電気磁気学Ｉ　第１３回

誘電体と静電容量

電子情報システム工学科
奥宏史

今日学ぶこと

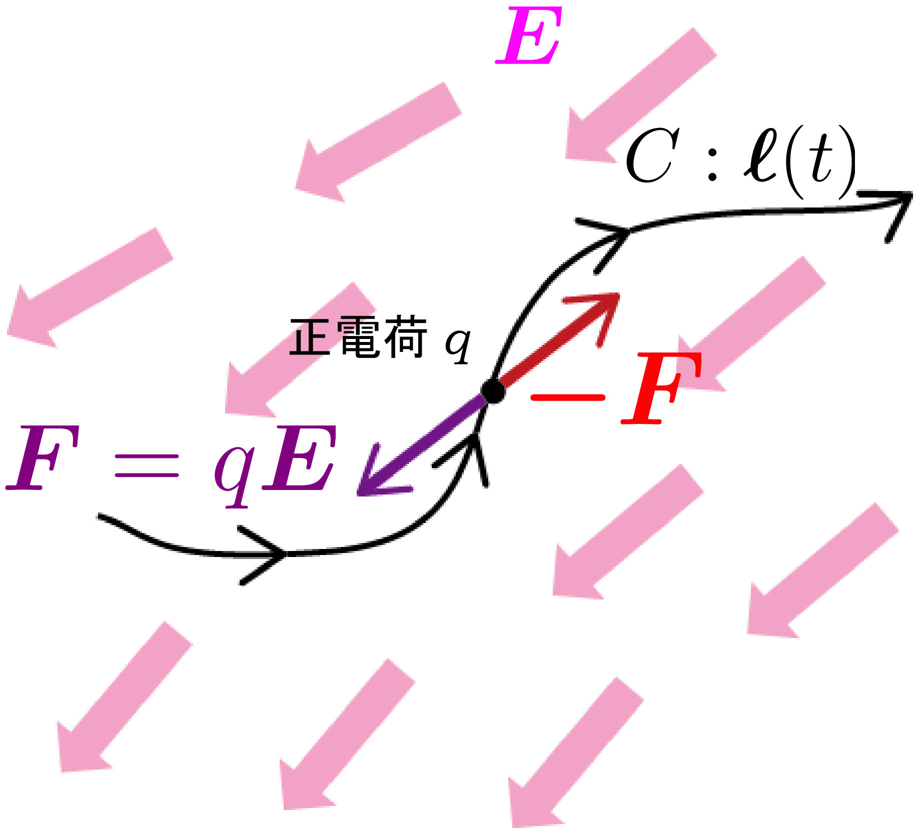
- 誘電率
- 分極
- 平行平板間の電界（復習）
- コンデンサ

電界と電位（復習）

電位差 V:電界中で電荷を動かすとき,
電界が電荷に対してする
単位電荷あたりの仕事量

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}, \quad V = -\int_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$$

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\ V$$



電束密度と電界（復習）

電流: 電荷の移動
磁界の発生源

点電荷による電界

$$|\boldsymbol{D}| = \varepsilon|\boldsymbol{E}|$$
$$= \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \varepsilon\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \rho$$

電荷密度
[C/m^3]

電流に直接関係

電圧に直接関係

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$$

電束密度	電界
[C/m^2]	[V/m]
[A·s/m^2]	電圧
電流	

$$V = -\int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\ell$$

(線積分)

単位強さの電界の力線に沿って1m（単位長さ）線積分すると1V（単位電圧）になる．媒質に依らない．

※誘電率 ε は媒質に密接に関連する値

誘電率

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

ε: 媒質の誘電率
ε_0: 真空の誘電率
ε_s: 比誘電率（無次元量）

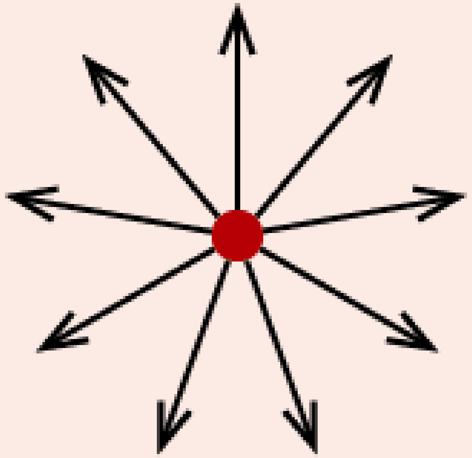
$$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_s \varepsilon_0}$$

力線

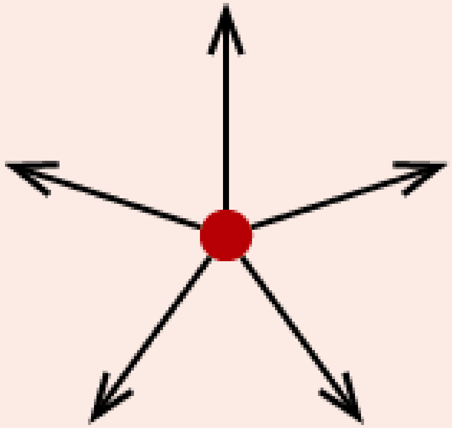
$$V = -\int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$$

