

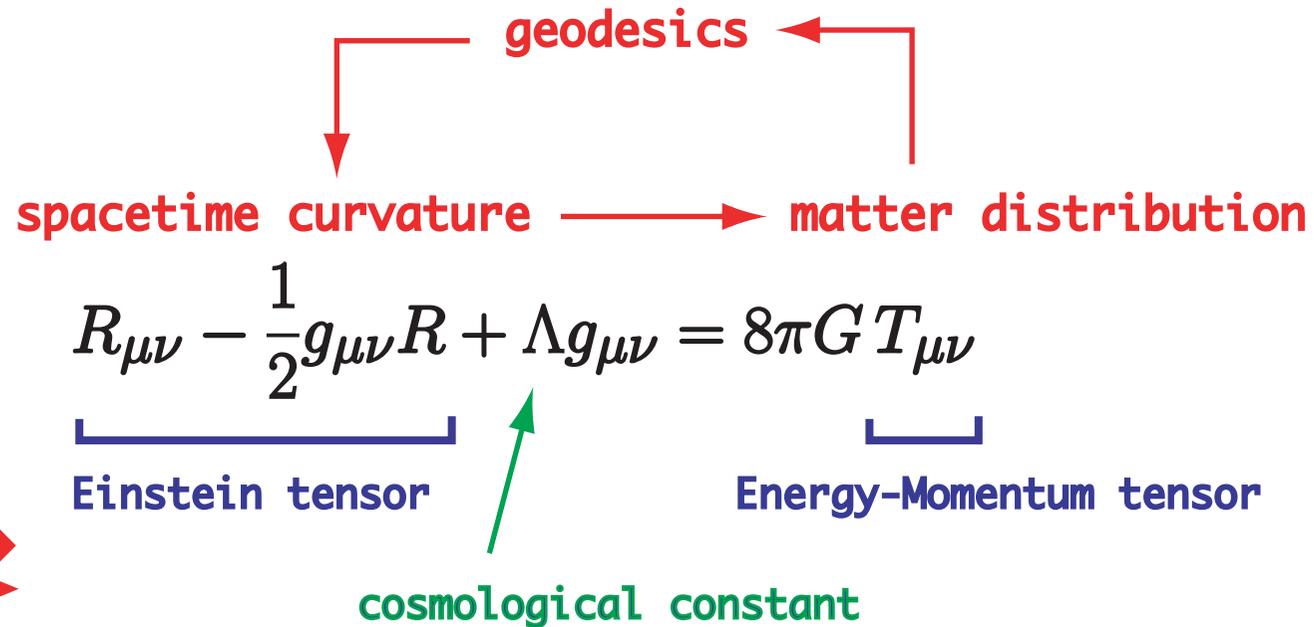
重力物理の類似モデルとしての ボーズ・アインシュタイン凝縮

真貝寿明 (4月から 大阪工業大 情報科学)

1. 重力物理の類似モデル
black hole horizon = sonic horizon
2. Bose-Einstein Condensate (BEC)
3. 重力物理の類似モデルとしてのBEC
black hole / white dwarf / supernova

いちばん最近のレビューは,
Barcelo, Liverati, and Visser, Living Rev. Relativity 8 (2005) 12
<http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2005-12/index.html>

The Einstein equation



Solve for metric
 $g_{\mu\nu}(t, x, y, z)$
 (10 components)

flat spacetime (Minkowskii spacetime):

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \end{aligned}$$

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu := g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{tx} & g_{ty} & g_{tz} \\ & g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ & & g_{yy} & g_{yz} \\ \text{sym.} & & & g_{zz} \end{pmatrix}$$

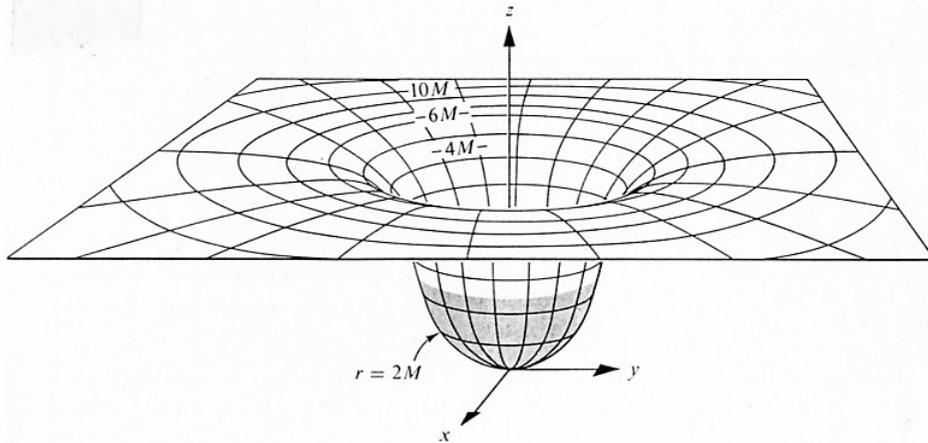


Figure 23.1. Geometry within (grey) and around (white) a star of radius $R = 2.66M$, schematically displayed. The star is in hydrostatic equilibrium and has zero angular momentum (spherical symmetry). The two-dimensional geometry

$$ds^2 = [1 - 2m(r)/r]^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2$$

of an equatorial slice through the star ($\theta = \pi/2$, $t = \text{constant}$) is represented as embedded in Euclidean 3-space, in such a way that distances between any two nearby points (r, ϕ) and $(r + dr, \phi + d\phi)$ are correctly reproduced. Distances measured off the curved surface have no physical meaning; points off that surface have no physical meaning; and the Euclidean 3-space itself has no physical meaning. Only the curved 2-geometry has meaning. A circle of Schwarzschild coordinate radius r has proper circumference $2\pi r$ (attention limited to equatorial plane of star, $\theta = \pi/2$). Replace this circle by a sphere of proper area $4\pi r^2$, similarly for all the other circles, in order to visualize the entire 3-geometry in and around the star at any chosen moment of Schwarzschild coordinate time t . The factor $[1 - 2m(r)/r]^{-1}$ develops no singularity as r decreases within $r = 2M$, because $m(r)$ decreases sufficiently fast with decreasing r .

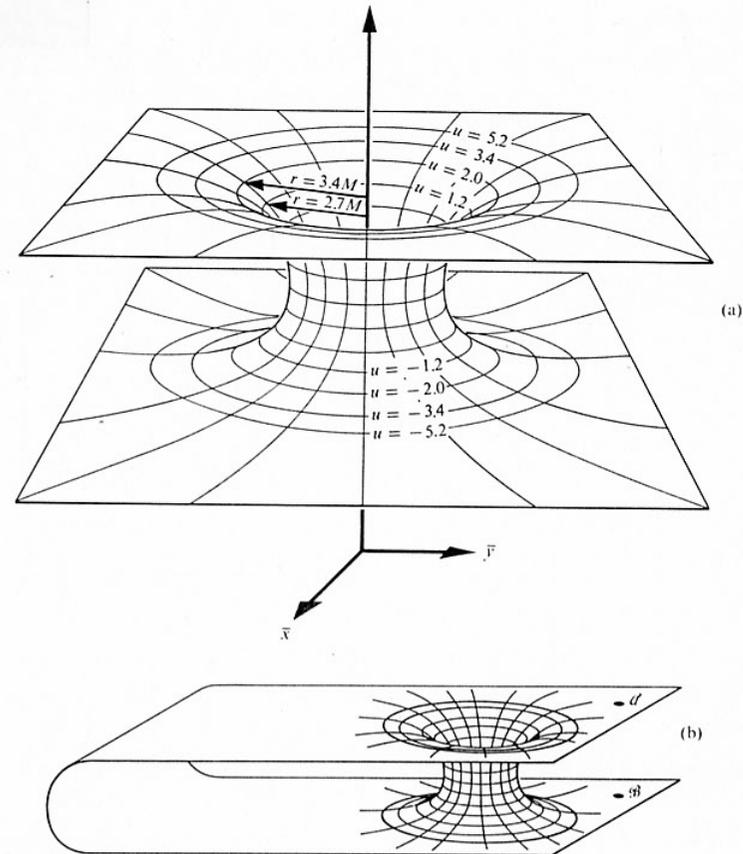


Figure 31.5. (a) The Schwarzschild space geometry at the "moment of time" $t = v = 0$, with one degree of rotational freedom suppressed ($\theta = \pi/2$). To restore that rotational freedom and obtain the full Schwarzschild 3-geometry, one mentally replaces the circles of constant $\bar{r} = (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^{1/2}$ with spherical surfaces of area $4\pi\bar{r}^2$. Note that the resultant 3-geometry becomes flat (Euclidean) far from the throat of the bridge in both directions (both "universes"). (b) An embedding of the Schwarzschild space geometry at "time" $t = v = 0$, which is geometrically identical to the embedding (a), but which is topologically different. Einstein's field equations fix the local geometry of spacetime, but they do not fix its topology; see the discussion at end of Box 27.2. Here the Schwarzschild "wormhole" connects two distant regions of a single, asymptotically flat universe. For a discussion of issues of causality associated with this choice of topology, see Fuller and Wheeler (1962).

Several known theorems on Black Holes

BH Uniqueness Theorem

Israel (1967), Robinson (1977), Carter (1971)

Any static solution of Einstein's vacuum equations satisfying conditions (1)-(3) is spherically symmetric and coincides with the **Schwarzschild metric**.

