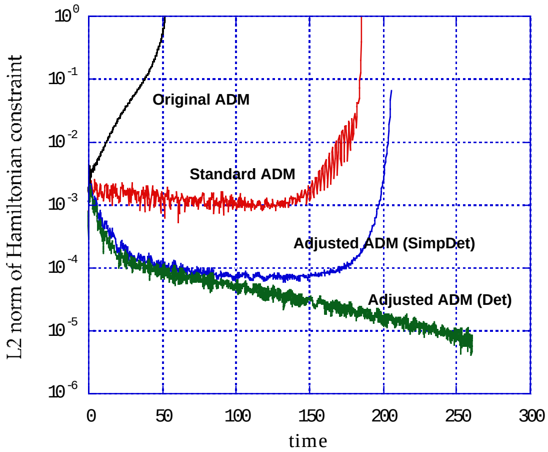
安定な数値計算を行うための Einstein 方程式の定式化とその検証

理化学研究所　計算科学技術推進室　真貝寿明
hshinkai@postman.riken.go.jp

一般相対性理論に基づいて重力波発生の数値シミュレーションを行うプロジェクトが世界各地で精力的に進んでいる．時空の時間発展を考える標準的な手段は，Arnowitt-Deser-Misner(ADM) によって導出された，時空を空間 (3 次元) と時間 (1 次元) に分解する「3+1 分解」である．通常の数値計算では，拘束条件式を初期に解き，時間発展の際には拘束条件をモニターして，計算精度を判定している．最近，Einstein 方程式の定式化の違いで，数学的には等価であっても，数値的な安定性が変わることが確かな事実として認識されてきた [0]．

これまでに我々は，発展方程式の右辺に拘束条件式を適当な組み合わせで補正することにより，(いわゆる Lagrange 乗数的補正）することで，時間発展において拘束面 (constrained surface) がアトラクターとなるような発展システム (“adjusted system”) を構築することが可能であることを，報告してきた [1,2]．具体的な手法として，あらかじめ拘束条件式の発展方程式を固有値解析することを提案し，ADM 形式と，いわゆる Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura(BSSN) 形式の発展方程式に対して，さらに安定性が優れているであろう補正方法を提案してきた．

今回は，これらの提案を実際の数値計算に応用し，予想通りの数値的安定性が得られていることを報告した．ADM 形式に対しては，我々が独自に作成したコードを用い，Teukolsky 重力波（線形重力波）の長時間時間発展問題についての解析を紹介した．モニターしている拘束条件式の破れは，適切に選ばれた adjust 項によって指数関数的に減少し，従来の定式化よりも格段に長期の数値シミュレーションが可能になることを示している．



Teukolsky wave の長時間発展における Hamiltonian 拘束条件の破れ．各種の adjusted ADM systems に対して比較した．時間発展は harmonic スライス条件，周期境界条件，iterative Crank-Nicholson 法を用いた．コードは [3] のプロジェクト用に作られた，真貝独自のもの．格子数は 24^3, $\Delta x = 0.25$.

数値的により安定な発展方程式が，単に拘束条件式を使って adjust することで得られる，というアイデアは魅力的である．我々は，“adjusted system” が，現在までに行われている試行錯誤的な事例を統一的に理解する方法であり，安定で精度の良い数値計算への指針を与えるだろうと期待している．今後は，adjust する際の乗数パラメータの決定プロセスをどう汎用化するか，という課題に取り組みたい．

本研究は，早稲田大学数理科学科の米田元との共同研究である．また，理化学研究所基礎科学特別研究員研究費，および科研費 若手研究 (B) 課題番号 14740179 (2002 年-2005 年) の交付を受けている．

[0] H. Shinkai and G. Yoneda, in *Progress in Astronomy and Astrophysics* (Nova Science Publ) to be published, available as gr-qc/0209111.

[1] G. Yoneda and H. Shinkai, Phys. Rev. **D 63** (2001) 120419; Phys. Rev. **D 66** (2002) 124003. H. Shinkai and G. Yoneda, Class. Quant. Grav. **19** (2002) 1027.

[2] G. Yoneda and H. Shinkai, Class. Quant. Grav. **20** (2003) L31.

[3] Mexico Numerical Relativity Workshop 2002 Participants and Colleagues, in preparation.