電気磁気学Ｉ　第７回

電荷と電界（２）ガウスの定理追加資料

電子情報システム工学科
奥宏史

ガウスの定理

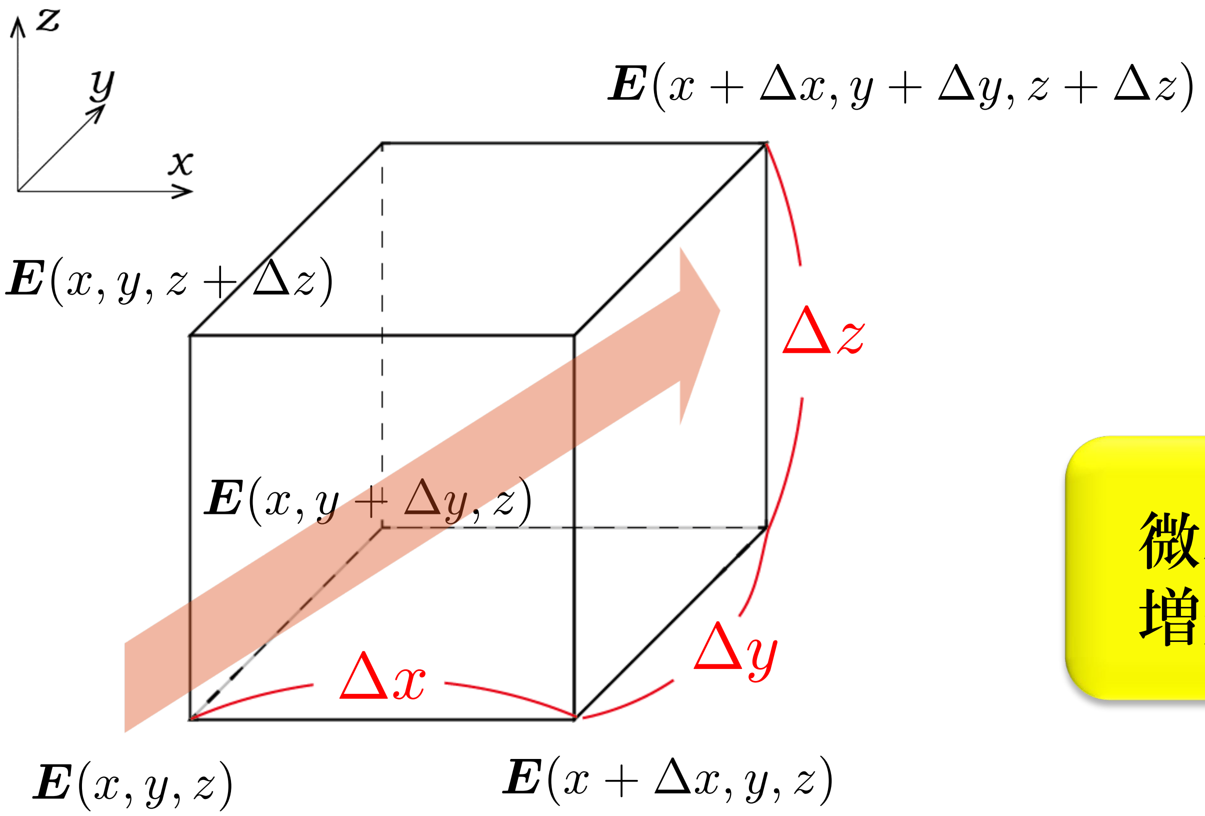
ある閉曲面 S 内の体積 V について

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{E}\ \mathrm{d}V$$

ガウスの定理

閉曲面を通って外部に放出される量 = 体積内部の増分（発散）の総量

ガウスの定理（続き）



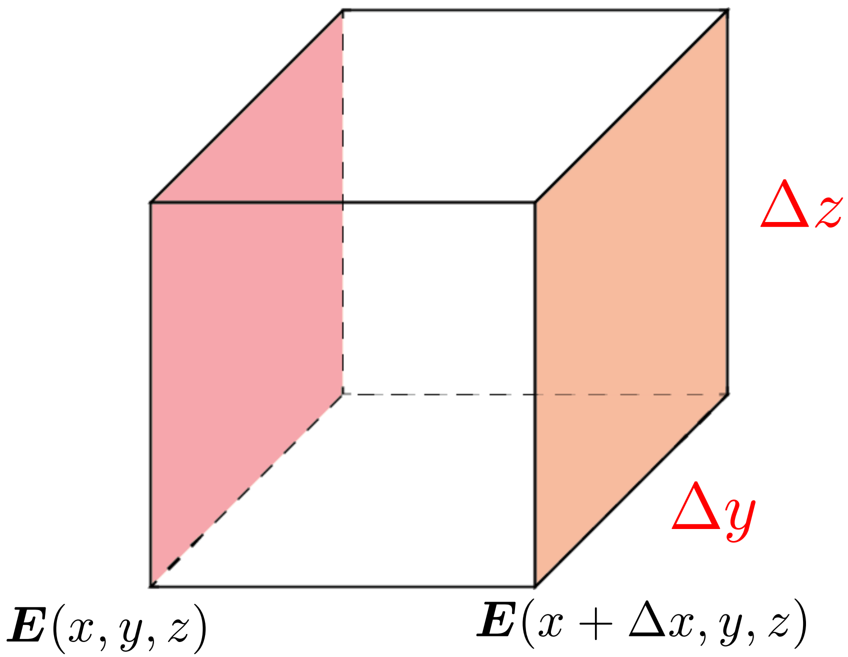
電界（ベクトル場）

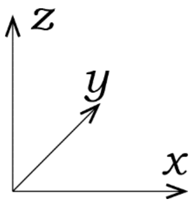
$$\boldsymbol{E}(x, y, z) = \begin{bmatrix} E_x(x, y, z) \\ E_y(x, y, z) \\ E_z(x, y, z) \end{bmatrix}$$

微小体積 $\Delta x \Delta y \Delta z$ 内における電界の増分（湧き出し量）を見積もる.

