電気磁気学Ｉ　第７回

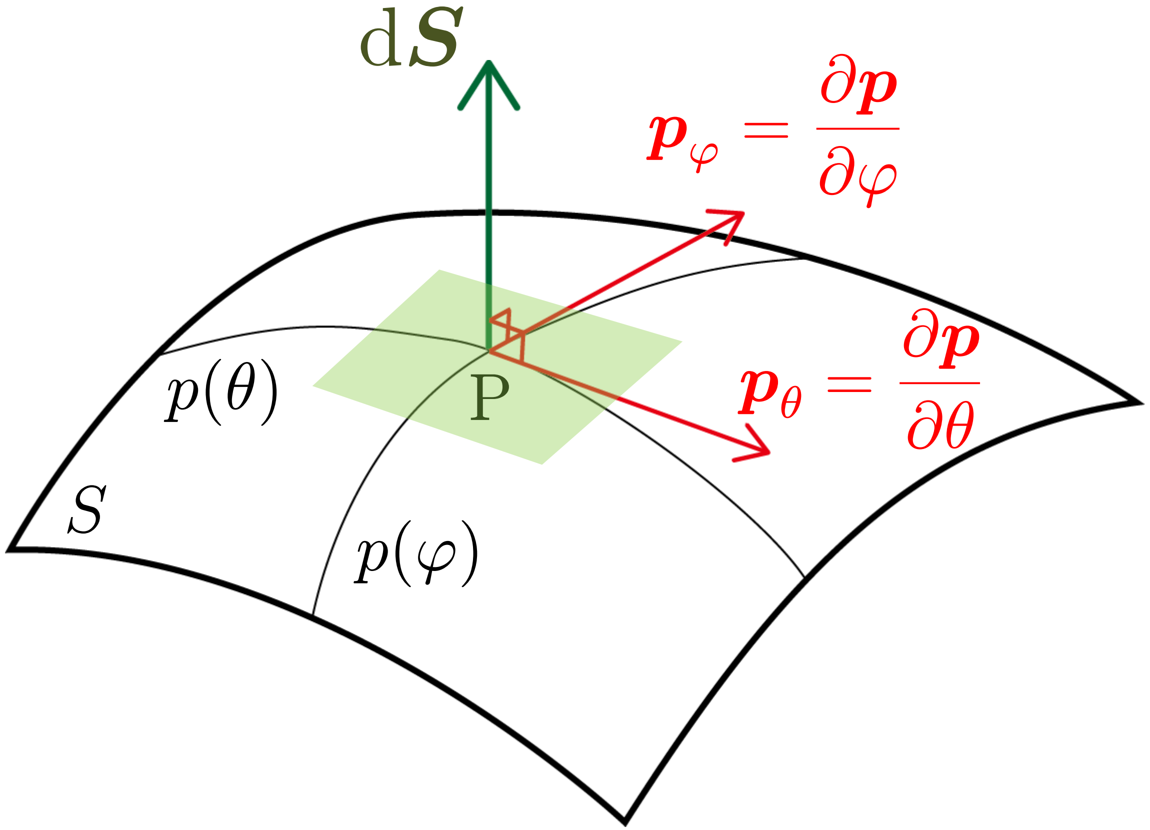
電荷と電界（２）

電子情報システム工学科
奥宏史

今日学ぶこと

- 面積分
- ガウスの定理

曲面



- 曲面 S

$$S: \ \boldsymbol{p}(\theta,\varphi) = \left[\ x(\theta,\varphi) \quad y(\theta,\varphi) \quad z(\theta,\varphi)\ \right]^T$$

- 点P: $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\theta,\varphi)$ を通る曲線

