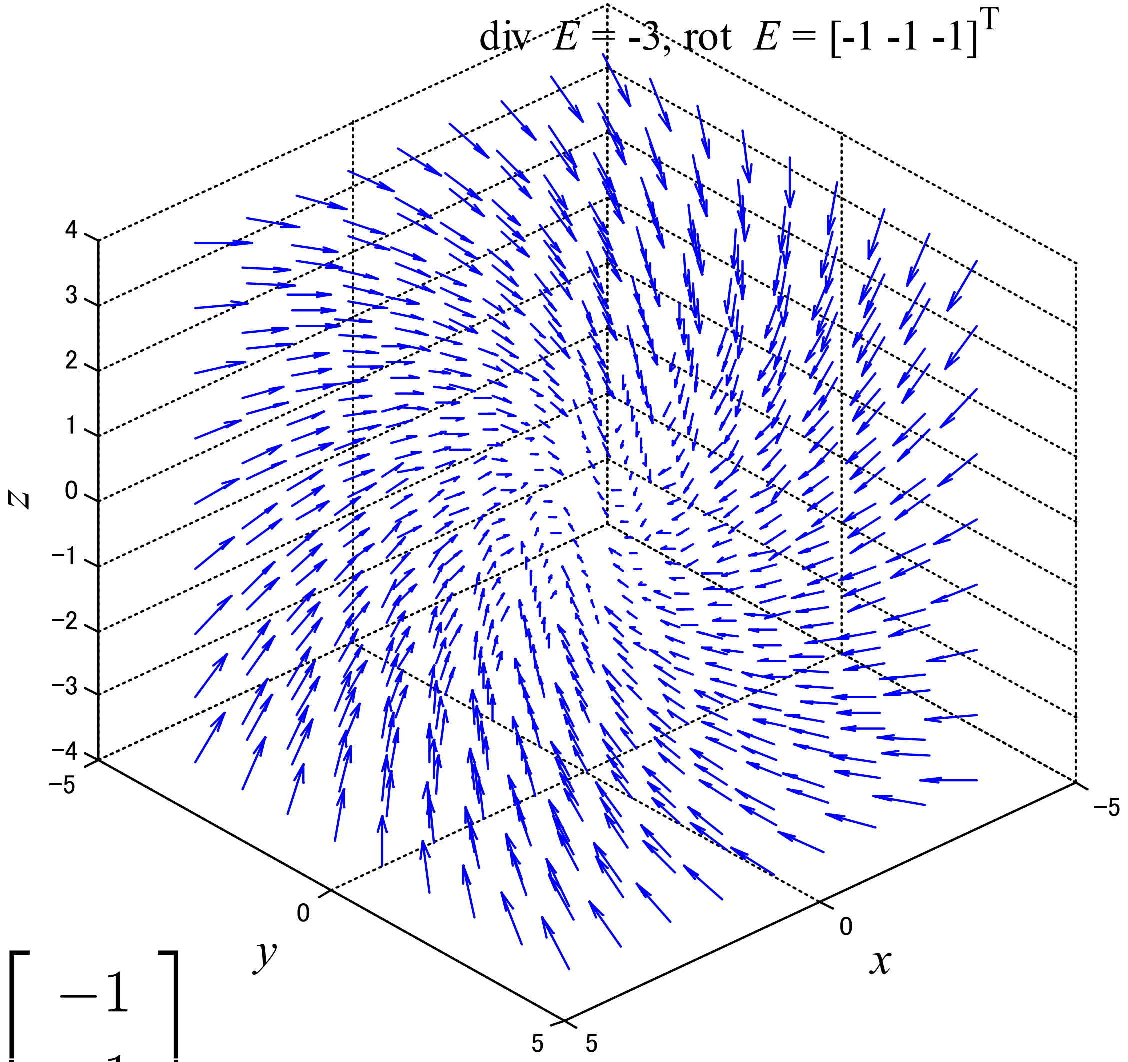
渦あり

ベクトル場

$$E(x,y,z) = \begin{bmatrix} -x+y \\ -y+z \\ -z+x \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{div}E &= \boldsymbol{\nabla} \cdot E \\ &= \frac{\partial(-x+y)}{\partial x} + \frac{\partial(-y+z)}{\partial y} + \frac{\partial(-z+x)}{\partial z} \\ &= -3 \end{aligned}$$

吸い込み



$$\mathrm{rot}E = \boldsymbol{\nabla} \times E = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -x+y & -y+z & -z+x \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

渦あり