# 演習 0002: $N$ 次元球の体積と表面積

M. H. Nakano

2012 年 6 月 20 日

## 1 問題

$N$ 次元ユークリッド空間において

$$|\boldsymbol{x}|^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i)^2 = r^2 \tag{1}$$

で定められる対象が半径 $r$ の $N$ 次元球の表面であり,

$$|\boldsymbol{x}|^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i)^2 \leq r^2 \tag{2}$$

を満たす領域が半径 $r$ の $N$ 次元球である。これらの表面積 $S_N(r)$ と体積 $V_N(r)$ を求めよ。

ヒント：次元の考察から

$$S_N(r) = S_N(1) r^{N-1} \quad , \quad V_N(r) = V_N(1) r^N \tag{3}$$

である。

## 2 予備知識

ガウス積分

$$G_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \quad (\lambda > 0) \tag{4}$$

は $G_2 = (G_1)^2$ に対して極座標へ変数変換すればすぐに求まる：

$$(G_1)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \; e^{-\lambda(x^2+y^2)} = 2\pi \int_0^{\infty} \mathrm{d}r \; r e^{-\lambda r^2} = \pi \int_0^{\infty} e^{-\lambda \xi} \mathrm{d}\xi = \frac{\pi}{\lambda} \tag{5}$$

ガンマ関数は次式で定義される：

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \xi^{z-1} e^{-\xi} \mathrm{d}\xi \quad (\Re\mathrm{e}\, z > 0) \tag{6}$$

次の公式が成立つことが部分積分によりわかる：

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{7}$$

また，直接に積分して（$z=\frac{1}{2}$ に対しては変数変換するとガウス積分になる）

$$\Gamma(1) = 1 \quad , \quad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \tag{8}$$

と求まるから，整数と半整数の $z$ に対する $\Gamma(z+1)$ の値は

$$\Gamma(n+1) = n! \quad , \quad \Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi} \tag{9}$$

となる。$t^{\nu-1}$ のラプラス変換は

$$\mathfrak{L}(t^{\nu-1}) = \int_0^\infty t^{\nu-1}e^{-st}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(\nu)}{s^\nu} \tag{10}$$

# 3　解答 1

## 3.1　表面積

次のような $N$ 次元のガウス積分を評価しよう：

$$G_n(\lambda) := \int \mathrm{d}^N\boldsymbol{x}\exp(-\lambda|\boldsymbol{x}|^2) \tag{11}$$

積分範囲は全ての変数について全領域である。被積分関数は 1 変数関数の積に分解できるから，次のように簡単に積分できる：

$$G_n(\lambda) = \prod_{i=1}^N \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda(x_i)^2}\mathrm{d}x_i\right) = \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{N}{2}} \tag{12}$$

一方で，

$$\begin{aligned} G_N(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda q^2}S_n(q)\mathrm{d}q = S_N(1)\int_0^\infty q^{N-1}e^{-\lambda q^2} \\ &= S_N(1)\frac{1}{2\lambda^{N/2}}\int_0^\infty \xi^{\frac{N}{2}-1}e^{-\xi}\mathrm{d}\xi = S_N(1)\frac{\Gamma(N/2)}{2\lambda^{N/2}} \end{aligned} \tag{13}$$

と求まる。ここで $\lambda q^2 = \xi$ の変数変換を行い，ガンマ関数の定義を用いた。以上の 2 つの方法で求めた $G_N(\lambda)$ の値は等しいのだから

$$S_N(1)\frac{\Gamma(N/2)}{2\lambda^{N/2}} = \frac{\pi^{N/2}}{\lambda^{N/2}} \tag{14}$$

したがって

$$S_N(1) = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} \tag{15}$$

よって

$$S_N(r) = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} r^{N-1} \tag{16}$$

### 3.2 体積

求める体積は

$$V_N(r) = \int_0^r S_N(q)\mathrm{d}q = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} \int_0^r q^{N-1}\mathrm{d}q = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} \frac{r^N}{N} \tag{17}$$

## 4 解答 2

$$f(t) := V_N(r) = \int \mathrm{d}^N\boldsymbol{x}\ \theta(t - |\boldsymbol{x}|^2) \quad , \quad t := r^2 \tag{18}$$

で $f(t)$ を定義する。表面積は

$$S_N(r) = \frac{\mathrm{d}V_N(r)}{\mathrm{d}r} = 2rf'(t) \tag{19}$$

と表され，$f'(t)$ は 単位階段関数の微分がデルタ関数になるから

$$f'(t) = \int \mathrm{d}^N\boldsymbol{x}\ \delta(t - |\boldsymbol{x}|^2) \tag{20}$$

と表される。ここで $f'(t)$ のラプラス変換を考える：

$$F(s) = \mathfrak{L}(f') := \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}^N\boldsymbol{x}\ e^{-s|\boldsymbol{x}|^2} = \frac{\pi^{N/2}}{s^{N/2}} \tag{21}$$

すると，ラプラス逆変換によって

$$f'(t) = \pi^{N/2}\mathfrak{L}^{-1}(\frac{1}{s^{N/2}}) = \pi^{N/2}\frac{t^{\frac{N}{2}-1}}{\Gamma(N/2)} \tag{22}$$

となる。したがって

$$S_N(r) = 2rf'(r^2) = 2r\pi^{N/2}\frac{r^{N-2}}{\Gamma(N/2)} = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} r^{N-1} \tag{23}$$

表面積から体積を求める方法は解答 1 と同じである。

## 5 検討

$$S_N(r) = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} r^{N-1} \quad , \quad V_N(r) = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} \frac{r^N}{N} \tag{24}$$

と求まった。$S_2(r)$ と $V_2(r)$ は（普通の）円の円周と面積である。求めた公式で $N = 2$ とすると確かに

$$S_2(r) = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} r = 2\pi r \quad , \quad V_2(r) = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} \frac{r^2}{2} = \pi r^2 \tag{25}$$

と既知の表式に帰着する。同様に $N = 3$ とすると（普通の）球の表面積と体積になる：

$$S_N(r) = \frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma(3/2)} r^2 = 4\pi r^2 \quad , \quad V_N(r) = \frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma(3/2)} \frac{r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3} \tag{26}$$

高次元球の表面積は古典統計力学の計算に必要となる。