$$\boldsymbol{p}(\theta), \quad \boldsymbol{p}(\varphi)$$

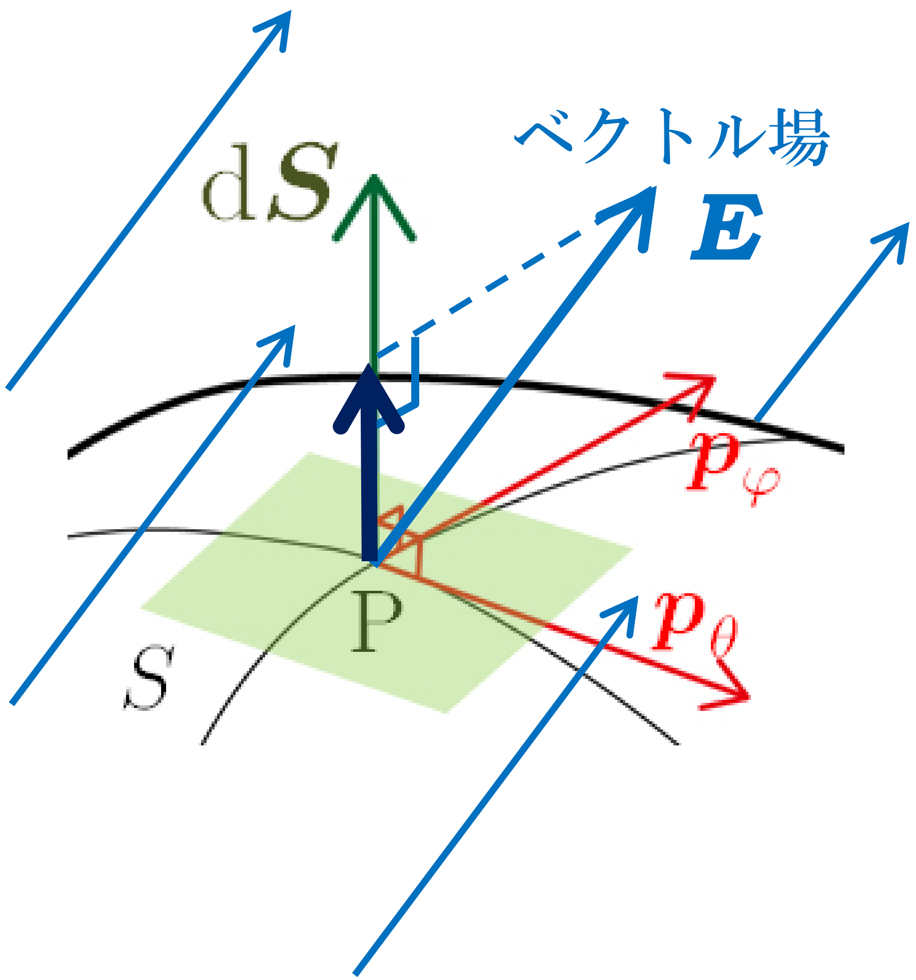
- 点Pにおける接線ベクトル

$$\boldsymbol{p}_\theta = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \theta}, \quad \boldsymbol{p}_\varphi = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \varphi}$$

- ベクトル面積素

$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{p}_\theta \times \boldsymbol{p}_\varphi)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}$$

面積分



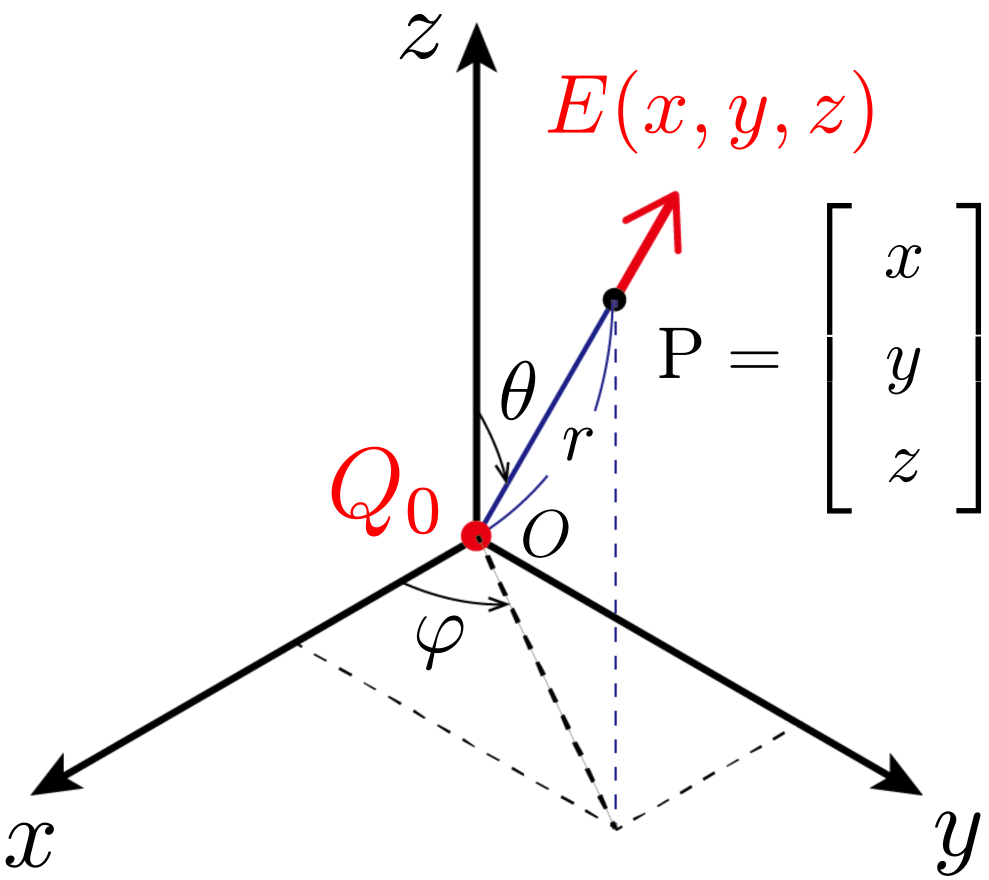
- ベクトル面積素 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ におけるベクトル場 $\boldsymbol{E}$ の有効成分の大きさ

