電気磁気学Ⅰ　第７回

電荷と電界（２）追加資料

(教科書P. 44 例1の別解)

電子情報システム工学科
奥宏史

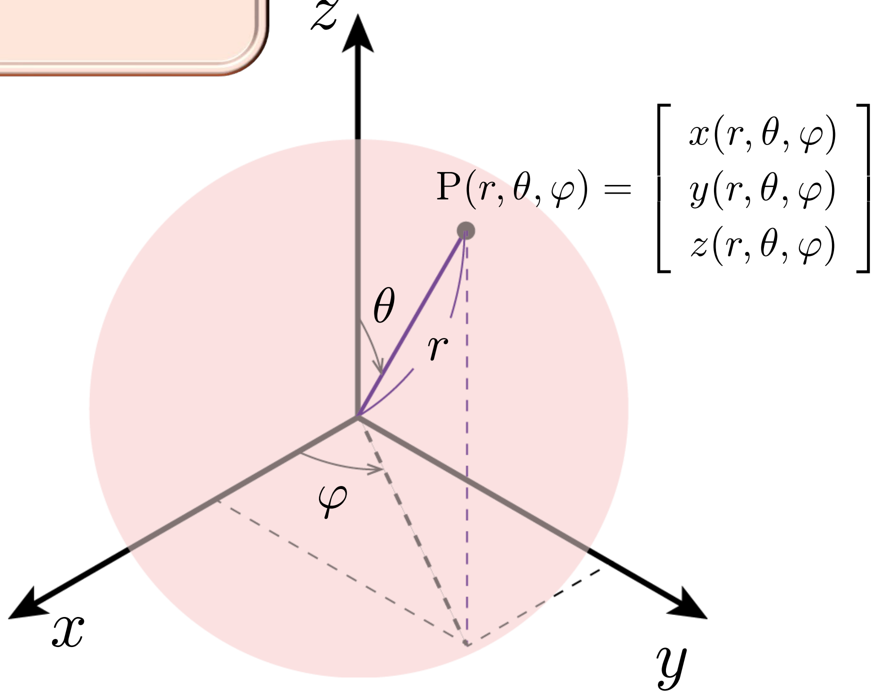
教科書P. 44 例1

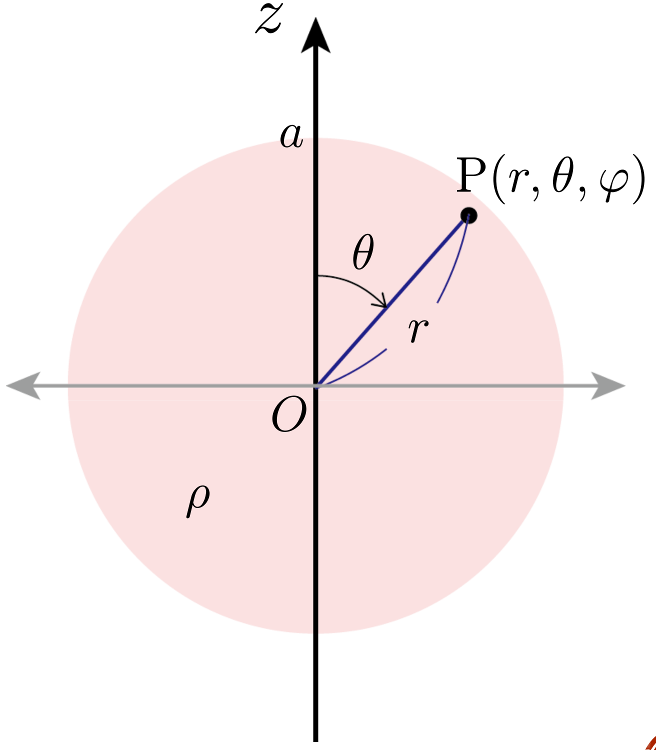
図のような半径 a なる球内には一様な電荷密度 ρ があり，球の外部には電荷はない．このときの電荷の強さおよび電位を求めよ．

球の対称性に注意すること．

球座標系表示

$$
\mathrm{P}(r,\theta,\varphi)=\begin{bmatrix} x(r,\theta,\varphi)\\ y(r,\theta,\varphi)\\ z(r,\theta,\varphi)\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix} r\sin\theta\cos\varphi\\ r\sin\theta\sin\varphi\\ r\cos\theta\end{bmatrix}
$$