単位強さの電界の力線に沿って1m（単位長さ）線積分すると1V（単位電圧）になる．
媒質に依らない．



$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

単位電荷あたりの電界の力線の本数は媒質に依って変わる．



$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{D} = \rho$$

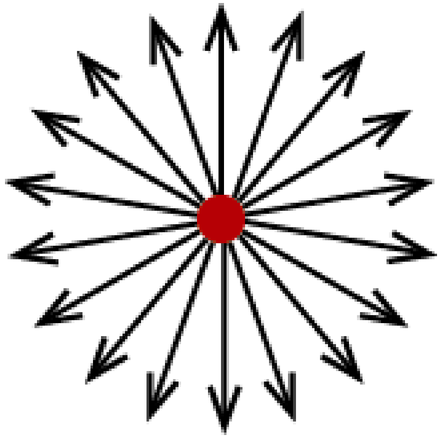
単位電荷あたりの電束密度の力線の本数は媒質に依らない．

力線（つづき）

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_s \varepsilon_0$$

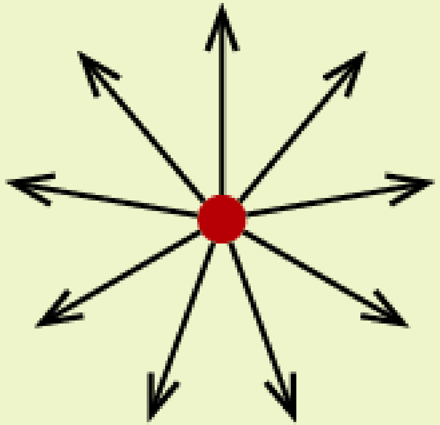
真空中 ε_0



$$\mathrm{div}\boldsymbol{E}_0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

等しい電荷量

媒質の比誘電率 $\varepsilon_s = 2$



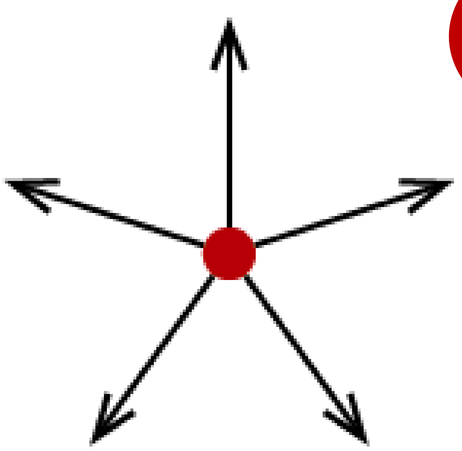
$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\mathrm{div}\boldsymbol{E}_0$$

媒質中で電界の力線の数が1/2になる

力線（つづき）

$$\boxed{\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho}$$

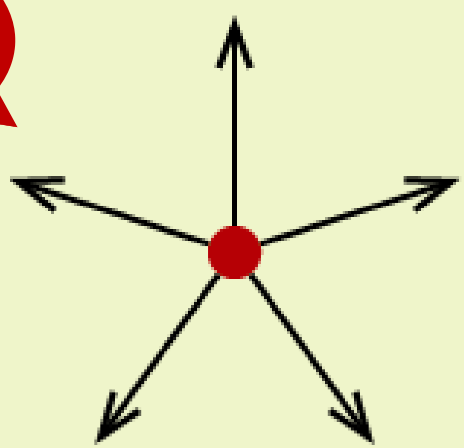
真空中 ε_0



$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho$

等しい電荷量

媒質の比誘電率 $\varepsilon_s = 2$



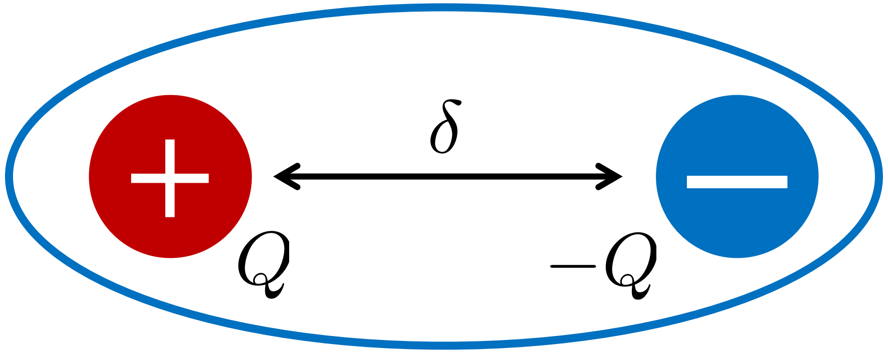
$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho$