$$\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

- ベクトル場 $\boldsymbol{E}$ を曲面 S について線積分する.

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{p}_\theta \times \boldsymbol{p}_\varphi)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

例題



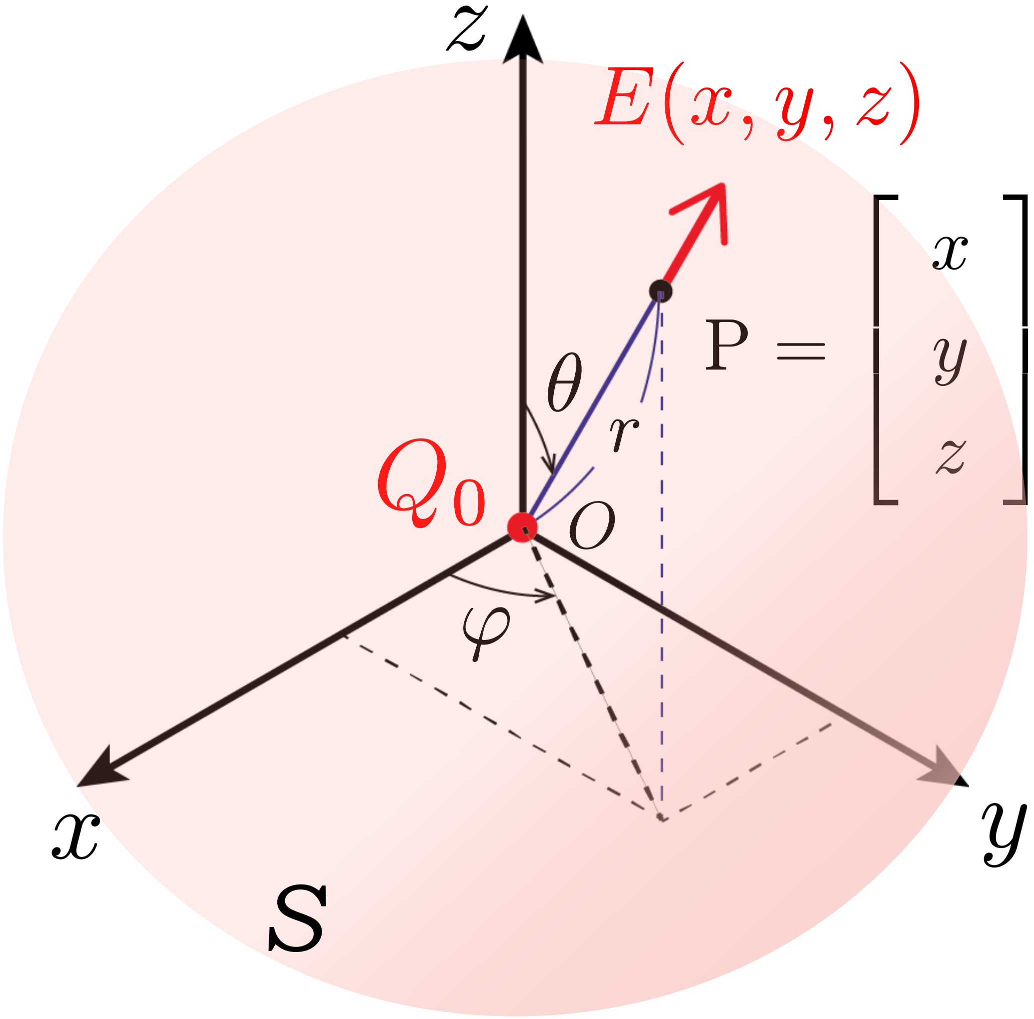
点電荷Q_0による電界Eは，Q_0を原点とし，Q_0からrだけ離れた点Pの座標を$[\ x\ y\ z\ ]^T$としたとき，