- (1) it is asymptotically flat,
- (2) it has an event horizon, and
- (3) it has no singularities on or outside the event horizon.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1)$$

Similarly, for stationary configuration, the **Kerr metric**.

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\Sigma}[dt - a \sin^2\theta d\phi]^2 + \frac{\sin^2\theta}{\Sigma}[(r^2 + a^2)d\phi - a dt]^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 \quad (2)$$

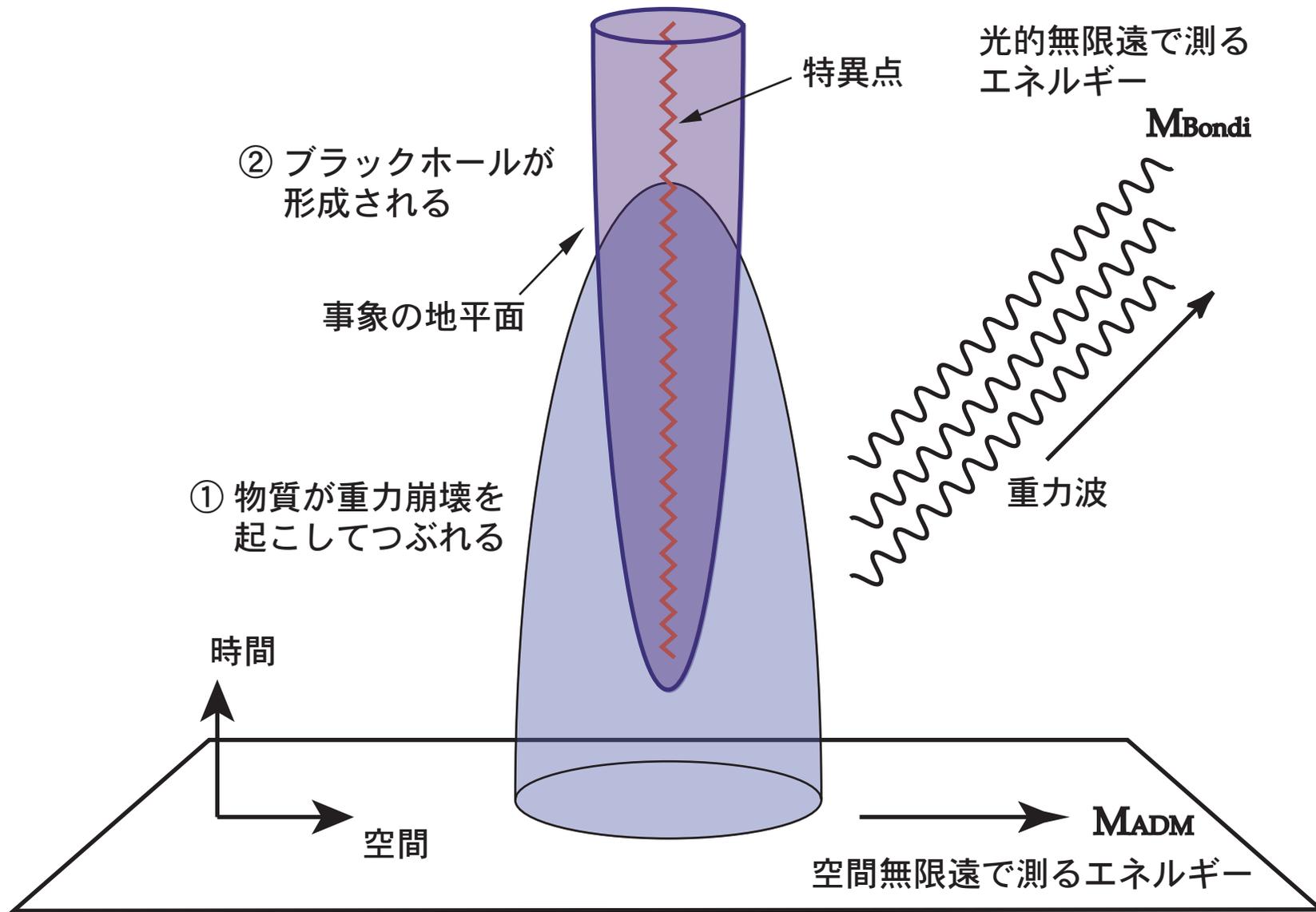
where

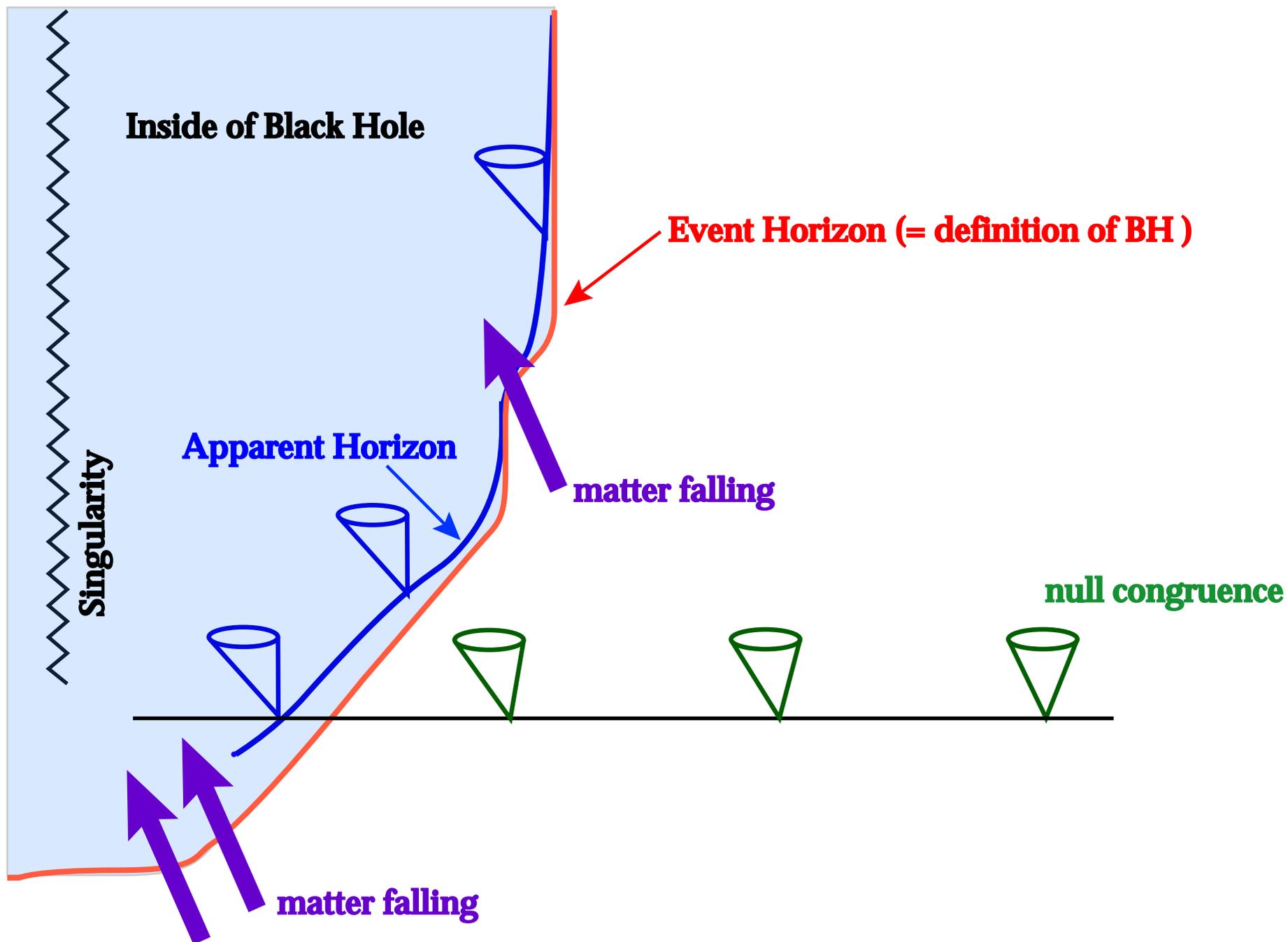
$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2(+q^2), \quad \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta,$$

BH No-hair Conjecture

Ruffini-Wheeler (1971)

Regardless of the specific details of the collapse or the structure and properties of the collapsing body, the resulting stationary black hole is described by a geometry specified by **the parameters M , J , and Q** .





Hawking radiation [Nature 248 (1974) 30]

“ブラックホール熱力学”

Law	Thermodynamics	Black Holes
0th	熱平衡状態では T 一定	定常BHでは、ホライズン上で κ 一定
1st	$dE = TdS + \text{work terms}$	$dM = (1/8\pi)\kappa dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dq$
2nd	$\delta S \geq 0$ in any process	$\delta A \geq 0$ in any process
3rd	物理的プロセスでは $T = 0$ 実現不可能 (Nernst theorem)	物理的プロセスでは $\kappa = 0$ 実現不可能 (censorship conjecture)

温度の正体???