ガウスの定理（続き）

x 軸方向





電界の x 軸方向の増分は，Talylor展開より，

$$E_x(x + \Delta x, y, z) - E_x(x, y, z) \simeq \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta x$$

微小断面 $\Delta y \Delta z$ 内では増分は一様として，

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z}$$

ガウスの定理（続き）

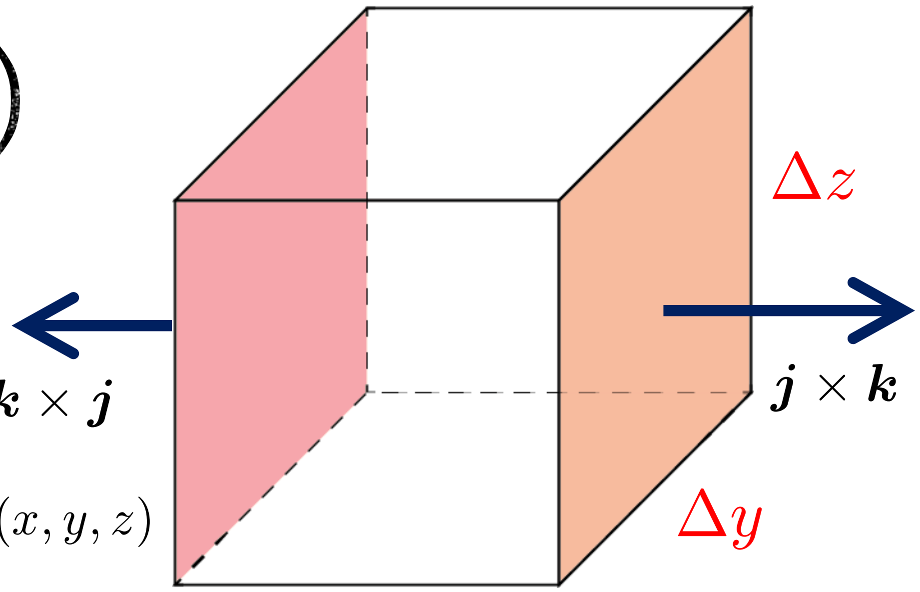
左辺について，

$$(E_x(x+\Delta x,y,z)-E_x(x,y,z))\,\Delta y\Delta z$$

$$=(\boldsymbol{E}(x+\Delta x,y,z)-\boldsymbol{E}(x,y,z))\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\Delta y\Delta z$$