$$E(x, y, z) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

と表せる．ここで，$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

原点を中心とする半径rの球面Sについて電界Eを面積分せよ．

解答



rは定数とする．半径 r の球面の方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

に注意して，左図中の θ, φを用いて球面 S 上の任意の点 P を球座標表示すると，

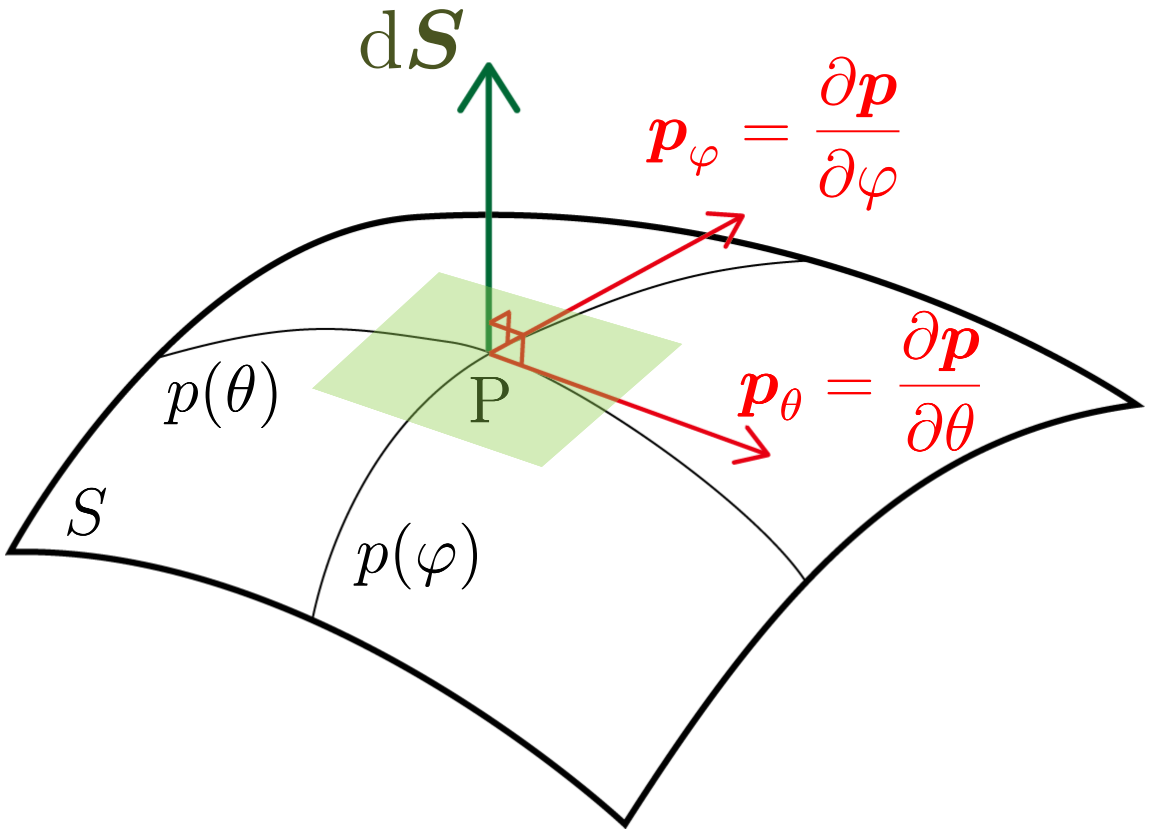
$$\boldsymbol{p}(\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} x(\theta,\varphi) \\ y(\theta,\varphi) \\ z(\theta,\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{bmatrix}$$

このとき，球面 S は次式でパラメータ表示される．

$$S: \ \{\boldsymbol{p}(\theta,\varphi) \mid 0 \le \theta \le \pi, \ 0 \le \varphi < 2\pi\}$$

S 上の電界は次式で与えられる．

$$E(x(\theta,\varphi),y(\theta,\varphi),z(\theta,\varphi)) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{bmatrix}$$



点 P における θ 方向と φ 方向の接線ベクトルはそれぞれ，

$$\boldsymbol{p}_\theta = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} r\cos\theta\cos\varphi\\ r\cos\theta\sin\varphi\\ -r\sin\theta\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}_\varphi = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi\\ r\sin\theta\cos\varphi\\ 0\end{bmatrix}$$