曲がった時空での場の量子論 \Rightarrow BHが量子論的效果により、温度 T の Planck 分布で熱輻射

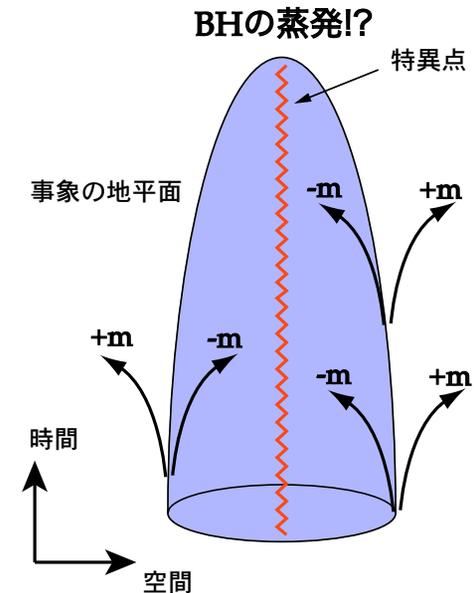
- Schwarzschild BH では、

$$T = \frac{1}{8\pi M} \left(= \frac{hc^3}{8\pi kGM} \right)$$

- Planck スケールに対応する温度

$$T \sim (\kappa/2\pi)(\hbar/2k) \sim 10^{-6}(M_\odot/M)\text{K}.$$

- BH の寿命は $10^{71}(M_\odot/M)^{-3}\text{s}$.
- 太陽質量のBHにとって、これは宇宙年齢よりも十分長い.
- 10^{15}g 以下のBHならば現在までに蒸発するはずで、最終段階での放射は 10^{30} erg のバーストが 0.1 s 続くだろう.



1. 重力物理の類似モデル

Unruhによる類似モデルの提案

ラバル管モデル

2. Bose-Einstein Condensate (BEC)

3. 重力物理の類似モデルとしてのBEC

black hole / white dwarf / supernova

Unruhによる類似モデルの提案 (1981)

W.G. Unruh, Phys. Rev. Lett. 46, 1351 (1981)

動機は、Hawking放射に対する疑問。Hawkingの仮定

- 量子場が重力場に全く影響を与えないこと
- 重力場が量子化されていないこと
- 量子場の波動方程式がすべてのスケールで成立すること

を検証する手段として、流体力学での類似モデルを提案。

<<結論>>

- 渦なし(irrotational)・粘性なし(inviscid)・barotropicな流体中の音波の方程式は、曲がった時空でのmasslessスカラー場の方程式と等価である。
- 量子化された音(phonon場)は、曲がった時空での量子場理論と等価である。

Unruhによる類似モデル

1. 流体の基礎方程式は，連続の式と Eulerの式. 外力 $\Phi = 0$ とする.

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \rho [\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = -\nabla p - \rho \nabla \Phi. \quad (2)$$

(2)は，次のように書き直す.

$$\partial_t \mathbf{v} = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) - \frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi - \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right). \quad (3)$$

• 渦なしを仮定することで， $\mathbf{v} = -\nabla \phi$ となる速度 potential ϕ を仮定できる.

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \rightarrow \mathbf{v} = -\nabla \phi \quad \text{負の符号はの便宜のため} \quad (4)$$

• barotropic な流体 (ρ が p のみの関数であること) を仮定することで specific enthalpy $h(p)$ も p のみの関数. $c_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ を音速として，

$$h(p) = \int_0^{p(\rho)} \frac{dp'}{\rho(p')} = \int^p \frac{c_s^2 d\rho}{\rho}; \quad \text{so that} \quad \nabla h = \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (5)$$

これらより，Eulerの式(2)は，Bernoulliの式となる.

$$-\partial_t \phi + h + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 = 0. \quad (6)$$

2. 次に , background の流れ (ρ_0, p_0, ϕ_0) と , その摂動 (ρ_1, p_1, ϕ_1) を考える .

$$\rho = \rho_0 + \epsilon \rho_1 + O(\epsilon^2), \quad p = p_0 + \epsilon p_1 + O(\epsilon^2), \quad \phi = \phi_0 + \epsilon \phi_1 + O(\epsilon^2). \quad (7)$$

• barotropic 条件は , 次のように書ける .

$$h(p) = h(p_0 + \epsilon p_1 + O(\epsilon^2)) = h_0 + \epsilon \frac{p_1}{\rho_0} + O(\epsilon^2). \quad (8)$$

• 0 次の方程式として , 連続の式(1)と Euler の式(6)はそれぞれ

$$\partial_t \rho_0 + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0, \quad (9)$$

$$-\partial_t \phi_0 + h_0 + \frac{1}{2}(\nabla \phi_0)^2 = 0. \quad (10)$$

• 1 次の方程式は ,

$$\partial_t \rho_1 + \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}_0 + \rho_0 \mathbf{v}_1) = 0 \quad (11)$$

$$-\partial_t \phi_1 + \frac{p_1}{\rho_0} - \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1 = 0. \quad \rightarrow \quad p_1 = \rho_0 (\partial_t \phi_1 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1). \quad (12)$$

• 最後の表現は , barotropic の仮定より , さらに次のようになる .

$$\rho_1 = \frac{\partial \rho}{\partial p} p_1 = \frac{\partial \rho}{\partial p} \rho_0 (\partial_t \phi_1 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1). \quad (13)$$

• (13) を (11) に代入すると , ϕ_1 に対する波の方程式になる .

$$-\partial_t \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \rho_0 (\partial_t \phi_1 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1) \right) + \nabla \cdot \left(\rho_0 \nabla \phi_1 - \frac{\partial \rho}{\partial p} \rho_0 \mathbf{v}_0 (\partial_t \phi_1 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1) \right) = 0. \quad (14)$$

3. (14)は , 曲がった時空の scalar 場の方程式と等価である .

- (14)をさらに変形 . 連続の式(9)を用いると , (14)は ,

$$-\rho_0 (\partial_t + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \frac{\rho_0}{c_s^2} (\partial_t + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \phi_1 + \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \phi_1) = 0 \quad (15)$$

- (15)は , metric

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{\alpha\rho_0}{c_s} \begin{bmatrix} -(c_s^2 - v_0^2) & \vdots & -v_0^j \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ -v_0^i & \vdots & \delta_{ij} \end{bmatrix}, \quad g^{\mu\nu} \equiv \frac{c_s}{\alpha\rho_0} \begin{bmatrix} -1/c_s^2 & \vdots & -v_0^j/c_s^2 \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ -v_0^i/c_s^2 & \vdots & (\delta^{ij} - \frac{v_0^i v_0^j}{c_s^2}) \end{bmatrix}, \quad \sqrt{-g} = \frac{\rho_0^2 \alpha^2}{c_s}$$

$$\begin{aligned} ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &= \frac{\alpha\rho_0}{c_s} \left[-(c_s^2 - v_0^2) dt^2 - 2v_0^j dt dx^j + dx^i dx^i \right] \\ &= \frac{\alpha\rho_0}{c_s} \left[-c_s^2 dt^2 + \delta_{ij} (dx^i - v_0^i dt) (dx^j - v_0^j dt) \right] \end{aligned}$$

の曲がった時空でのスカラー - 場 ϕ の波動方程式と等価である .

$$\square\phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi). \quad (16)$$

4. Black-hole時空との対応(16)が Schwarzschild時空と対応すること .

- 簡単のため , $c_s = \text{const.}$, $\alpha\rho_0/c_s = 1$ とする . また , 流速は $v_0^i = (v(x), 0, 0)$ とする . (16)の動径方向だけ記すと

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(c_s^2 - v(x)^2)dt^2 - 2v(x)dt dx \\ &= -(c_s^2 - v^2) \left(dt^2 - \frac{v}{c_s^2 - v^2} dx \right)^2 + \frac{c_s^2}{c_s^2 - v^2} dx^2 \end{aligned}$$

- 新しい時間座標 τ

$$d\tau \equiv dt - \frac{v}{c_s^2 - v^2} dx$$

を導入すると ,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{v(x)^2}{c_s^2}\right) c_s^2 d\tau^2 + \frac{dx^2}{1 - \frac{v(x)^2}{c_s^2}} \quad (17)$$

となり , Schwarzschild時空

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 d\Omega^2, \quad r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (18)$$

と対応する . Unruhは , この sonic BHを "dumb hole"とも呼んだ .

流速が $v(x) = \pm c_s \sqrt{\frac{r_g}{r}} = \pm c_s \sqrt{\frac{2GM}{rc^2}}$ という流れが実現できれば , ブラックホールに対応させることができる .

	ブラックホール (Schwarzschild BH)	流体版ブラックホール (sonic BH)
波のタイプ	光	音
典型的な速度	c	c_s
horizon	$r = r_g$	$v(x) = c_s$ (sonic point)
古典論的な記述	電磁場の振動	分子の集団的な運動
量子論的な記述	photon	phonon
速度	秒速 30 万 km	秒速 1500m (水中の場合)
波の進路を曲げる原因	時空の曲がり	流速や流れの方向の変化
記述が破綻するスケール	Planck 長 (10^{-35} m)	分子間距離 (水の場合で 10^{-15} m)

表 1: 流体現象とのアナロジー

- Unruh は , 以上の対応の後, Hawking 温度 $T = \hbar c^3 / 8\pi kGM$ に対応する値

$$T = \frac{\hbar}{2\pi k} \left. \frac{\partial v^r}{\partial r} \right|_{\text{horizon}}$$

を導出し, $\partial v^r / \partial r \sim c_s / R$ (R は , horizon 半径) と仮定して ,

$$T = 3 \times 10^{-7} \frac{c_s}{300\text{m/sec}} \frac{1\text{mm}}{R} \text{ K}$$

とした .