$$=(\boldsymbol{E}(x+\Delta x,y,z)\cdot\boldsymbol{i})\,\Delta y\Delta z+(\boldsymbol{E}(x,y,z)\cdot(-\boldsymbol{i}))\,\Delta y\Delta z$$

$$=(\boldsymbol{E}(x+\Delta x,y,z)\cdot(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}))\,\Delta y\Delta z+(\boldsymbol{E}(x,y,z)\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}))\,\Delta y\Delta z$$



微小断面 $\Delta S=\Delta y\Delta z$

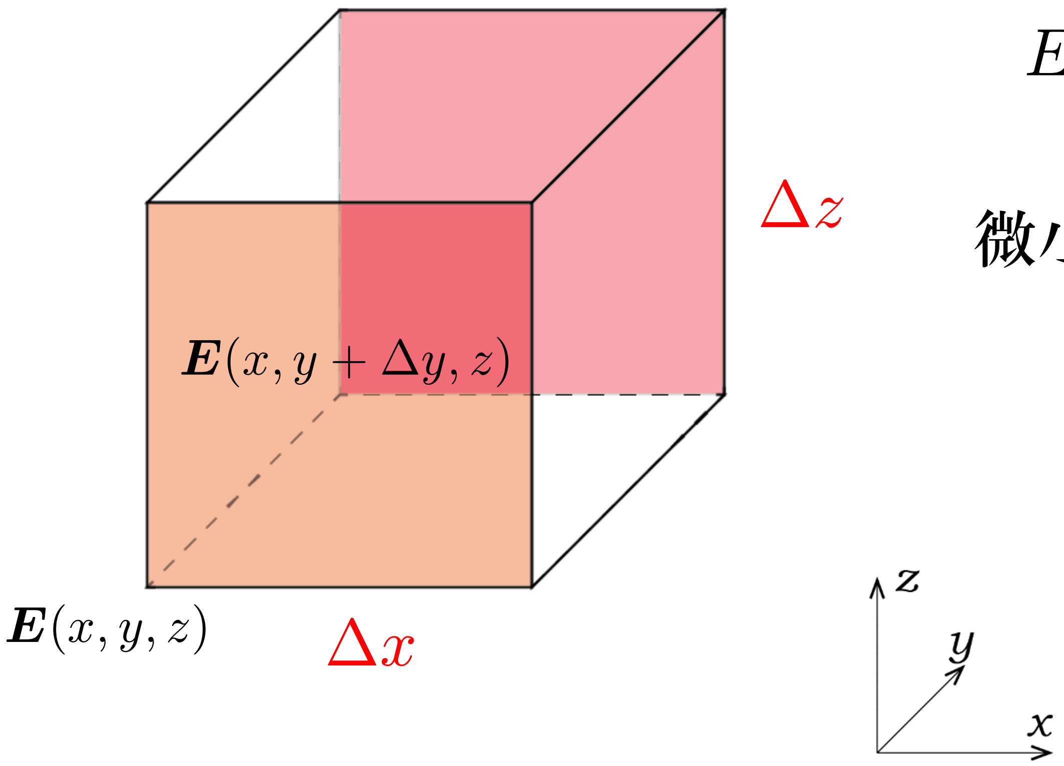
$$\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{j}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}$$

第1項も第２項も微小断面から閉曲面の外側に向かって流出する大きさを表す．

ガウスの定理（続き）

y 軸方向



電界の y 軸方向の増分は，Talylor展開より，

$$E_y(x, y+\Delta y, z) - E_y(x, y, z) \simeq \frac{\partial E_y}{\partial y}\Delta y$$

微小断面 $\Delta x \Delta z$ 内では増分は一様として，

$$\boxed{\frac{\partial E_y}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z}$$