このとき，ベクトル面積素 d$\boldsymbol{S}$ は，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{p}_\theta \times \boldsymbol{p}_\varphi)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = r^2 \sin\theta \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

より，面積分は，

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}\right) r^2\sin\theta\ \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\ \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[2\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0}$$

電界の閉曲面での面積分は，閉曲面内部の電荷の総和に等しい．

今日学ぶこと

- 面積分
- ガウスの定理

ガウスの定理

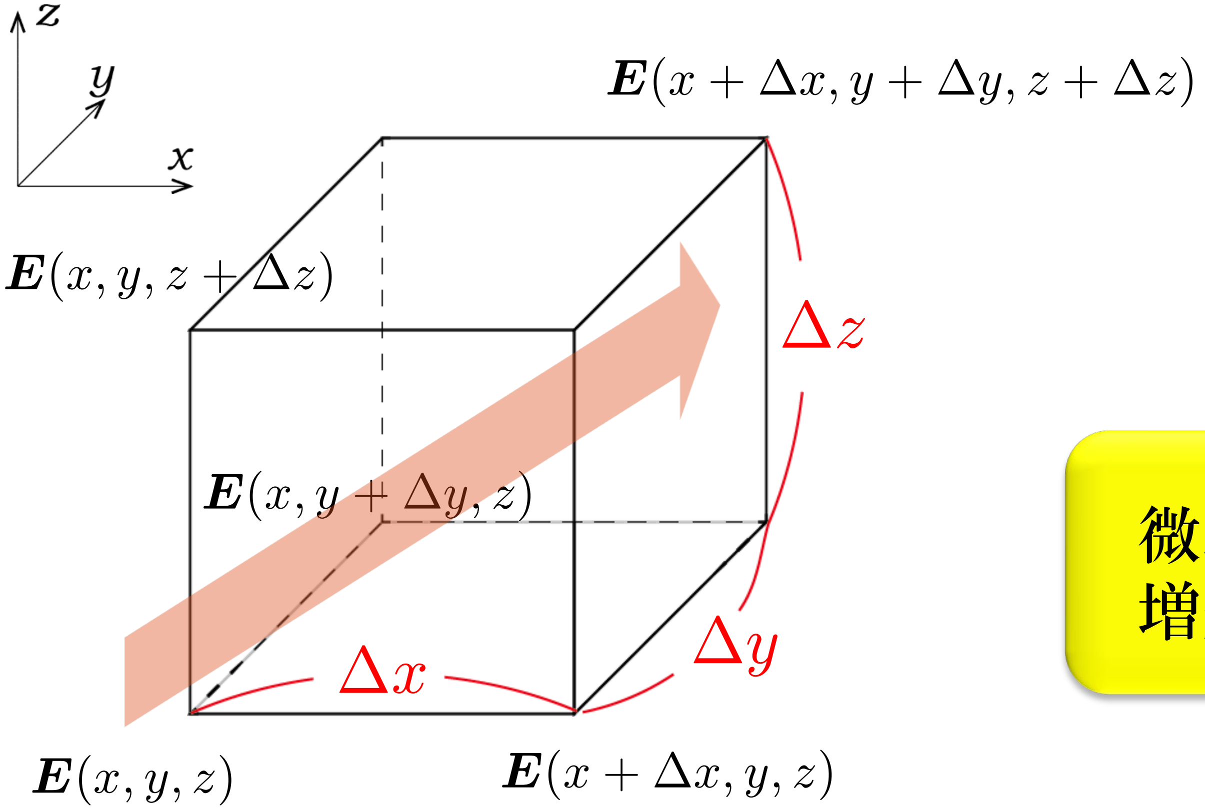
ある閉曲面 S 内の体積 V について

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{E}\ \mathrm{d}V$$

ガウスの定理

閉曲面を通って外部に放出される量 = 体積内部の増分（発散）の総量

ガウスの定理（続き）



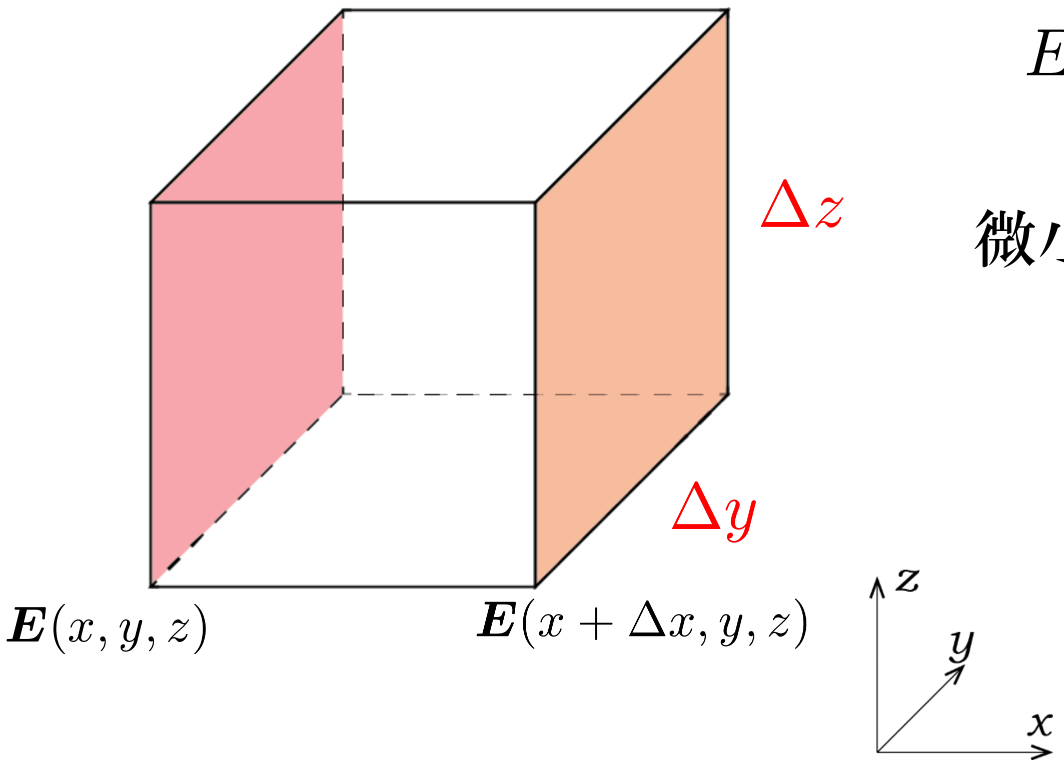
電界（ベクトル場）

$$\boldsymbol{E}(x, y, z) = \begin{bmatrix} E_x(x, y, z) \\ E_y(x, y, z) \\ E_z(x, y, z) \end{bmatrix}$$

微小体積 $\Delta x \Delta y \Delta z$ 内における電界の増分（湧き出し量）を見積もる．

ガウスの定理（続き）

x 軸方向



電界の x 軸方向の増分は，Talylor展開より，

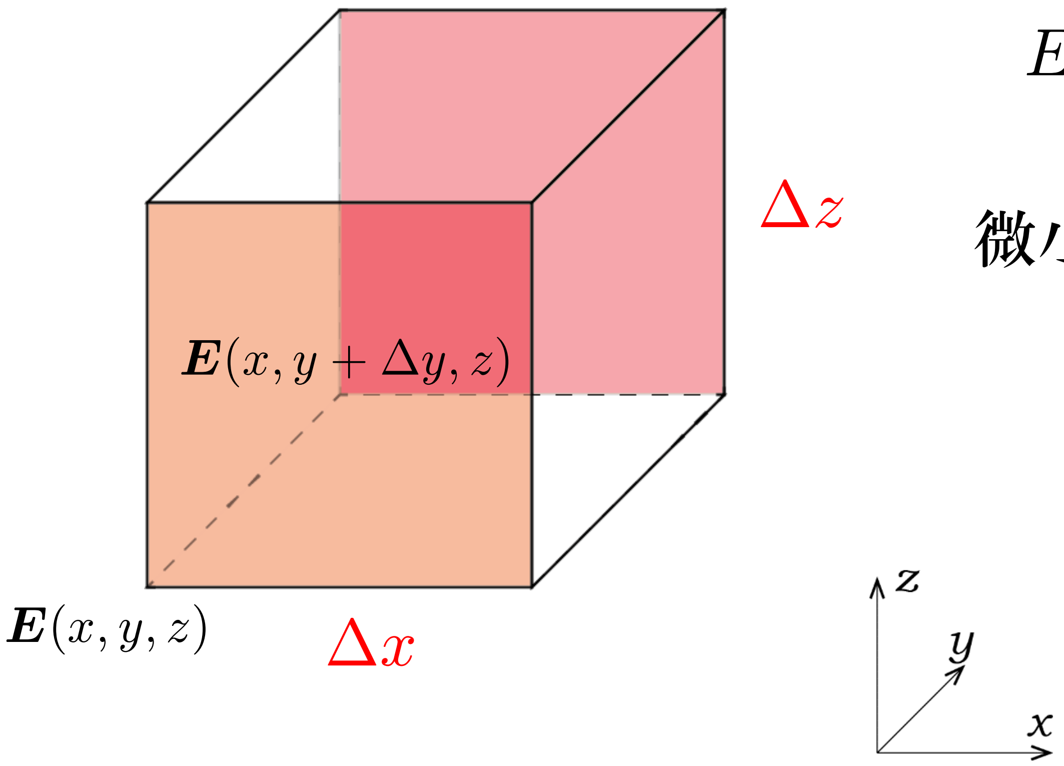
$$E_x(x + \Delta x, y, z) - E_x(x, y, z) \simeq \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta x$$

