25aWH-2　安定な数値シミュレーションを行うためのEinstein方程式の定式化

理研計算科学，早稲田数理科学[A]　　真貝寿明，米田元[A]
Formulation of Einstein equations for stable numerical simulations
Comptational Science Div., RIKEN　　Hisaaki Shinkai and Gen Yoneda [A]
Dept. Mathematical Science, Waseda U. [A]

一般相対性理論に基づいて重力波発生の数値シミュレーションを行うプロジェクトが世界各地で精力的に進んでいる．時空の時間発展を考える標準的な手段は，Arnowitt-Deser-Misner(ADM)によって導出された，時空を空間(3次元)と時間(1次元)に分解する「3+1分解」である．最近，Einstein方程式の定式化の違いで，数値的な安定性が変わってくることがしばしば報告されている．我々は，現在までに行われている試行錯誤的な事例を統一的に理解する方法を提案し，安定で精度の良い数値計算を行え得るだろう定式化を提案する．

これまでに試みられている方法は大きく3つに大別できる．(1) 日本の数値相対論グループが開発した，ADM変数を共形分解し，さらにRicci曲率の計算に新変数を導入するなどの工夫を行う方法　(いわゆる Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura方式)．(2) 運動方程式が陽に双曲型発展方程式になるように，変数を工夫したり，拘束条件式を加えるなどの改良を行う方法．(3) 拘束条件式の破れが自己回復するような新たなシステムを構築する方法．これらのうち，(1) の有効性は計算実例で多々示されているが，何故ADMより安定性が優れるのか，明確な説明はなされていない．(2) は，双曲型偏微分方程式の理論を応用するものだが，Einstein方程式に於いては，多くの場合それは「期待」に過ぎない．(1)-(3)すべてに共通する工夫は，運動方程式の右辺に，本来ゼロであるべき拘束条件式を加えていることである．

我々は，数値計算の安定性を議論する際に，時間発展を通じて満たされるべき拘束条件式（の破れ）の発展方程式に注目した．運動方程式の右辺に拘束条件式を加える(adjust)操作によって，拘束条件式に発生する破れの発展具合も変化する．破れがあっても，それが有限に留まるか，ゼロになるように発展できるなら，システムは安定な発展を行うと考えられる．我々は，数値発展に安定なシステムを得る指標として，次の仮説(十分条件）を立てた．

仮説： 拘束条件の発展方程式をFourier分解し，その固有値を計算する．固有値の (a)「実部が負」あるいは (b)「虚数部分をもつ」ならば，元の発展方程式はより安定である．

すでに，この仮説が有効であることは，Maxwell方程式の時間発展比較やAshtekar変数を用いた双曲型運動方程式の時間発展比較に於いて示した[0]．そして今回，ADM形式でもこのアイデアが応用できること を示した[1, 2]．これは，提案当初，対称双曲型に限られていた上記(3)の「拘束面がアトラクターになる」システムが，ADM変数のままでも実現しうることを示唆する．

我々の解析は，これまで双曲形式分類の議論で見落とされてきた，低次項の与える影響も含めて議論するものである．その結果，Detweiler (1987) によって考案された，修正ADM方程式の乗数パラメータの有効範囲も与えることができた[1]．また，固有値解析の議論が，座標系の取り方によって変わること，及び時間発展に応じても変わることを示した[2]．そして，さまざまな修正に対し，予想されるシステムの安定性を議論した[2]．

数値的により安定な発展方程式が，単に拘束条件式を使ってadjustすることで得られる，というアイデアは魅力的である．この統一的な理解は，現在，adjustする際の乗数パラメータの決定プロセスをどう汎用化するか，という段階にある．

[0] H. Shinkai and G. Yoneda, Class. Quant. Grav. **17** (2000) 4799, G. Yoneda and H. Shinkai, Class. Quant. Grav. **18** (2001) 441 (available as gr-qc/0005003, 0007034)
[1] G. Yoneda and H. Shinkai, Phys. Rev. **D 63** (2001) 120419 (available as gr-qc/0103032)
[2] H. Shinkai and G. Yoneda, gr-qc/0110008