電束密度の力線の数は媒質に拠らない

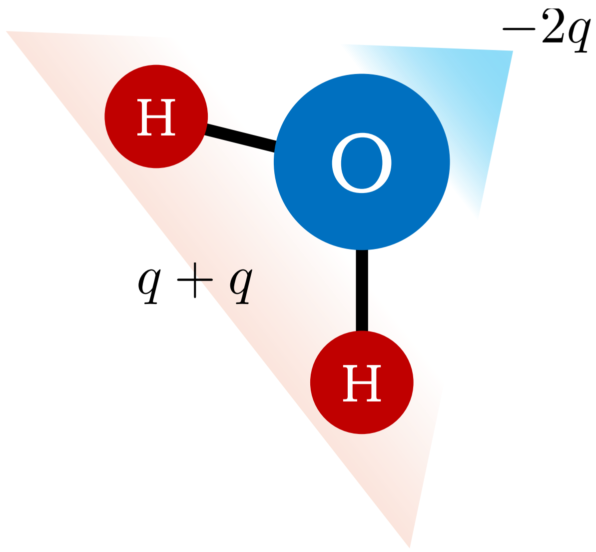
今日学ぶこと

- 誘電率
- 分極
- 平行平板間の電界（復習）
- コンデンサ

双極子



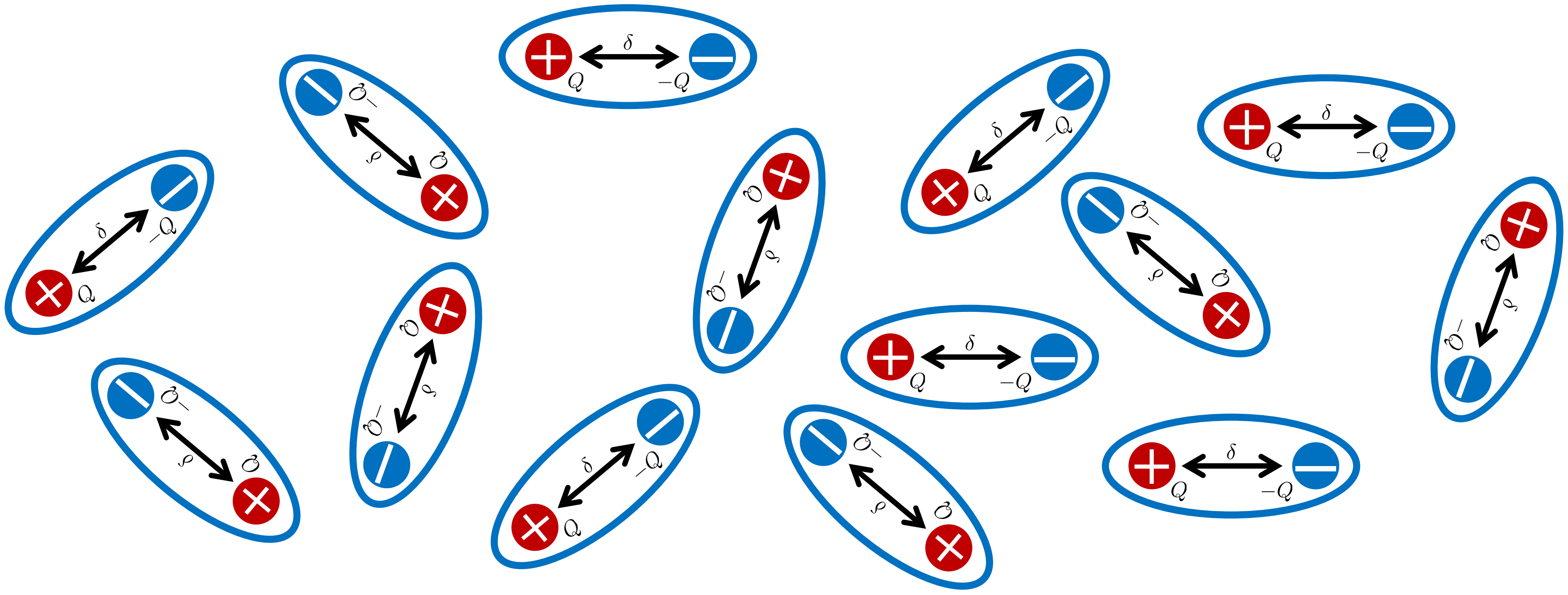
正負一対の電荷



水分子

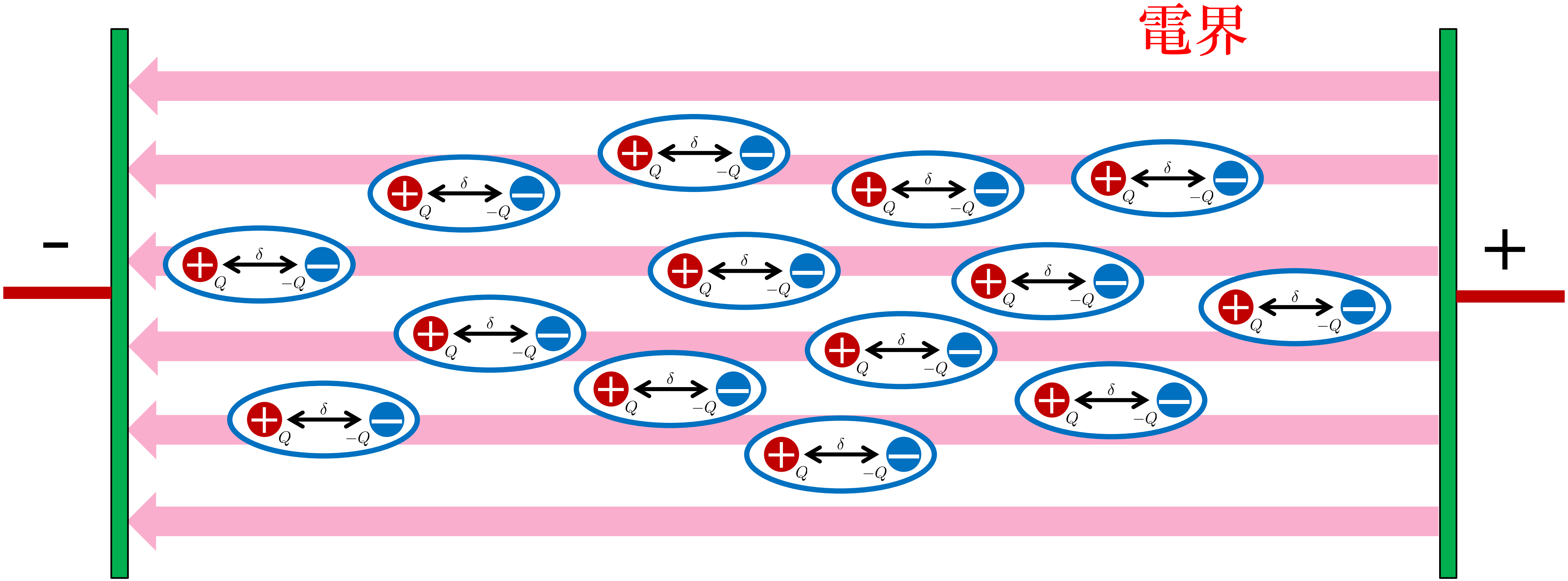