別解

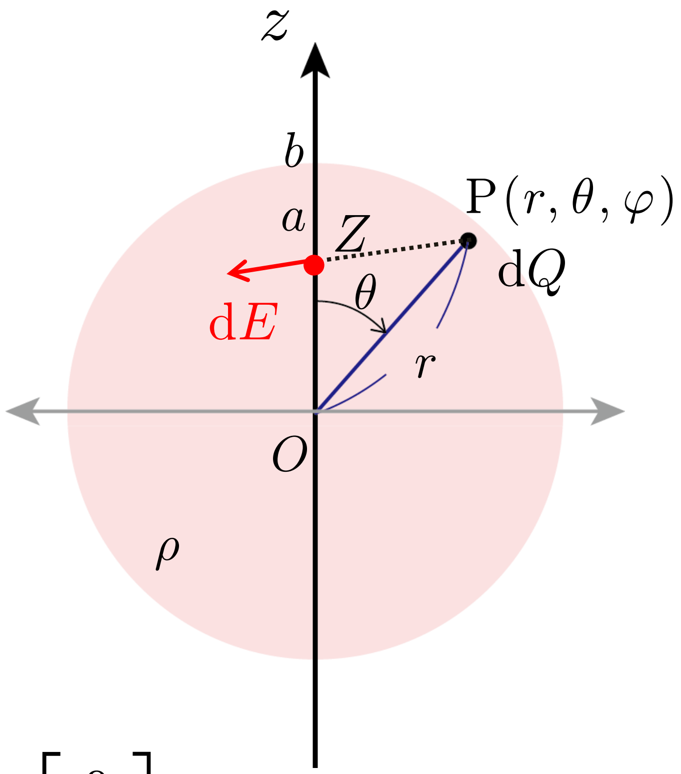
球内の任意の点 P 近傍の微小領域における電荷量 $\mathrm{d}Q$ は

$$\mathrm{d}Q = \rho r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

と表せる．球の対称性に注意して，正の z 軸上の点の電界および電位について考えれば十分である．z 軸上の任意の点 $Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & z \end{bmatrix}^T$ における $\mathrm{d}Q$ による電界 $\mathrm{d}E$ および電位 $\mathrm{d}V$ は

$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 \left\{r^2 \sin^2\theta + (z - r\cos\theta)^2\right\}^{3/2}} \begin{bmatrix} -r\sin\theta\cos\varphi \\ -r\sin\theta\sin\varphi \\ z - r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{d}V = -\frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_\infty^z \frac{1}{\left\{r^2 \sin^2\theta + (\zeta - r\cos\theta)^2\right\}^{3/2}} \begin{bmatrix} -r\sin\theta\cos\varphi \\ -r\sin\theta\sin\varphi \\ \zeta - r\cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{d}\zeta$$



別解（つづき）

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}V &= -\frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^z \frac{1}{\left\{r^2\sin^2\theta+(\zeta-r\cos\theta)^2\right\}^{3/2}}\begin{bmatrix}-r\sin\theta\cos\varphi\\-r\sin\theta\sin\varphi\\\zeta-r\cos\theta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\mathrm{d}\zeta\\
&= -\frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^z \frac{\zeta-r\cos\theta}{\left\{r^2\sin^2\theta+(\zeta-r\cos\theta)^2\right\}^{3/2}}\mathrm{d}\zeta\\
&= -\frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\left(\frac{-1}{\left\{r^2\sin^2\theta+(\zeta-r\cos\theta)^2\right\}^{1/2}}\right)\mathrm{d}\zeta\\
&= \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left\{r^2\sin^2\theta+(\zeta-r\cos\theta)^2\right\}^{1/2}}\right]_\infty^z\\
&= \frac{\rho r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0\left\{r^2\sin^2\theta+(z-r\cos\theta)^2\right\}^{1/2}}
\end{aligned}
$$

