

# 数値相対論における定式化問題：数値計算報告

理化学研究所 計算科学技術推進室 真貝寿明

hshinkai@postman.riken.go.jp

一般相対性理論に基づいて重力波発生の数値シミュレーションを行うプロジェクトが世界各地で精力的に進んでいる。時空の時間発展を考える標準的な手段は、Arnowitt-Deser-Misner(ADM)によって導出された、時空を空間(3次元)と時間(1次元)に分解する「3+1分解」である。通常の数値計算では、拘束条件式を初期に解き、時間発展の際には拘束条件をモニターして、計算精度を判定している。最近、Einstein方程式の定式化の違いで、数学的には等価であっても、数値的な安定性が変わることが確かな事実として認識されてきた[0]。

これまでに我々は、発展方程式の右辺に拘束条件式を適当な組み合わせで補正することにより、(いわゆるLagrange乗数的補正)することで、時間発展において拘束面(constrained surface)がアトラクターとなるような発展システム(“adjusted system”)を構築することが可能であることを、報告してきた[1]。具体的な手法として、あらかじめ拘束条件式の発展方程式を固有値解析することを提案し、ADM形式と、いわゆるBaumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura(BSSN)形式の発展方程式に対して、さらに安定性が優れているであろう補正方法を提案してきた。

今回は、これらの提案を実際の数値計算に応用し、予想通りの数値的安定性が得られていることをまず報告した。ADM形式に対しては、我々が独自に作成したコードを用い、Teukolsky重力波(線形重力波)の長時間時間発展問題についての解析を紹介した。BSSN形式に対しては、Yo et al [2]によるKerr-Schild時空に対する数値再現解析を紹介した。いずれもモニターしている拘束条件式の破れは、適切に選ばれたadjust項によって指数関数的に減少し、従来の定式化よりも格段に長期の数値シミュレーションが可能になることを示している。

次に、この分野の最近の進展を、いくつか紹介した。

- (1) 拘束条件式の発展に対する一般的な考察 [3]。

これまでの、Fourierモードに変換した拘束条件発展行列に対する固有値解析に加え、対角化可能性も考慮しないといけない場合が生じること。

- (2) 双曲形式に基づいたCalabrese et al[4]に対するコメント

「グリッド数に反比例したノルムの早期発散の証明」は、「特性行列部分のみ」の解析であり「背景固定」であるために、一般性を欠いていること。

- (3) Einstein方程式の定式化問題に対する世界のグループ共通の比較計算の試み[5]

同じ初期条件、同じ数値テクニックで、種々の定式化を比較するプロジェクトの紹介。

数値的により安定な発展方程式が、単に拘束条件式を使ってadjustすることで得られる、というアイデアは魅力的である。我々は、“adjusted system”が、現在までに行われている試行錯誤的な事例を統一的に理解する方法であり、安定で精度の良い数値計算への指針を与えるだろうと期待している。今後は、adjustする際の乗数パラメータの決定プロセスをどう汎用化するか、という課題に取り組みたい。

本研究は、早稲田大学数理科学科の米田元との共同研究である。また、理化学研究所基礎科学特別研究員研究費、および科研費 若手研究(B) 課題番号14740179 (2002年-2005年)の交付を受けている。

[0] H. Shinkai and G. Yoneda, in *Progress in Astronomy and Astrophysics* (Nova Science Publ) to be published, available as gr-qc/0209111.

[1] G. Yoneda and H. Shinkai, *Phys. Rev. D* **63** (2001) 120419; *Phys. Rev. D* **66** (2002) 124003. H. Shinkai and G. Yoneda, *Class. Quant. Grav.* **19** (2002) 1027.

[2] H.-J. Yo, T.W. Baumgarte and S. Shapiro, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 084026.

[3] G. Yoneda and H. Shinkai, *Class. Quant. Grav.* **20** (2003) L31.

[4] G. Calabrese, J. Pullin, O. Sarbach, M. Tiglio, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 041501.

[5] Mexico Numerical Relativity Workshop 2002 Participants and Colleagues, in preparation.