電気磁気学I 講義ノート

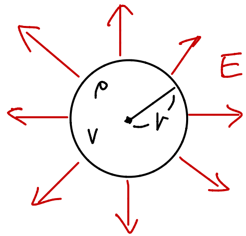
例1　半径 a なる球内には、一様な電荷密度 ρ [C/m³] があり、球の外部には電荷はない。このとき、球の内外の電界の強さ E および V を求めよ。

(1)　球内の電界

(閉曲面として) 半径 r ($r<a$) の球面を考え、その内部についてガウスの定理を適用する。

・左辺　$\boxed{\int_S E \cdot dS}$

電界の大きさを $|E|$ とする。



球面上では、E は一定の値で球面に垂直であることに注意する。(∵物理的直観より)

$$\int_S E \cdot dS = |E| \times (\text{半径 } r \text{ の球の表面積})$$

$$= 4\pi r^2 |E|$$

・右辺 $\boxed{\int_V \mathrm{div}\, E\, dV}$ ← 球内の全電荷量

球内では電荷密度は一定の ρ [C/m³] だから、

$$\int_V \mathrm{div}\, E\, dV = \frac{(\text{電荷密度})}{\varepsilon_0} \times (\text{球の体積})$$

$$= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \frac{4\pi r^3}{3}$$

したがって

$$4\pi r^2 |E| = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\varepsilon_0} \qquad \therefore\ |E| = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

ガウスの定理

$$\int_S E \cdot dS = \int_V \mathrm{div}\, E\, dV$$

(2) 球外の電界

閉曲面として、半径 r ($r>a$) の球面を考え、その内部についてガウスの定理を適用すると、

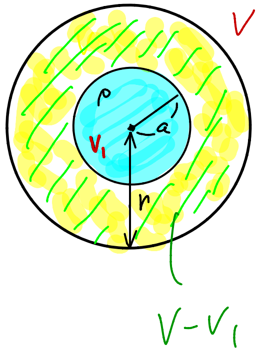
V : 半径 r の球
V_1 : 半径 a の球

・(左辺) $= 4\pi r^2 |E|$

・(右辺) $= \int_V \mathrm{div}\, E\, dV$

$$= \int_{V_1} \mathrm{div}\, E\, dV + \underline{\int_{V-V_1} \mathrm{div}\, E\, dV}$$

電荷は含まれない



$$= \rho \frac{4\pi a^3}{3\varepsilon_0} + 0$$

したがって

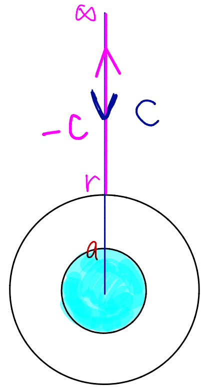
$$\therefore |E| = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

いま、$Q = \frac{4\pi a^3}{3}$ (全電荷量) とおくと、 $\underline{|E| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$

点電荷が作る電界と同じ!

(3) 電位

$-C: l(t) = t, \quad r \le t < \infty$



1) $r > a$ では

$$V = -\int_C |E|\, dl = -\int_\infty^r \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 t^2}\, dt$$

$$= \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r}$$

2) $r < a$ では

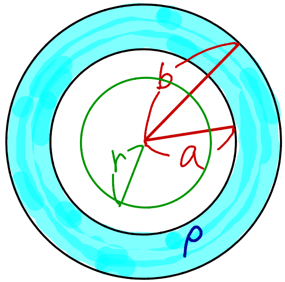
$$V = -\int_C |E|\, dl = -\int_\infty^a |E|\, dt - \int_a^r |E|\, dt$$

$$= -\int_\infty^a \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 t^2}\, dt - \int_a^r \frac{\rho t}{3\varepsilon_0}\, dt$$

$$= \frac{\rho a^2}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho a^2}{6\varepsilon_0} = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}$$

P.46　問1

(1)　$r < a$ の電界　　半径 r の球面を考える。



$$(\text{左辺}) = \int_S E \cdot dS = 4\pi r^2 |E|$$

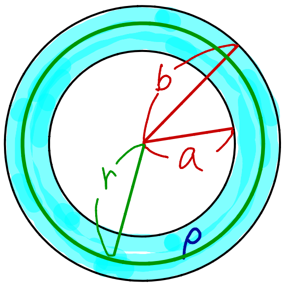
$|E|$：球面上の電界の大きさ

$$(\text{右辺}) = \int_V \mathrm{div}\, E\, dV = 0$$

∵ 球面内部に電荷が存在しない。

したがって　$|E| = 0$

(2)　$a < r < b$ の電界



$$(\text{左辺}) = 4\pi r^2 |E|$$

$$(\text{右辺}) = \left(\frac{4\pi r^3}{3} - \frac{4\pi a^3}{3}\right)\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

したがって

$$|E| = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right)$$

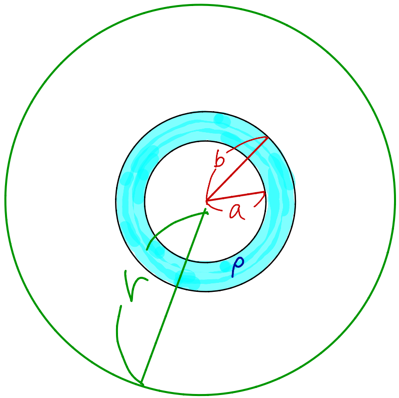
(3)　$b<r$ の電界

$$(\text{左辺}) = 4\pi r^2 |E|$$

$$(\text{右辺}) = \left(\frac{4\pi b^3}{3} - \frac{4\pi a^3}{3} \right) \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

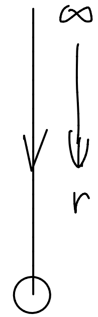
したがって

$$|E| = \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$$



(4) 電位について

1) $b < r$ について



$$V = -\int_{\infty}^{r} E \cdot dl = -\int_{\infty}^{r} \frac{\rho (b^3 - a^3)}{3\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{\rho (b^3 - a^3)}{3\varepsilon_0 r} \quad //$$

2) $a < r < b$ について

$$V = -\int_{\infty}^{r} E \cdot dl = -\int_{\infty}^{b} \frac{\rho (b^3 - a^3)}{3\varepsilon_0 r^2} dr - \int_{b}^{r} \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) dr$$

$$= \frac{\rho (b^3 - a^3)}{3\varepsilon_0 b} - \left[\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r} \right]_b^r$$

$$= \frac{\rho b^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}$$

3) $r < a$ について (上式の r に a を代入)

$$V = \frac{\rho b^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho a^2}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho a^2}{6\varepsilon_0} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (b^2 - a^2)$$