分極モデル

全体としては中性



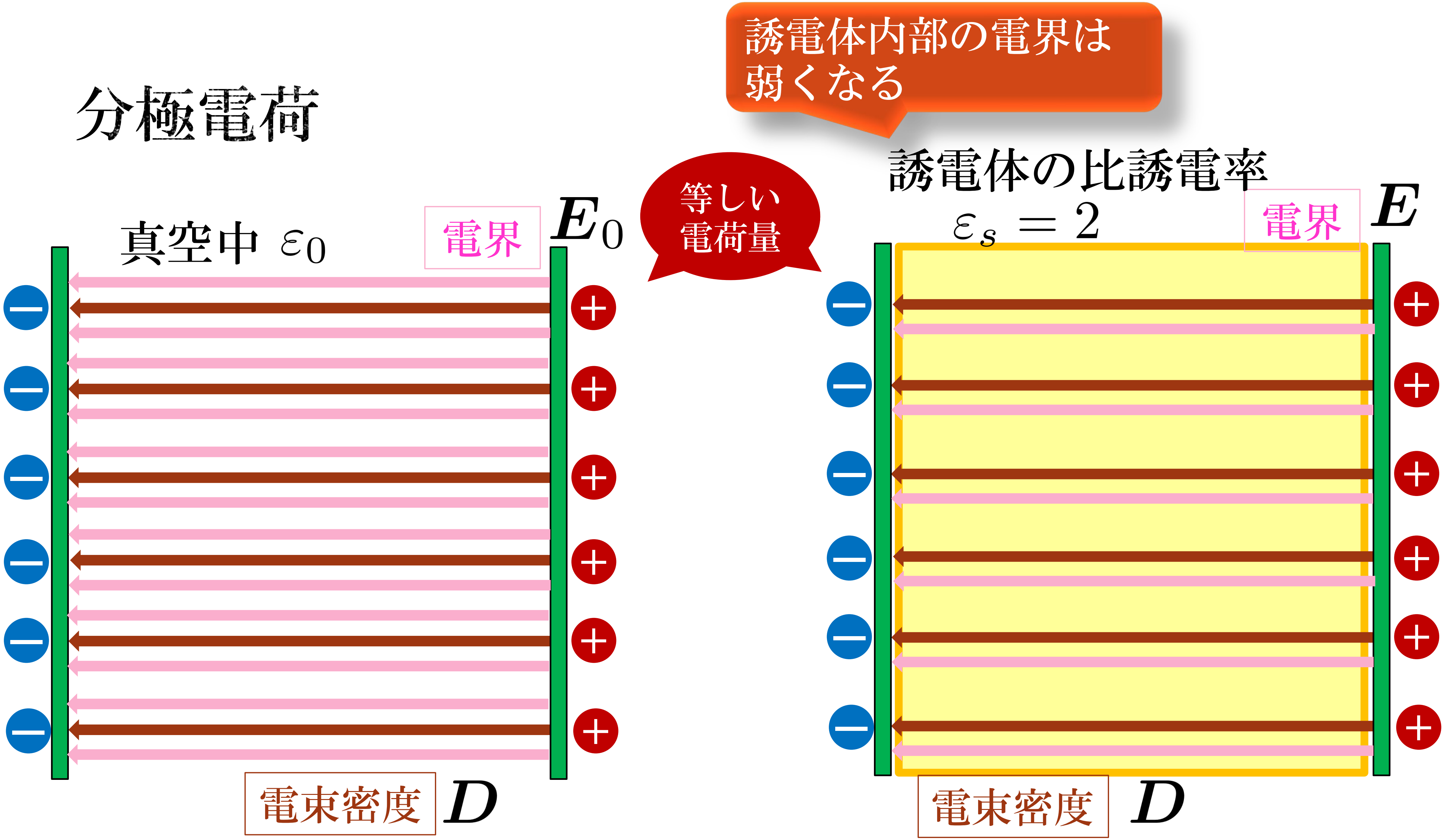
不規則な向きに配置された双極子群

分極モデル（つづき）



外部から電界を与えると向きが一定方向にそろう

分極電荷


誘電体内部の電界は
弱くなる
真空中 ε_0
電界
E_0
等しい
電荷量
誘電体の比誘電率
$\varepsilon_s = 2$
電界
E
電束密度
D
電束密度
D