Unruhによる類似モデル 具体例としての Laval nozzle

- 管の軸に沿った座標を x とし、管の断面積 $A(x)$ が緩やかに変化する場合、流れは各断面で一様で、一次元流と見なせる。0次の流体方程式にて、定常流を考えると、

$$J = \rho v A = \text{const.} \quad \text{流量一定}$$
$$\frac{1}{2}v^2 + h(\rho) = \text{const.} \quad \text{Bernoulli方程式}$$

- 微分を取ると

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0, \quad v dv + c_s^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

これらより $d\rho/\rho$ を消去すると

$$\left(\frac{v^2}{c_s^2} - 1 \right) \frac{dv}{v} = \frac{dA}{A} \quad (19)$$

- マッハ数を $M = v/c_s$ とすると、Laval Nozzleでの流れは
 $M < 1, dA < 0 \implies dv > 0$ 亜音速では断面積が減少すると流れが加速
 $M > 1, dA > 0 \implies dv > 0$ 超音速では断面積が増加すると流れが加速

- さらに、(19)より、
断面積が最小になる throat ($dA = 0$) で、sonic point $M = 1$ になることがわかる。

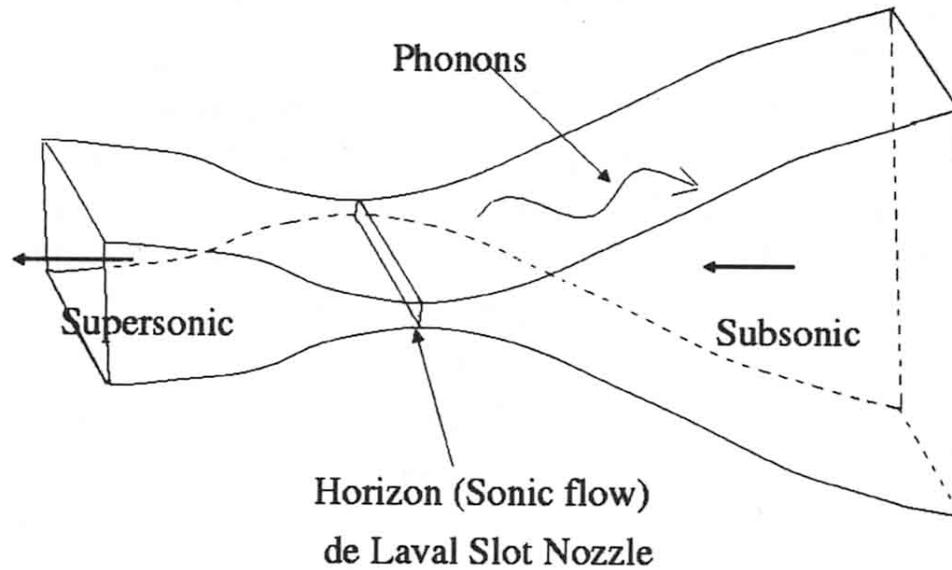
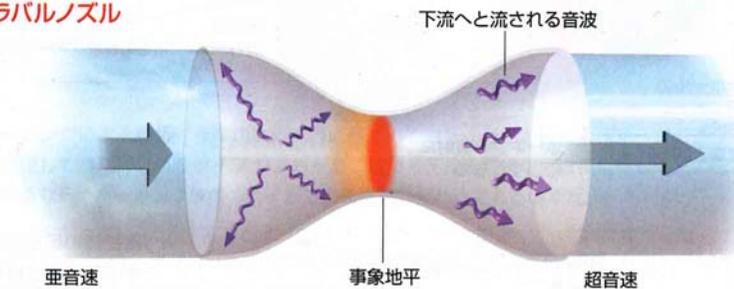


Figure 5.2: A sketch of a slot type de Laval nozzle. With a sufficiently high pressure on the subsonic side and low pressure on the supersonic side, the fluid will go into hypersonic flow with the sonic surface at the narrowest part of the nozzle.

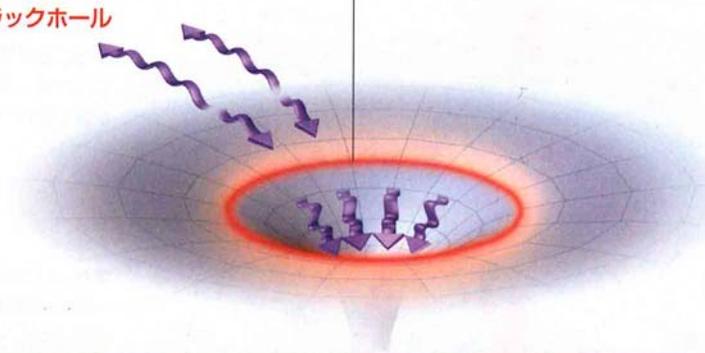
“音響版”のブラックホール

ロケットエンジンの端についている「ラバルノズル」はブラックホールの類似物と考えることができる。ノズルに入ってくる流体のスピードは亜音速(音速未満)だが、ノズルの途中が狭くなっているために加速され、超音速の流れとなって出ていく。亜音速領域では音波は流れの上流に向かって伝わることもできるが、超音速領域では下流にしか伝わらない。つまり、ノズルの「くびれ」がブラックホールの事象地平と同様の動きをし、音波は超音速領域に入っていくことはできても上流には戻ってこれなくなる。「くびれ」の部分で量子揺らぎが発生すると、ホーキング放射に相当する音が生まれる。

ラバルノズル



ブラックホール



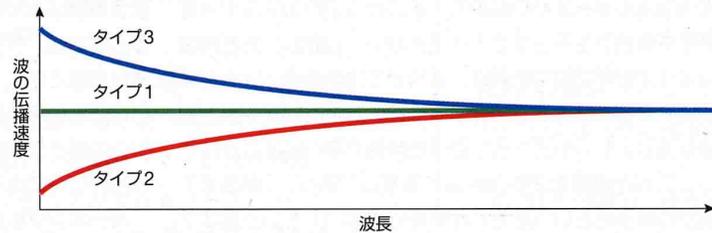
GEORGE RETSECK

日経サイエンス
2006年3月号

T.A. Jacobson
R. Parentani

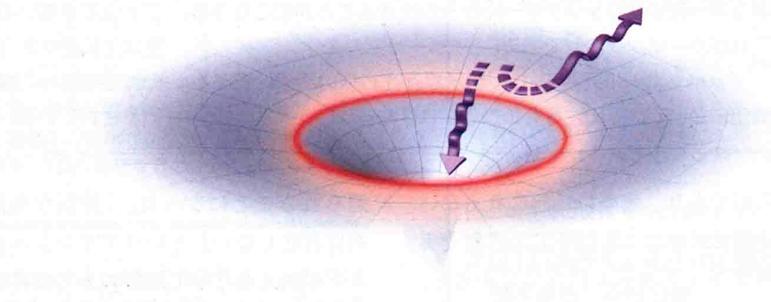
ホーキングは正しかったが、しかし…

流体モデルを考察することによって、ホーキングの結論をどう解釈すればよいかが示された。理想的な流体では、どんな波長の音波も伝播速度は同じだ（タイプ1）。しかし現実の流体では、波長が分子間距離に近づくにつれ、伝播速度は遅くなる（タイプ2）か速くなる（タイプ3）かのいずれかだ。

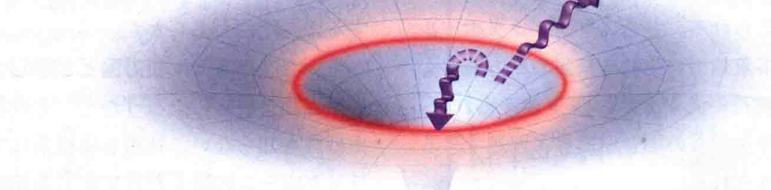


ホーキングによる解析は標準的な相対論に基づいており、光が波長によらず一定の速度で伝わりと想定していた（つまりタイプ1）。しかし、流体モデルと同様に、波長に応じて光の伝播速度が異なるなら、ホーキング放射の光子がたどる経路も変わってくるはずだ。

タイプ2の場合は、光子対は事象地平の外側で生まれ、ともに落ちていく。ただし一方の光子は速度が変化し、方向を反転して外へと飛び去る。



タイプ3の場合は、光子対は事象地平の内側で生まれる。一方の光子は加速されて通常の光速を超え、外へ出てくる。



いずれの場合も光子対は事象地平の真上で生じるわけではないので、無限の赤方偏移を起こすことはない。ただし、この解釈には代償が必要だ。相対論を修正しなくてはならない。アインシュタインの仮定とは反して、時空は流体のように振る舞わなくてはならず、“分子”に相当する未知の微細構造が存在することになる。

流体中の音速は、媒質により
分散関係を持つ。

photon=分散関係なし

phonon in 超流動He = type 2

phonon in BEC = type 3

基底状態でphononペアが生じれば、
Hawking放射のアナロジーが成立。

Hawking放射の「無限の赤方偏移」問題
は、photonに分散関係がないことが原因。

一般相対論に特別な座標系を導入したり、
時空の量子化を考えれば、無限赤方偏移
は、回避できる。

日経サイエンス
2006年3月号

T.A. Jacobson
R. Parentani

1. 重力物理の類似モデル
Unruhによる類似モデルの提案
ラバル管モデル
2. Bose-Einstein Condensate (BEC)
BEC実験の現状
BECを記述する方程式
3. 重力物理の類似モデルとしてのBEC
black hole / white dwarf / supernova