微小断面 $\Delta y \Delta z$ 内では増分は一様として，

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z}$$

ガウスの定理（続き）

y 軸方向



電界の y 軸方向の増分は，Talylor展開より，

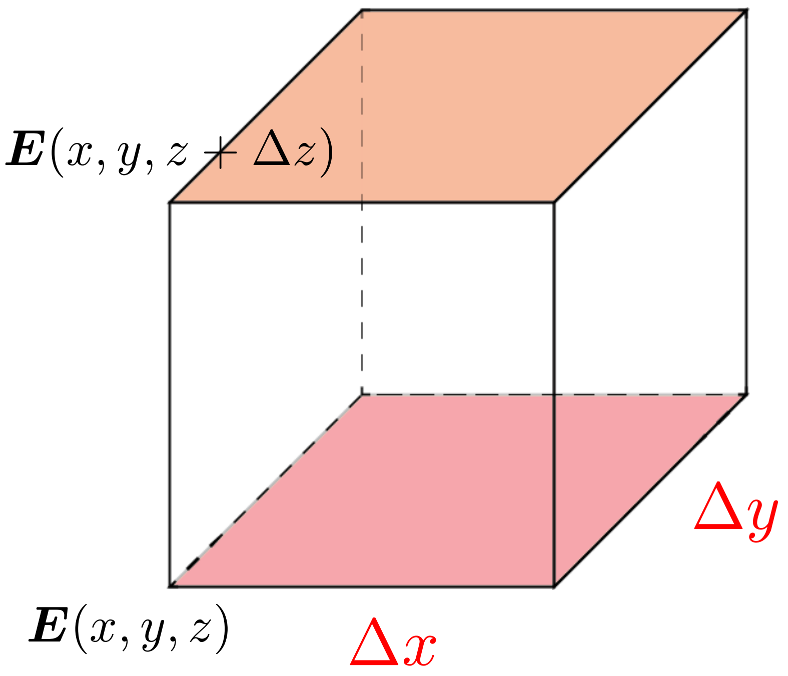
$$E_y(x, y+\Delta y, z) - E_y(x, y, z) \simeq \frac{\partial E_y}{\partial y}\Delta y$$