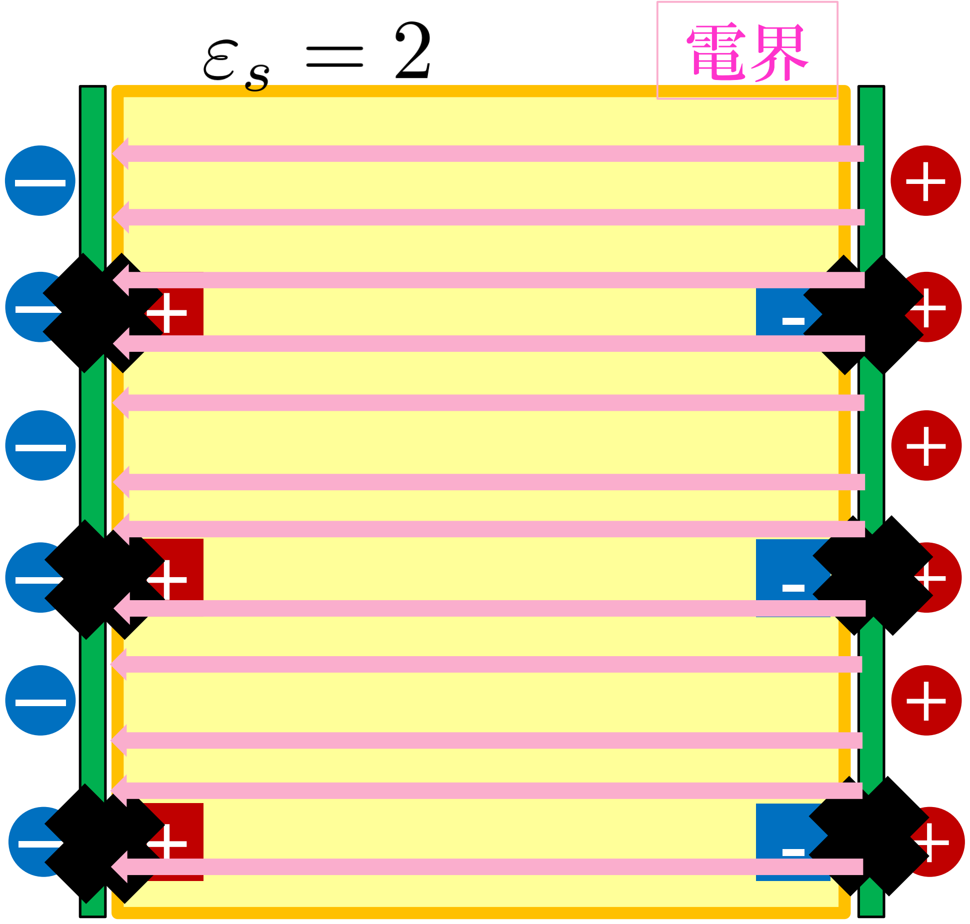
分極電荷（つづき）

分極電荷：誘電体の両端に現れる
双極子の電荷

誘電体の比誘電率

分極ベクトル

真空中 $\boldsymbol{E}_0$



$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_s \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}_e$$