Bose 粒子, Fermi 粒子

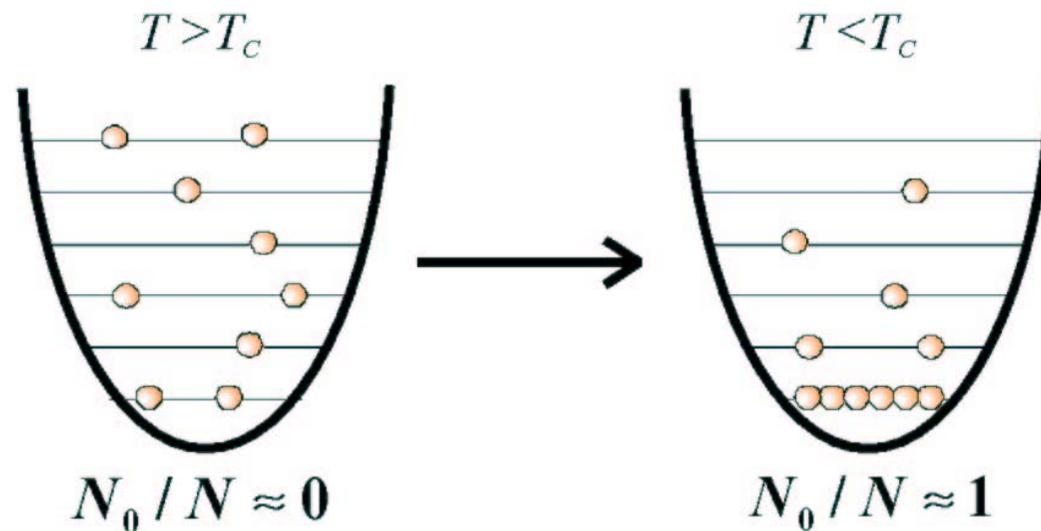
複合粒子	構成要素			低温での統計性
^1H	陽子 1	中性子 0	電子 1	Bose 粒子
^2D	陽子 1	中性子 1	電子 1	Fermi 粒子
^3He	陽子 2	中性子 1	電子 2	Fermi 粒子
^4He	陽子 2	中性子 2	電子 2	Bose 粒子
^6Li	陽子 3	中性子 3	電子 3	Fermi 粒子
^7Li	陽子 3	中性子 4	電子 3	Bose 粒子

表 1: 複合粒子の統計性. 電氣的に中性な複合粒子の場合, 低温での統計性は, 中性子の偶奇性で決まる.

	微視状態の数	分布関数	分配関数
Fermi-Dirac	$\prod_S \frac{g_S!}{(g_S - k_S)! k_S!}$	$\frac{k_S}{g_S} = \frac{1}{\exp(\alpha + \beta \epsilon_S) + 1}$	$Z_{\text{FD}} = \sum_k \frac{1}{\exp(\alpha + \beta \epsilon_S) + 1} e^{-\beta \sum_S \epsilon_S k_S}$
Bose-Einstein	$\prod_S \frac{(g_S + k_S)!}{(g_S - 1)! k_S!}$	$\frac{k_S}{g_S} = \frac{1}{\exp(\alpha + \beta \epsilon_S) - 1}$	$Z_{\text{BE}} = \sum_k \frac{1}{\exp(\alpha + \beta \epsilon_S) - 1} e^{-\beta \sum_S \epsilon_S k_S}$
Maxwell-Boltzmann	$\frac{N!}{k_1! k_2! \dots} \prod_S g_S^{k_S}$	$\frac{k_S}{g_S} = \frac{1}{\exp(\alpha + \beta \epsilon_S)}$	$Z_{\text{MB}} = \sum_k \frac{1}{k_1! k_2! \dots} \left(\prod_S g_S^{k_S} \right) e^{-\beta \sum_S \epsilon_S k_S}$

Bose-Einstein凝縮とは

Bose統計に従う粒子(Boson)の集団を，ある温度以下に冷却すると，最低エネルギー状態を占める粒子数が突然マクロな数になる現象



図は，
久我隆弘氏の
スライドより

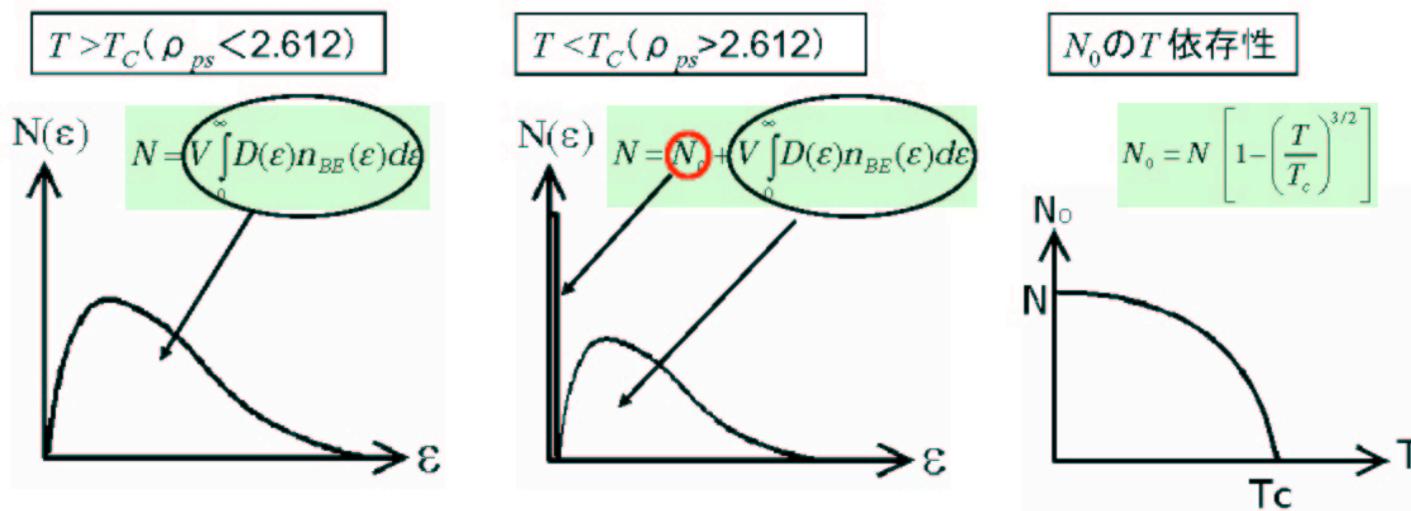
BECが発生する条件

$$T < T_{BE} = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \left(\frac{N}{2.612V} \right)^{2/3} \iff \rho \equiv n\lambda_{dB}^3 > 2.612, \quad \lambda_{dB} \equiv \frac{h}{\sqrt{2\pi mk_B T}}$$

BECと呼ばれるのは、最低エネルギーを取る粒子数が

$$N_0(T) = N \left(1 - \left(\frac{T}{T_{BE}} \right)^{3/2} \right), \quad T < T_{BE}$$

で与えられ、ほとんどの粒子が（運動量空間で）凝縮していることから。



図は
久我隆弘氏の
スライドより

導出は以下.

- グランドカノニカル集団での統計平均を用いることにより, Bose 粒子の分布関数は, 波数 k の量子状態を占める粒子数の期待値として,

$$n_k = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

- $n_k > 0$ 及び $\epsilon \geq 0$ より, 化学ポテンシャル $\mu \leq 0$.
- 全粒子数 N は, $\epsilon_k = \hbar^2 \mathbf{k}^2 / 2m = \mathbf{p}^2 / 2m = \epsilon_p$ として

$$N = \sum_k \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1} = \frac{gV}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1}$$

- 粒子数密度 N/V を一定にしつつ温度を下げてゆくとき, 右辺が最大となるのは, BEC では $\mu \leq 0$ であることから, $\mu = 0$ を代入し,

$$\begin{aligned} \frac{N}{V} &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{e^{\hbar^2 k^2 / (2mk_B T)} - 1} = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{(2mk_B T)^{3/2}}{\hbar^3} \int_0^\infty dx \frac{4\pi x^2}{e^{x^2} - 1} \\ &= \frac{4\pi g}{(2\pi)^3} \frac{(2mk_B T)^{3/2}}{\hbar^3} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 2.612 = \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} g \cdot 2.612 \end{aligned}$$

これを T について解くと, 得られる.