ガウスの定理（続き）

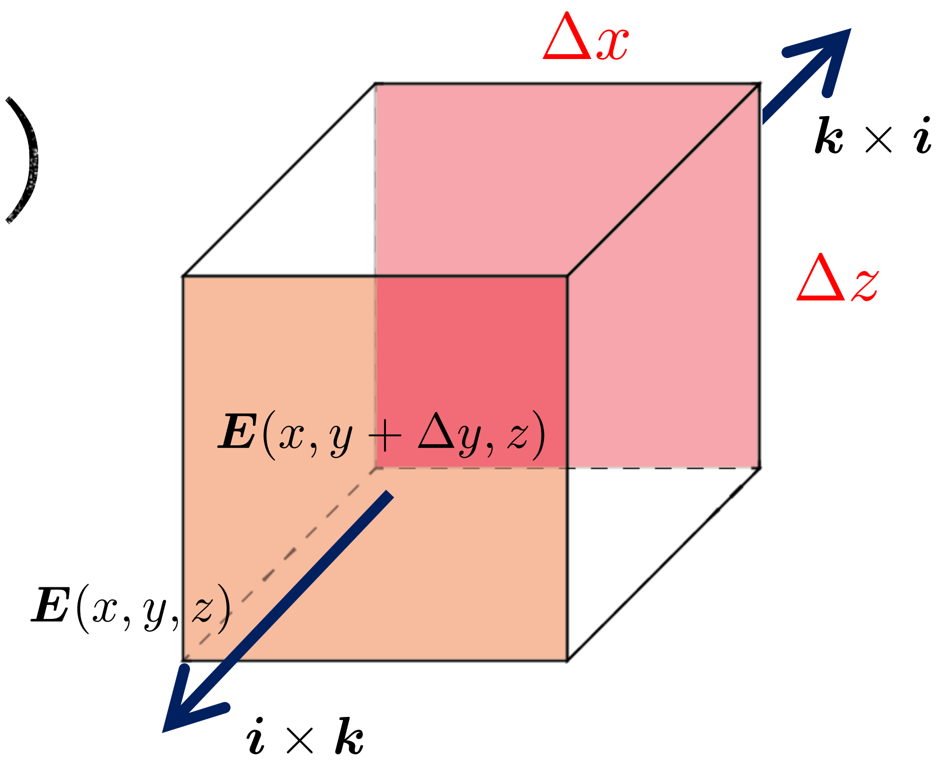
左辺について，

$$
\left(E_y(x,y+\Delta y,z)-E_y(x,y,z)\right)\Delta x\Delta z
$$

$$
=\left(\boldsymbol{E}(x,y+\Delta y,z)-\boldsymbol{E}(x,y,z)\right)\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\Delta x\Delta z
$$

$$
=\left(\boldsymbol{E}(x,y+\Delta y,z)\cdot\boldsymbol{j}\right)\Delta x\Delta z+\left(\boldsymbol{E}(x,y,z)\cdot(-\boldsymbol{j})\right)\Delta x\Delta z
$$

$$
=\left(\boldsymbol{E}(x,y+\Delta y,z)\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})\right)\Delta x\Delta z+\left(\boldsymbol{E}(x,y,z)\cdot(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\right)\Delta x\Delta z
$$