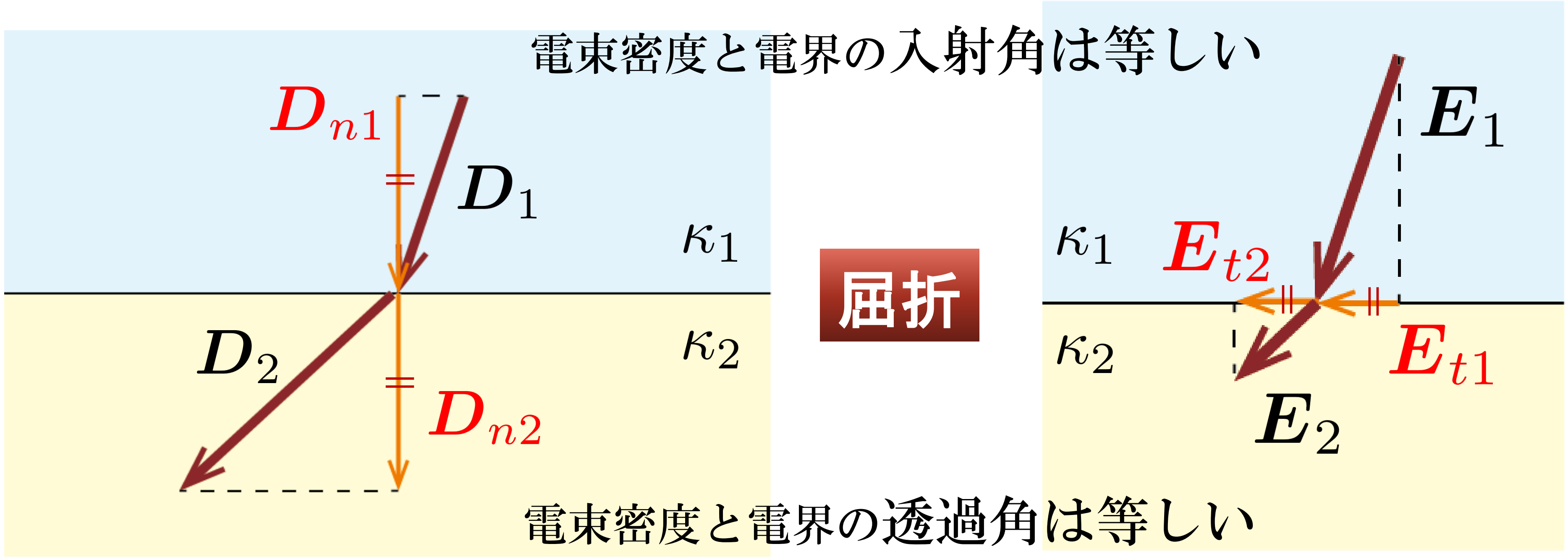
分極ベクトル

$$\boldsymbol{P}_e = (\varepsilon_s - 1)\,\varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

ベクトルの向きは分極現象により正電荷が誘電体内を動いた向き

電界，電束密度の境界条件

- 誘電率 の値が異なる2種の媒質の境界面



電束密度の法線成分が保存

$$D_{n1} = D_{n2}$$

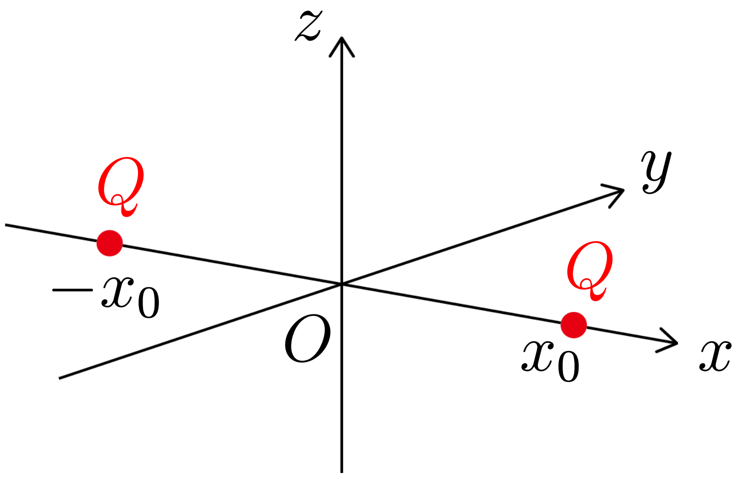
電界の接線成分が保存

$$E_{t1} = E_{t2}$$

今日学ぶこと

- 誘電率
- 分極
- 平行平板間の電界（復習）
- コンデンサ

等しい2点電荷による電界（復習）



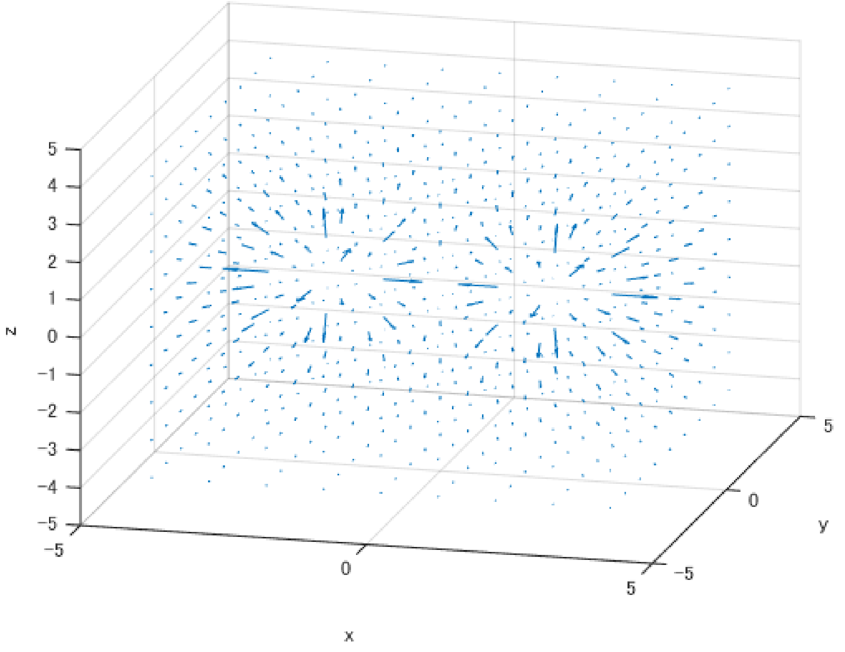
任意の点 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$ における電界は，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{P}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(x-x_0)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{((x-x_0)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(x+x_0)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{((x+x_0)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

とくに，二つの電荷から等距離の点における電界は，

（yz平面($x=0$)上の点）

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{P}|x=0) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{-x_0\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{(x_0^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x_0\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{(x_0^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{(x_0^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$