原子気体BECの直感的理解

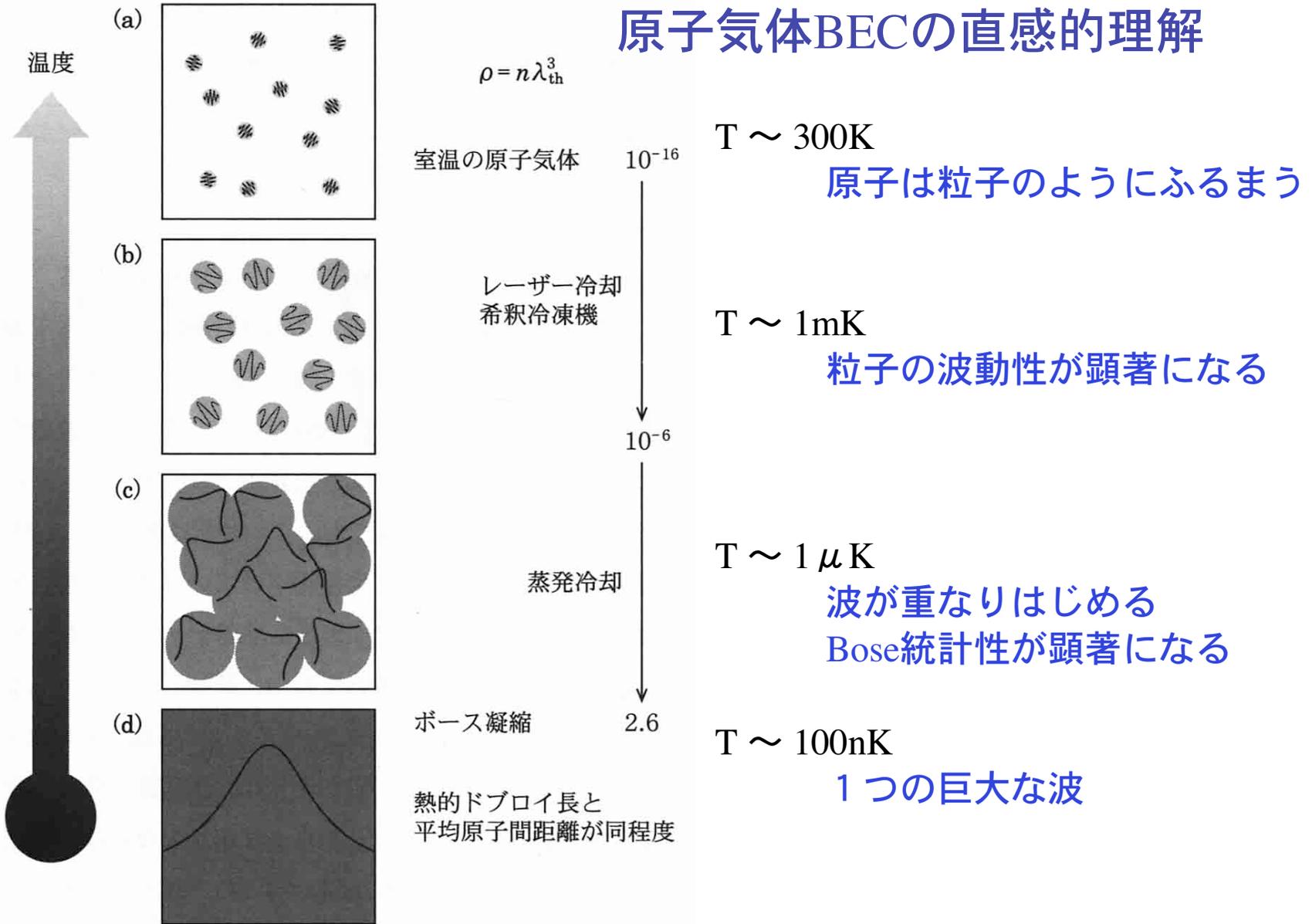


図 2.4 原子気体 BEC の直感的理解.

久我隆弘, 理想気体のボーズアインシュタイン凝縮,
 in 「アインシュタインと21世紀の物理学」
 (日本評論社, 2005)

ボース・アインシュタイン凝縮の歴史

- 1911 水銀で超伝導 (Onnes) $\sim 4.2\text{K}$
 - 1923 物質波の概念 (de Broglie)
 - 1924** **ボース統計、ボース凝縮の理論 (Bose, Einstein)**
 - 1925 行列力学 (Heisenberg)
 - 1926 波動力学 (Schrödinger)
 - 1927 液体ヘリウムの λ 転移 $\sim 2.17\text{K}$
 - 1933 マイスナー効果 (Meissner)
 - 1937 液体ヘリウムの超流動 (Kapitza)
 - 1938** **ボース凝縮による超流動の説明 (London) — 転移温度の理論値: 3.13K**

 - 1957 BCS理論による超伝導の説明 (Bardeen, Cooper, Schrieffer,)
 - 1960 レーザーの発明 (Maiman)

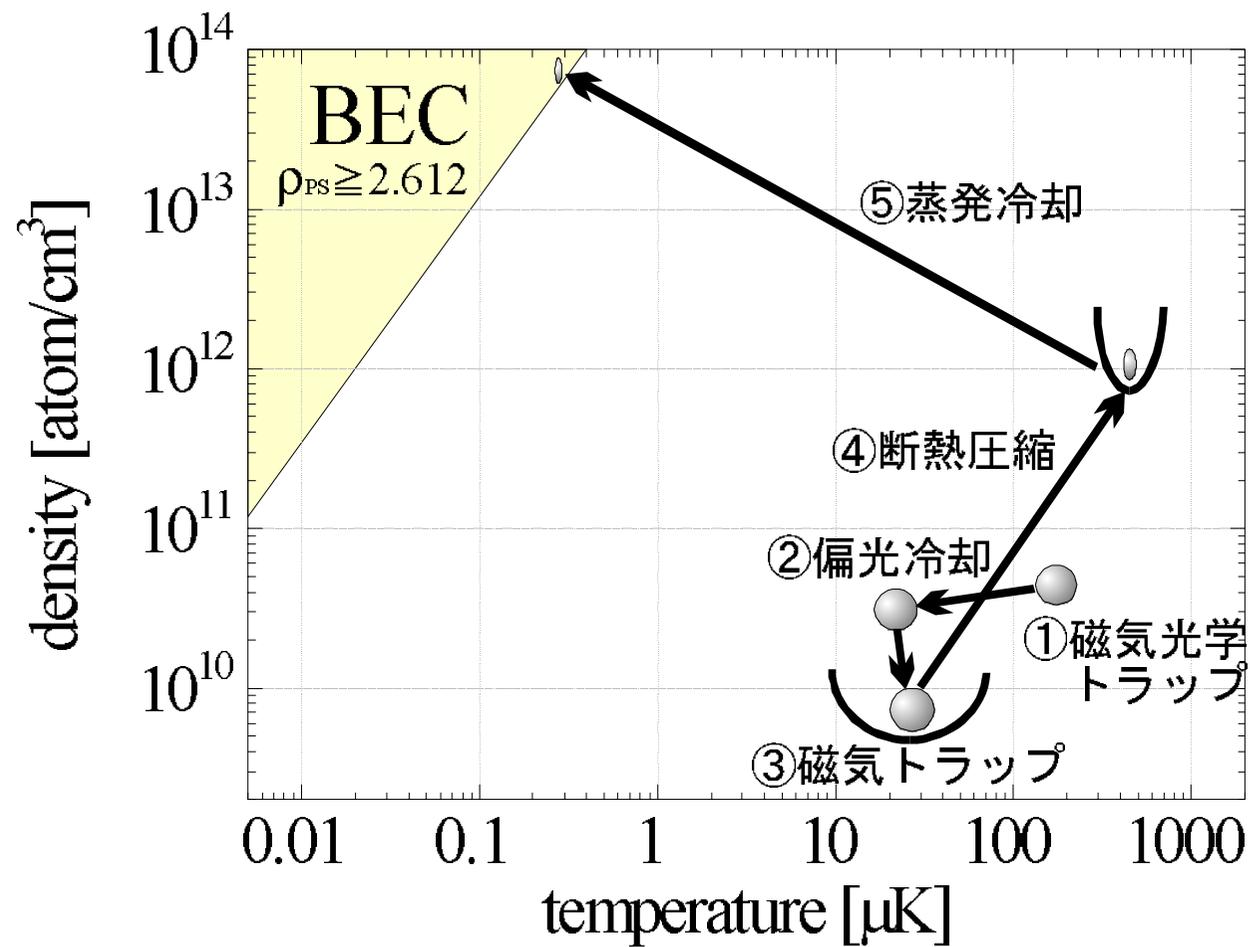
 - 1975 レーザー冷却のアイデア (Hänsch, Shallow)

 - 1980 \sim レーザーによる原子線の減速 (Phillips他) $\sim \text{mK}$
 - 1985 レーザーによる3次元冷却 (Chu) $\sim 240\ \mu\text{K}$
 - 1988 偏向冷却 (Phillips, Cohen-Tannoudji) $\sim 3\ \mu\text{K}$

 - 1995** **蒸発冷却、ボース凝縮実現 (Cornel, Wieman, Ketterle) $\sim 100\text{nk}$**
- 1997年ノーベル物理学賞
- 2001年ノーベル物理学賞