微小断面 $\Delta S=\Delta x\Delta z$

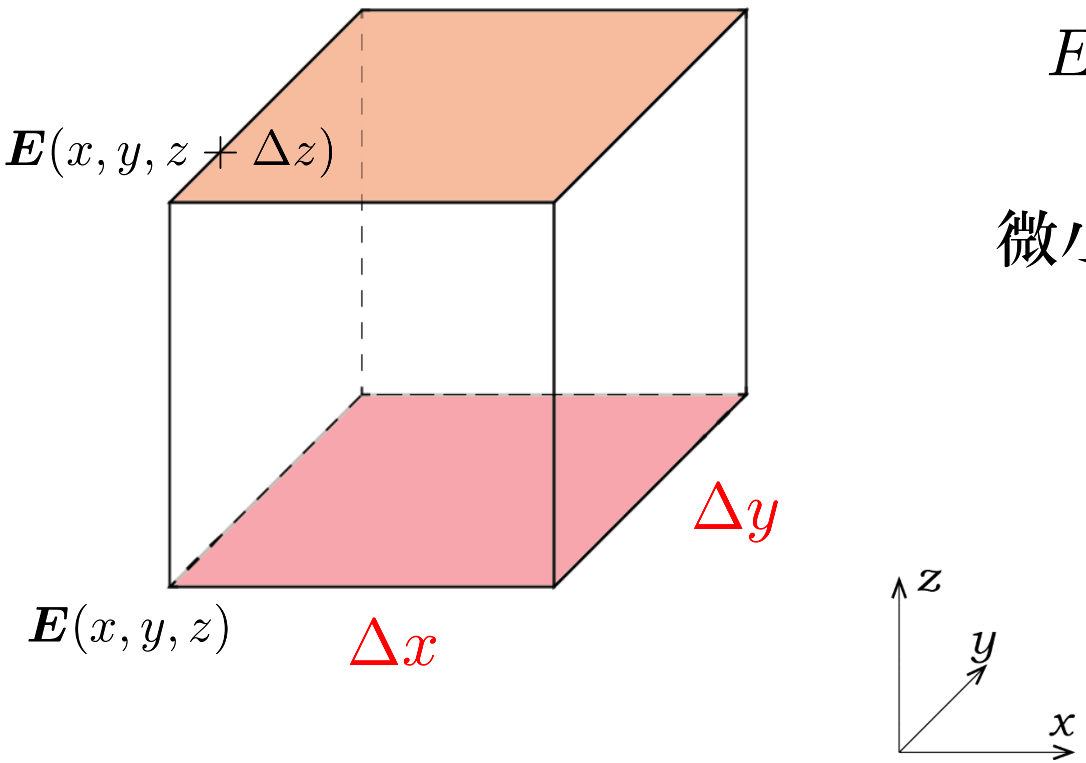
$$
\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{j}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}
$$

第1項も第２項も微小断面から閉曲面の外側に向かって流出する大きさを表す．

ガウスの定理（続き）

z 軸方向



電界の z 軸方向の増分は，Talylor展開より，

$$E_z(x, y, z + \Delta z) - E_z(x, y, z) \simeq \frac{\partial E_z}{\partial z}\Delta z$$

微小断面 $\Delta x \Delta y$ 内では増分は一様として，

$$\frac{\partial E_z}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z$$

ガウスの定理（続き）

左辺について，

$$(E_z(x,y,z+\Delta z) - E_z(x,y,z))\,\Delta x\Delta y$$

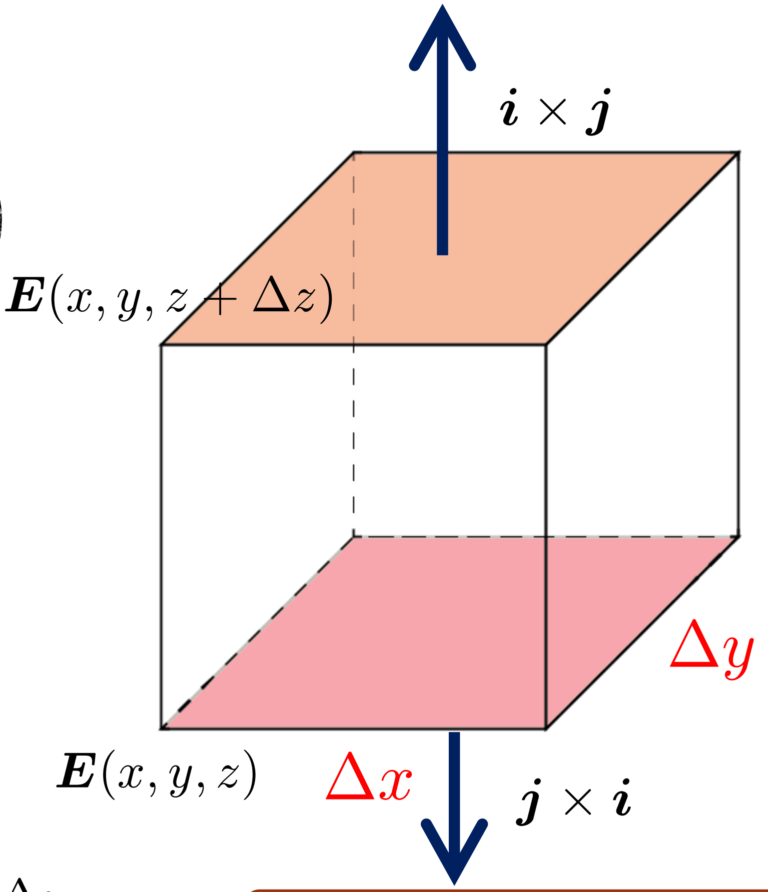
$$= (\boldsymbol{E}(x,y,z+\Delta z) - \boldsymbol{E}(x,y,z)) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta x\Delta y$$