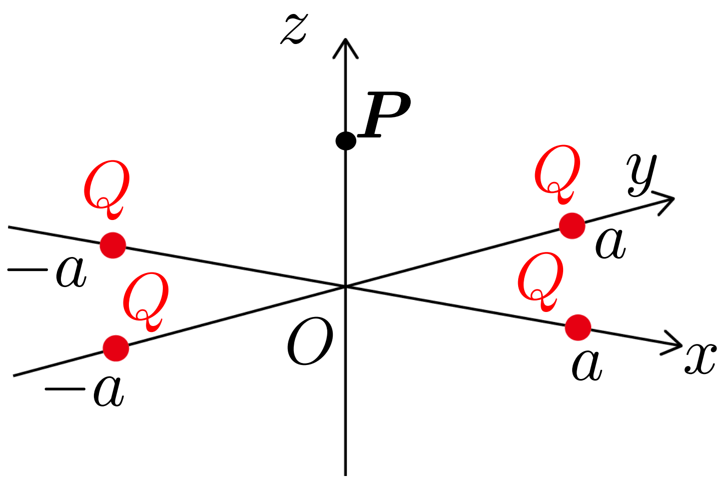
x軸方向成分は打ち消し合う.

等しい4点電荷による電界（復習）

z軸上の任意の点 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & z \end{bmatrix}^T$ における電界は,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{P}|x=0, y=0) = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{z\boldsymbol{k}}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Z軸方向成分のみ.



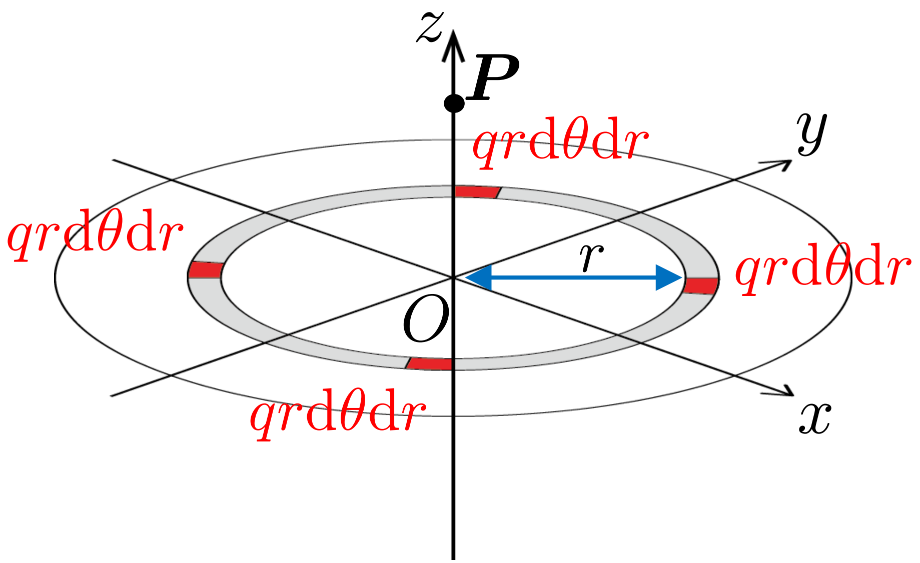
一様に帯電した無限平板による電界（復習）

xy平面上に一様に帯電していると考える．

z軸上の任意の点 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & z \end{bmatrix}^T$ における電界は，

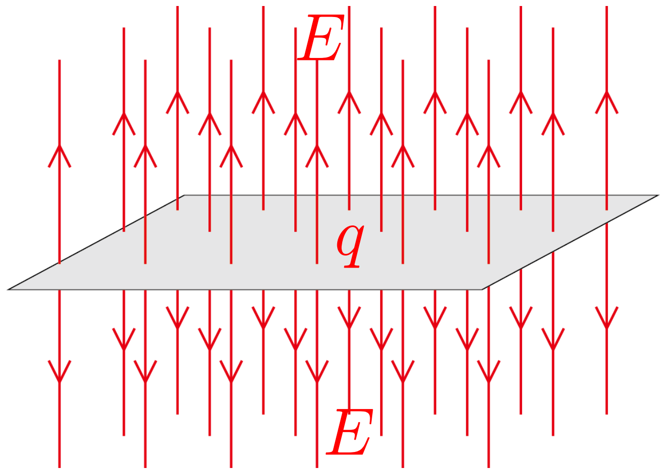
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(z) &= \int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{qr\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r}{\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{z\boldsymbol{k}}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{qz\boldsymbol{k}}{2\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{qz\boldsymbol{k}}{2\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{-1}{(r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\mathrm{d}r = \frac{qz\boldsymbol{k}}{2\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{(r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{q\boldsymbol{k}}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{z}{|z|} \\
&= \begin{cases} \frac{q}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{k}, & z>0 \\ -\frac{q}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{k}, & z<0 \end{cases}
\end{aligned}$$