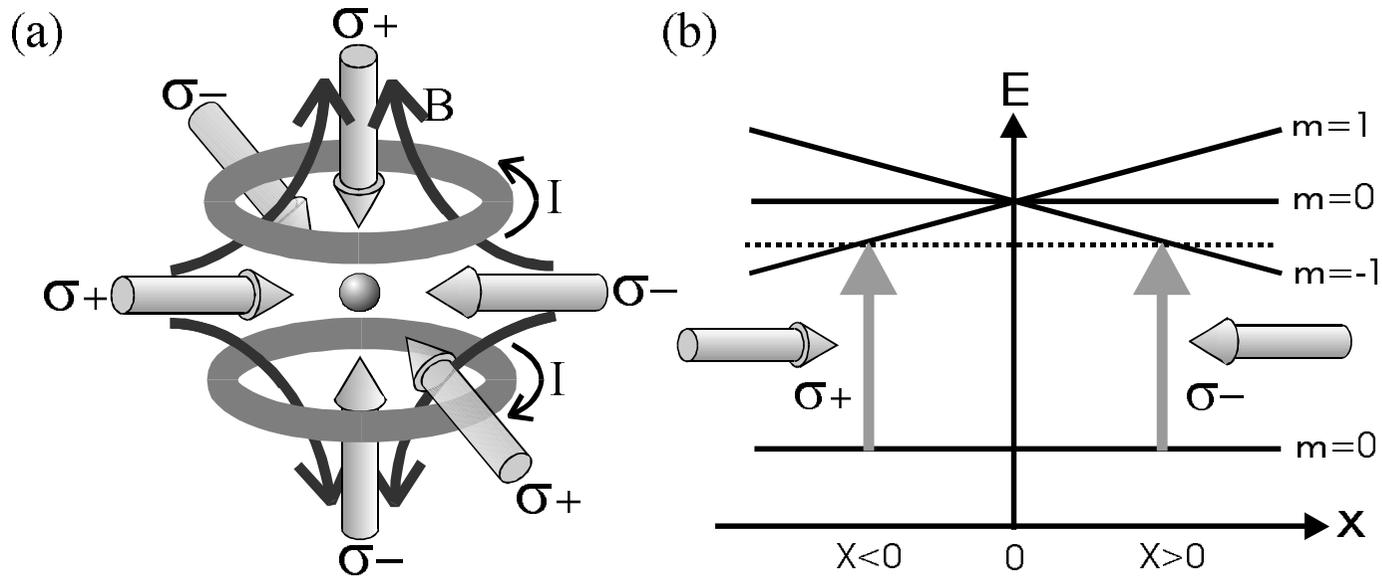
久我隆弘氏の
スライドより

BECへの道のり



久我隆弘氏の
スライドより

磁気光学トラップの原理



久我隆弘氏の
スライドより

レーザー冷却の原理

光のドップラー効果と原子の光吸収の共鳴を利用

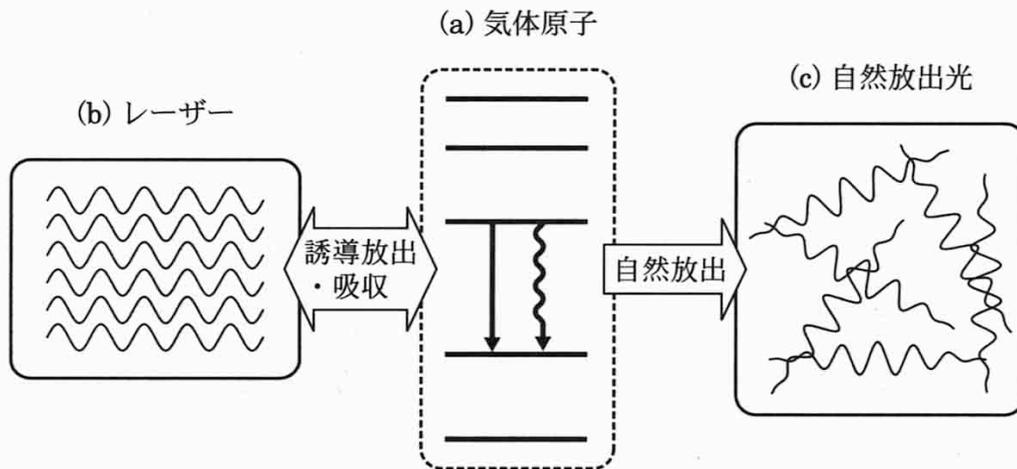


図 2.5 レーザーと原子の相互作用.

レーザー光と反対方向に進む原子は、同方向に進む原子より光吸収しやすい。(ドップラー効果により、原子の共鳴周波数に近づくため)

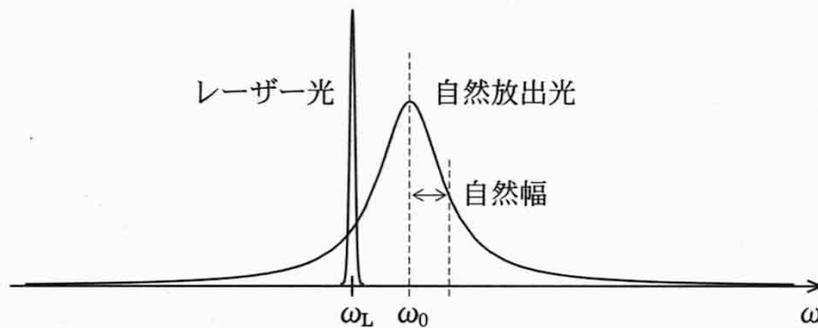


図 2.6 レーザー光の吸収と自然放出.

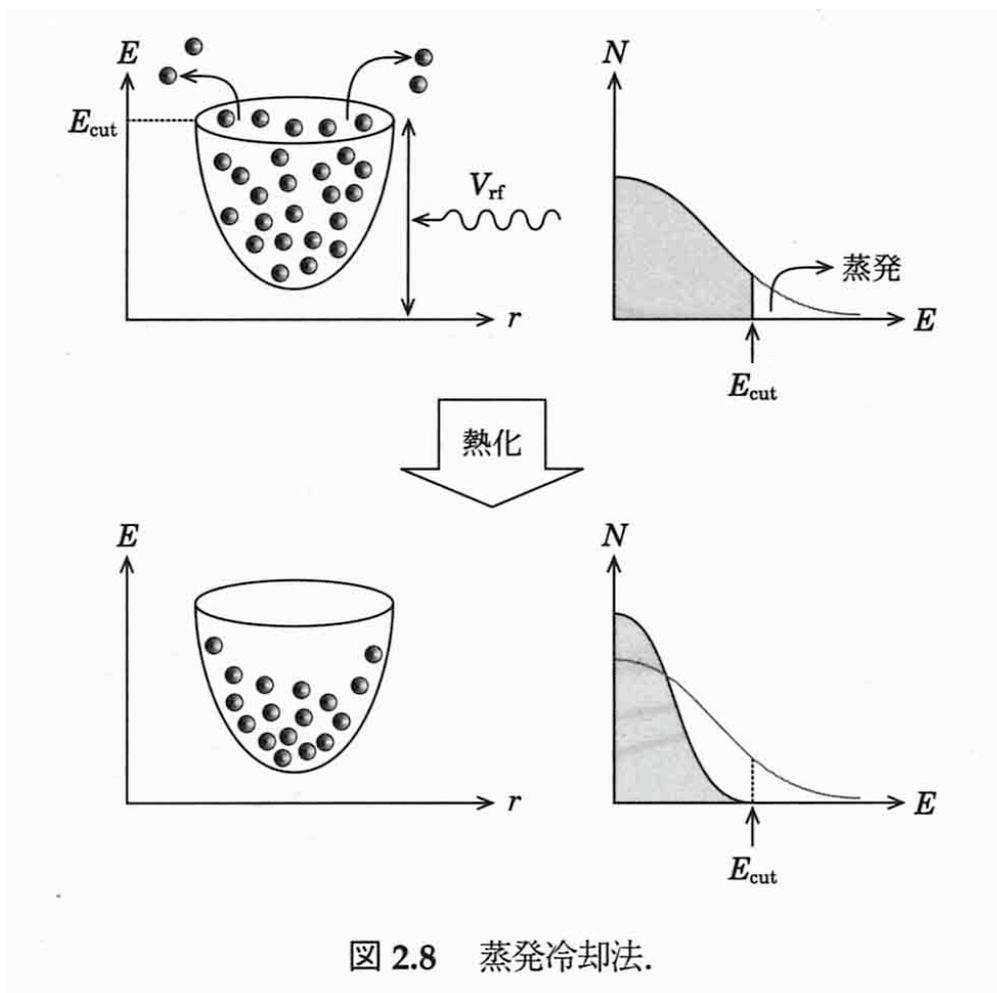
光を吸収すれば、その反跳により原子は減速。同時に6方向から光を当てて、全体を減速。

限界は、原子のランダムな自然放射光。温度で、数百 μK 程度。

実際には、偏光勾配冷却で、数十 μK まで

蒸発冷却の原理

速度の速い原子を磁気トラップから追い出す



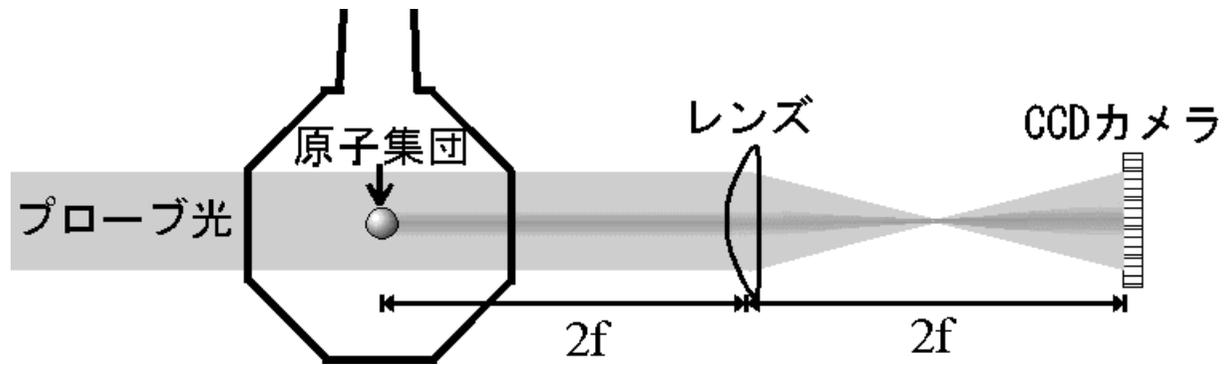
数 μK ~ 数十 nK へ冷却
BEC転移温度へ到達

原子数は2桁程減る.

図 2.8 蒸発冷却法.