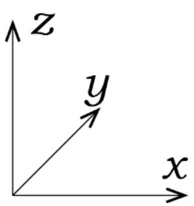
微小断面 $\Delta x \Delta z$ 内では増分は一様として，

$$\frac{\partial E_y}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z$$

ガウスの定理（続き）

z 軸方向





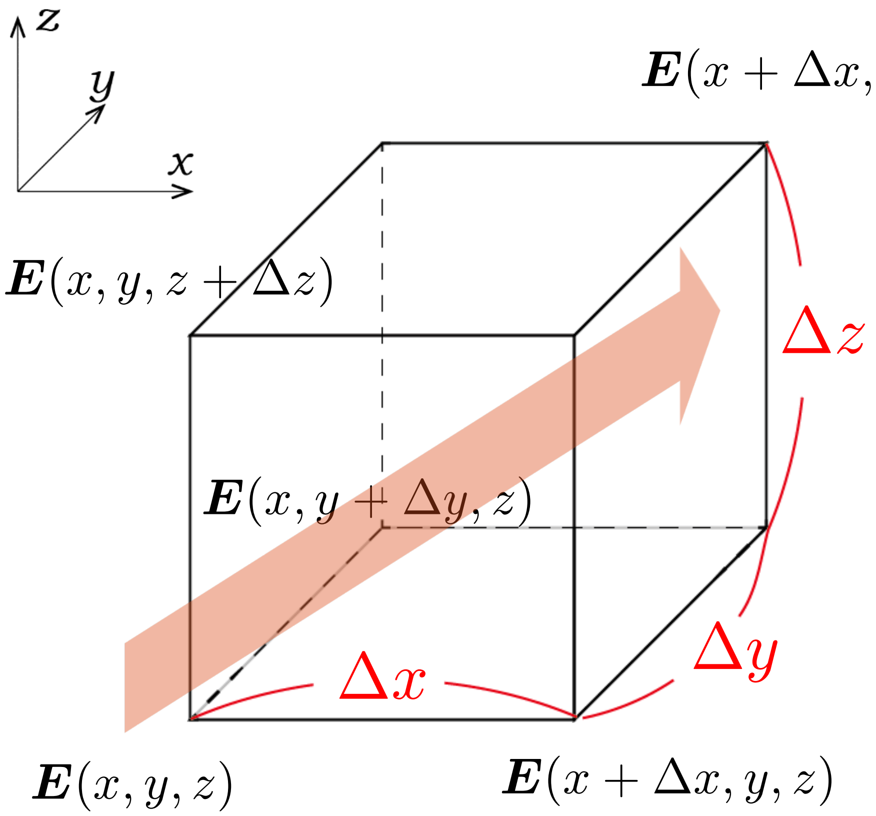
電界の z 軸方向の増分は，Talylor展開より，

$$E_z(x, y, z+\Delta z) - E_z(x, y, z) \simeq \frac{\partial E_z}{\partial z}\Delta z$$

微小断面 $\Delta x \Delta y$ 内では増分は一様として，

$$\boxed{\frac{\partial E_z}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z}$$

ガウスの定理（続き）



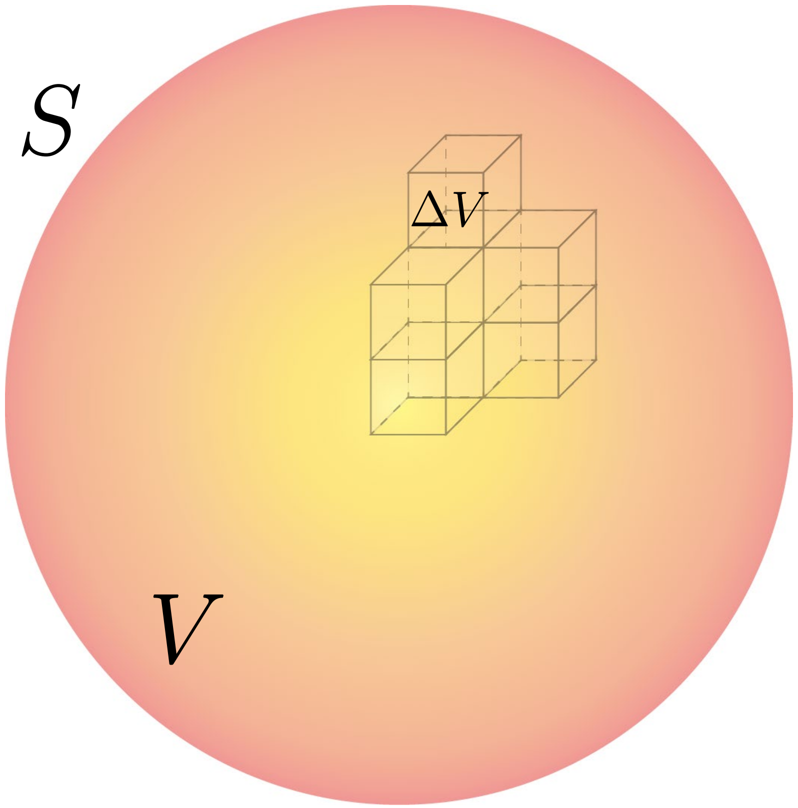
微小体積 $\Delta x\Delta y\Delta z$ 内の電界の増分

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

ガウスの定理（続き）

微小体積 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\Delta V$$



閉曲面 S 内部の体積 V 全体では，

$$\lim_{\Delta V \to 0} \sum_V \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\Delta V$$

$$= \int_V (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E})\mathrm{d}V = \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{E}\ \mathrm{d}V$$

体積分

ガウスの定理（続き）

ある閉曲面 S 内の体積 V について

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{E}\ \mathrm{d}V$$

ガウスの定理

閉曲面を通って外部に放出される量 = 体積内部の増分（発散）の総量

まとめ

- 面積分
- ガウスの定理