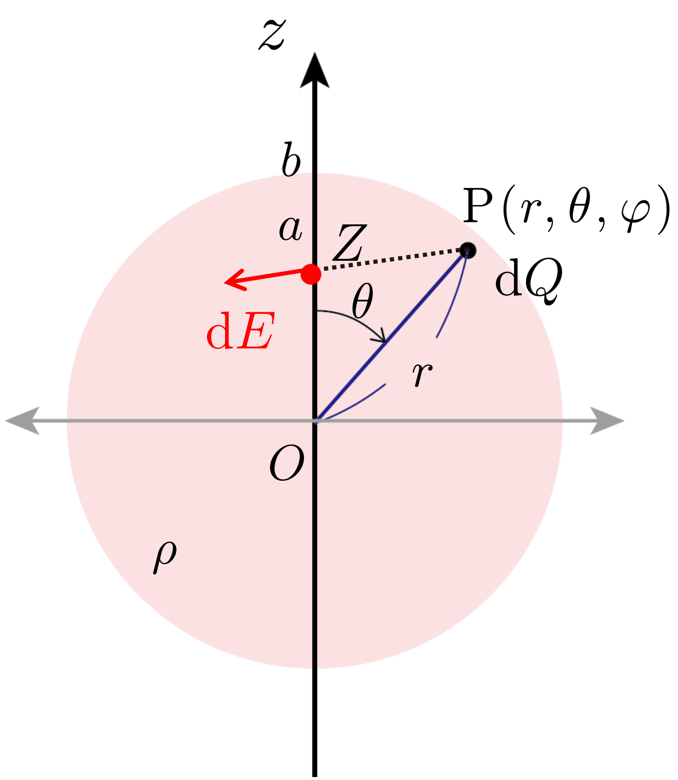
別解（つづき）

微小電荷による電位 $\mathrm{d}V$ を球 B で体積分する．ここで

$$B = \{P(r,\theta,\varphi) \mid 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi\}$$

つまり，

$$\begin{aligned}
V(z) &= \int_B \mathrm{d}V \\
&= \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{r^2\sin\theta}{\left\{r^2\sin^2\theta+(z-r\cos\theta)^2\right\}^{1/2}}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&= \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int_0^a\int_0^\pi\frac{r^2\sin\theta}{\left\{r^2\sin^2\theta+(z-r\cos\theta)^2\right\}^{1/2}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&= \frac{\rho}{2\varepsilon_0 z}\int_0^a\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(r\left(r^2+z^2-2zr\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r
\end{aligned}$$



別解（つづき）

さらに計算を進めると，

$$
\begin{aligned}
V(z) &= \frac{\rho}{2\varepsilon_0 z}\int_0^a\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(r\left(r^2+z^2-2zr\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&= \frac{\rho}{2\varepsilon_0 z}\int_0^a\left[r\left(r^2+z^2-2zr\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}\right]_0^\pi\mathrm{d}r \\
&= \frac{\rho}{2\varepsilon_0 z}\int_0^a r\left(|r+z|-|r-z|\right)\mathrm{d}r
\end{aligned}
$$

別解（つづき）

(1) 球内　$0 \leq z < a$

$$V(z) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 z}\int_0^a r\left(|r+z| - |r-z|\right)\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\rho}{2\varepsilon_0 z}\int_0^z r\left((r+z) - (z-r)\right)\mathrm{d}r + \frac{\rho}{2\varepsilon_0 z}\int_z^a r\left((r+z) - (r-z)\right)\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\rho}{2\varepsilon_0 z}\int_0^z 2r^2\mathrm{d}r + \frac{\rho}{2\varepsilon_0 z}\int_z^a 2rz\mathrm{d}r = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 z}\left[\frac{2r^3}{3}\right]_0^z + \frac{\rho}{2\varepsilon_0 z}\left[r^2 z\right]_z^a$$

$$= \frac{\rho z^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(a^2 - z^2\right) = \frac{\rho z^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho z^2}{2\varepsilon_0}$$

$$= \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho z^2}{6\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = -\mathrm{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k} = \frac{\rho z}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{k}}$$

$$|E| = \frac{\rho z}{3\varepsilon_0}$$

別解（つづき）

(3) 球の外側　$a \leq z$

$$V(z) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 z}\int_0^a r\left(|r+z| - |r-z|\right)\mathrm{d}r = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 z}\int_0^a r\left((r+z) - (z-r)\right)\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\rho}{2\varepsilon_0 z}\int_0^a 2r^2\mathrm{d}r = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 z}\left[\frac{2r^3}{3}\right]_0^a = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 z}$$

$$\boxed{E = -\mathrm{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k} = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 z^2}\boldsymbol{k}}$$

$$|E| = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 z^2}$$