xy平面からの
距離zに無関係

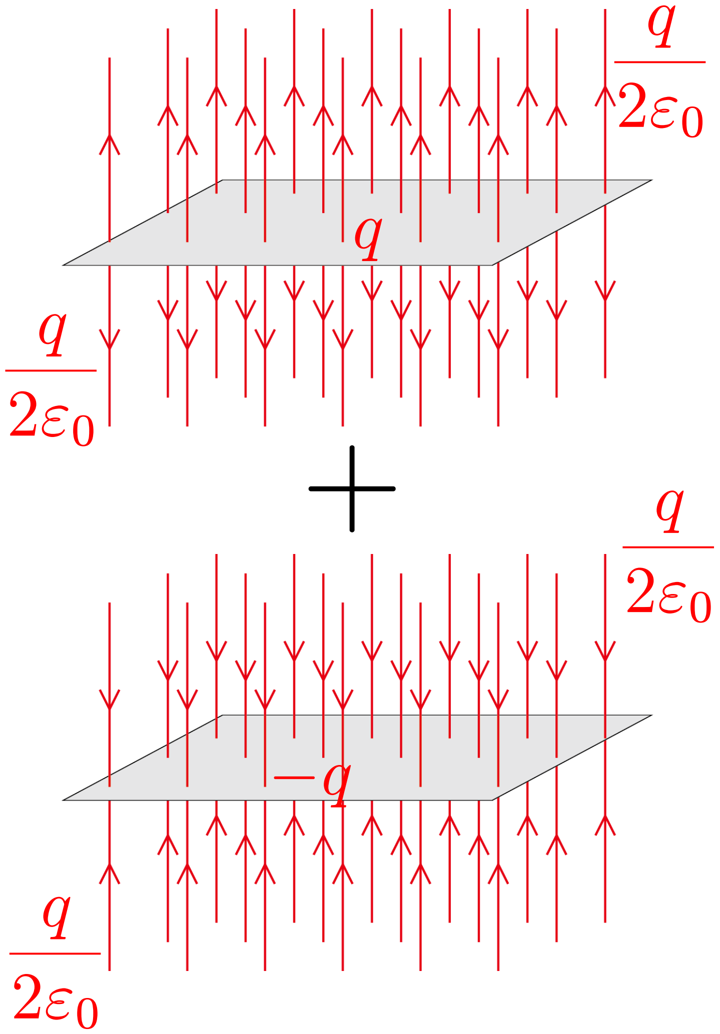


q：単位面積当たりの電荷量

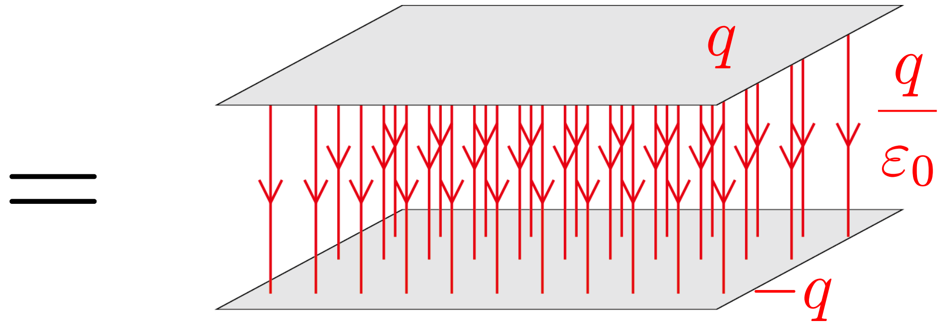
θ：+x 軸とのなす角



平行平板間の電界（復習）



電界の向きに注意して



- 平行平板間の電界は一様で大きさが $\frac{q}{\varepsilon_0}$
- 外側では 0

今日学ぶこと

- 平行平板間の電界（復習）
- コンデンサ

平行平板コンデンサ

- コンデンサの端効果が無視できるとする．
- 極板の面積を S, 板間距離を d とする．
- 極板に蓄えられた電荷量を$Q = qS$ とする．

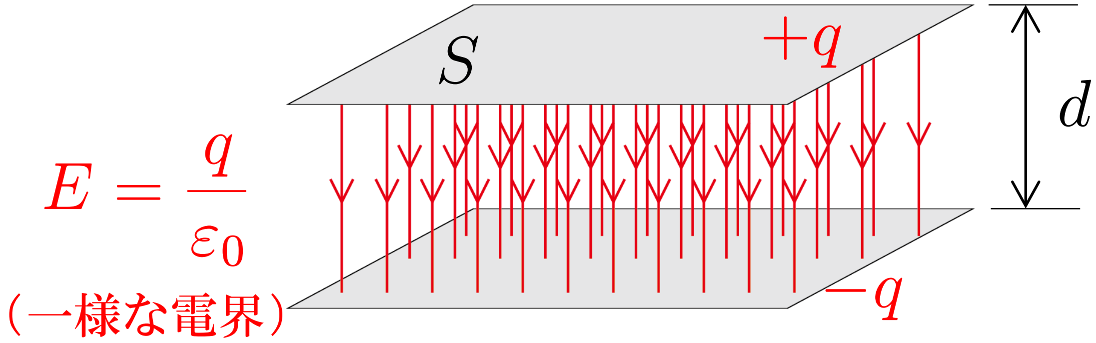
平板間の電位差

$$V = Ed$$

$$V = \frac{d}{\varepsilon_0 S}Q = \frac{Q}{C}, \qquad C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

静電容量

$$q = \frac{Q}{S}$$



静電容量の電圧と電流の関係

- （電流）＝（単位時間当たりの電荷の移動量）

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

- （電荷）＝（静電容量）・（電位差）

$$Q = CV$$

静電容量の電圧と電流の関係式

$$I = C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

まとめ

- 平行平板間の電界（復習）
- コンデンサ