$$= (\boldsymbol{E}(x,y,z+\Delta z)\cdot \boldsymbol{k})\,\Delta x\Delta y + (\boldsymbol{E}(x,y,z)\cdot(-\boldsymbol{k}))\,\Delta x\Delta y$$

$$= (\boldsymbol{E}(x,y,z+\Delta z)\cdot (\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}))\,\Delta x\Delta y + (\boldsymbol{E}(x,y,z)\cdot(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}))\,\Delta x\Delta y$$

$$\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

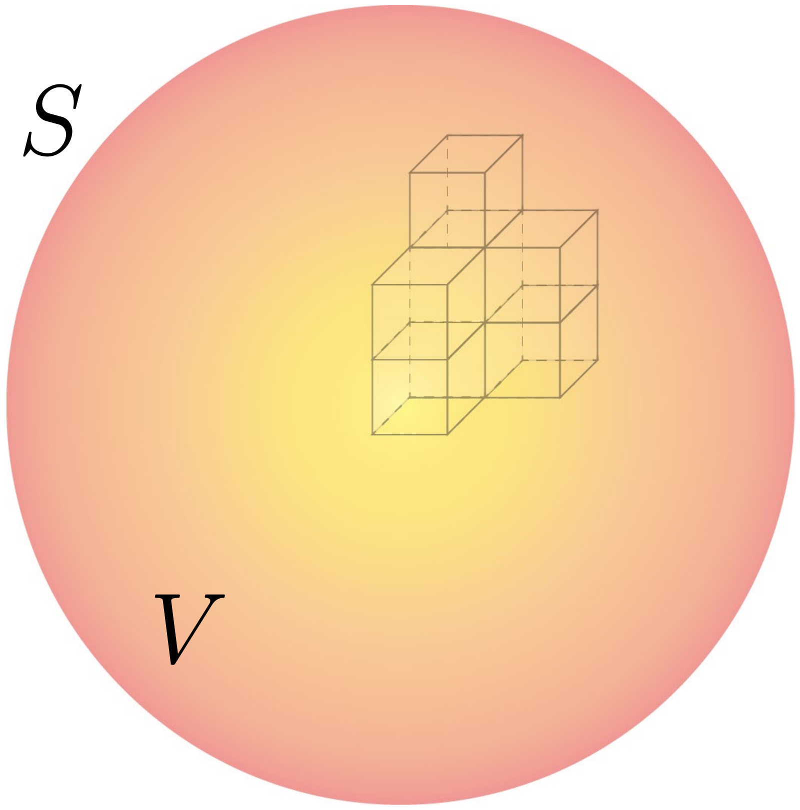
$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}$$



微小断面 $\Delta S = \Delta x\Delta y$

第1項も第２項も微小断面から閉曲面の外側に向かって流出する大きさを表す．

ガウスの定理（続き）



隣り合う微小直方体の接する面同士で相殺することに注意すると，残るのは閉曲面 S 上のみ．

閉曲面 S 全体では，

$$\lim_{\Delta S \to 0} \sum_{S} \boldsymbol{E} \cdot \Delta \boldsymbol{S} = \int_{S} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

面積分