久我隆弘, 理想気体のボーズアインシュタイン凝縮,
in 「アインシュタインと21世紀の物理学」 (日本評論社, 2005)

BEC相転移の確認 (吸収イメージング法)



久我隆弘氏の
スライドより

BECの実現

Anderson, Ensher, Matthews, Wieman, Cornell, Science 269 (1995) 198

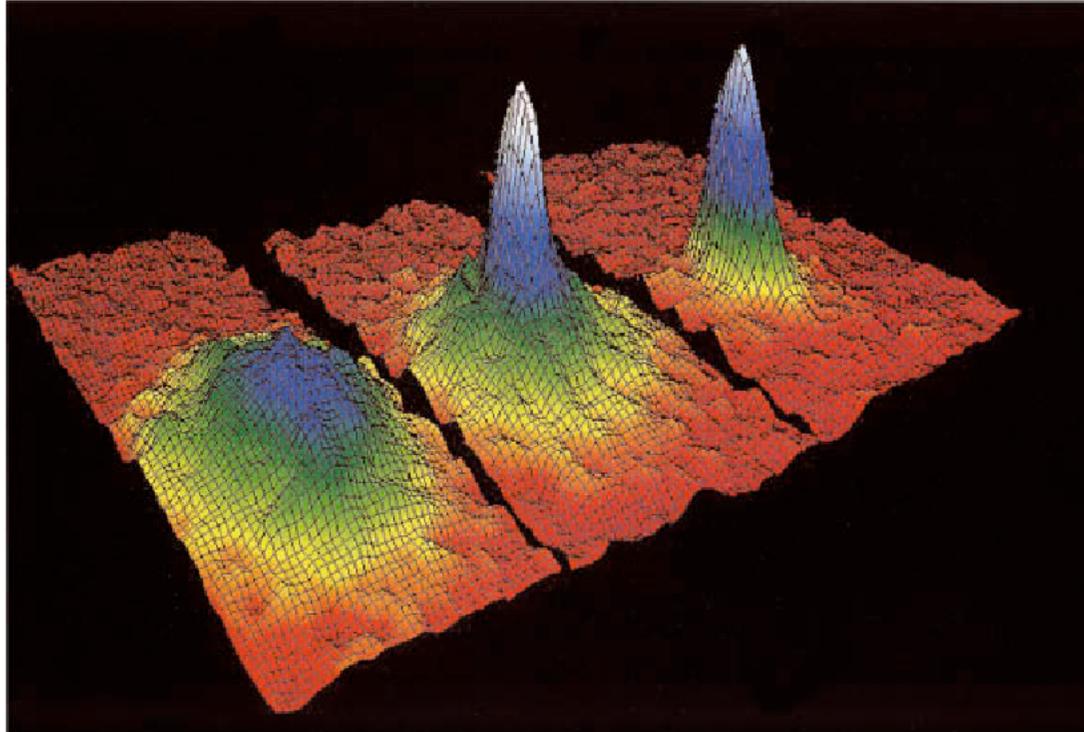


FIG. 1. (Color) Images of the velocity distribution of rubidium atoms in the experiment by Anderson *et al.* (1995), taken by means of the expansion method. The left frame corresponds to a gas at a temperature just above condensation; the center frame, just after the appearance of the condensate; the right frame, after further evaporation leaves a sample of nearly pure condensate. The field of view is $200\ \mu\text{m} \times 270\ \mu\text{m}$, and corresponds to the distance the atoms have moved in about $1/20$ s. The color corresponds to the number of atoms at each velocity, with red being the fewest and white being the most. From Cornell (1996).

BECを特徴付ける量「S波散乱長」 a

- 低密度多体系の量子状態は，2体散乱の前後での波動関数の漸近的振る舞い（位相のずれ）で特徴づけられる．
- 超低温の場合，低エネルギー散乱が支配的になり，2体散乱の相互作用の強さは，S波散乱長 a によって特徴づけられる． $|a|$ は相互作用の実質的な到達距離で，

$a > 0$	斥力	位相シフト負（磁場なしのとき） ^{87}Rb ($a=5.8\text{nm}$), ^{23}Na (2.8nm), ^1H (0.065nm)
$a < 0$	引力	位相シフト正（磁場なしのとき） ^7Li (-1.5nm), ^{85}Rb (-20nm)

- 平均原子間距離は，相互作用の到達距離に比べて十分大きいので，デルタ関数型のポテンシャルで置き換えることができる．

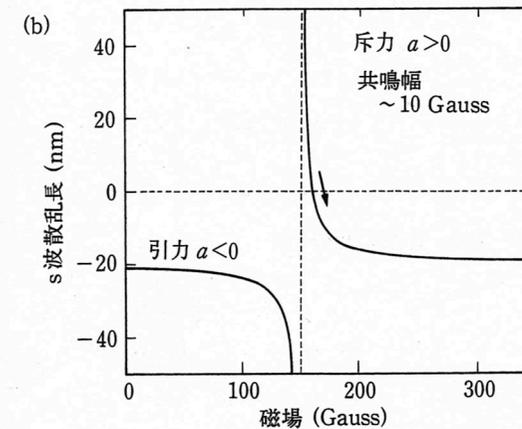
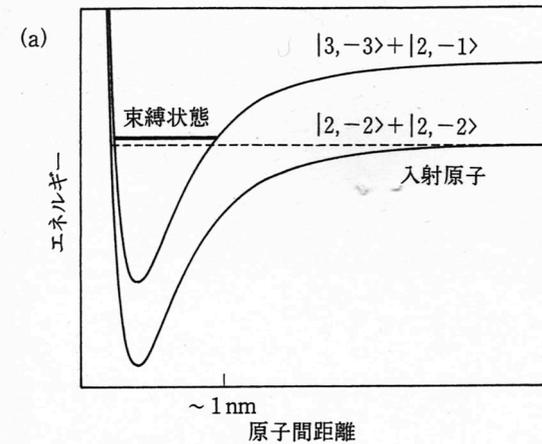
$$V(r) = g\delta(r). \quad g \text{ は S波散乱の場合に } , g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$$

「BECのすごいところ
 =状態を制御できる！
 =理論と実験の一致！」

Feshbach共鳴で，原子間相互作用の強さと
 符号を制御

(=共鳴散乱の一種，原子同士が衝突
 した際に，一時的に束縛状態をつくる)

$$U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$$



第3図

^{85}Rb の Feshbach 共鳴.

- (a) それぞれの超微細状態における原子間相互作用のポテンシャル. $|F, m\rangle$ は超微細状態を表わす. 入射エネルギー(破線)と束縛状態のエネルギー(太線)が縮退すると Feshbach 共鳴が起こる.
- (b) 印加磁場に対する s 波散乱長の変化. Feshbach 共鳴(約150 Gauss)近傍で s 波散乱長が大きく変わる. 矢印は JILA の実験での磁場変化の方向を表わす.

BECの基礎方程式: Gross-Pitaevskii 方程式

- Bogoliubov(1947)による平均場近似. $\hat{\Psi}(\mathbf{x})$ を Bose 粒子の場の演算子とする.

$$\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\Phi(\mathbf{x}, t)}_{\text{平均場}} + \underbrace{\hat{\Psi}'(\mathbf{x}, t)}_{\text{ゆらぎ}}$$

- $\Phi(\mathbf{x}, t)$ は, 場の演算子の期待値であり, 「凝縮体の波動関数」とも呼ばれ, 古典的な場として扱い得る.

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \underbrace{\langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\Psi}(\mathbf{y}) \rangle}_{\text{統計平均}} &= \underbrace{N_0 \Phi(\mathbf{x}) \Phi^*(\mathbf{y})}_{\text{巨視的な波動関数}} + \underbrace{g(\mathbf{x} - \mathbf{y})}_{\text{短距離相関}}, \quad \Phi = \sqrt{\frac{N_0}{V}} \underbrace{e^{i\varphi}}_{\text{位相}} \\ &= \frac{N_0}{V} + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \langle \hat{n}_k \rangle e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \end{aligned}$$

- 第1項は, Bose 粒子特有. 系が非対角的 ($\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$) な長距離相関を持つ. 「非対角長距離秩序 (ODLRO; off-diagonal long-range order)」

- 第2量子化の手順に従い，多体問題の Hamiltonian を次のように記す．

$$\widehat{H} = \int d\mathbf{x} \widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \underbrace{V_{\text{ext}}(\mathbf{x})}_{\text{外場}} \right] \widehat{\Psi}(\mathbf{x}, t) \\ + \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}', t) \underbrace{V(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}_{\text{2体相互作用}} \widehat{\Psi}(\mathbf{x}', t) \widehat{\Psi}(\mathbf{x}, t).$$

- Heisenberg 描像の運動方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \widehat{\Psi}(\mathbf{x}, t) = [\widehat{\Psi}, \widehat{H}] \\ = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{x}) + \int d\mathbf{x}' \widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}', t) V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \widehat{\Psi}(\mathbf{x}', t) \right) \widehat{\Psi}(\mathbf{x}, t)$$

- 演算子 $\widehat{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ を，古典的平均場 $\Phi(\mathbf{x}, t)$ に置き換える．
- 平均原子間距離は，相互作用の到達距離に比べて十分大きいので，デルタ関数型

$$V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = g\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \text{S波散乱の場合} \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$$

Gross-Pitaevskii 方程式 (1961,1963) { 非線形 Schrödinger 方程式 }

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{x}) + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 \right) \Phi(\mathbf{x}, t)$$

Gross-Pitaevskii 方程式の Hamilton-Jacobi 化

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{x}) + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 \right) \Phi(\mathbf{x}, t)$$

• 関数形を modulus と phase に分離 $\Phi = \sqrt{n(\mathbf{x}, t)} e^{iS(\mathbf{x}, t)}$

• 速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ を定義

$$n(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{2im} (\Phi^* \nabla \Phi - \Phi \nabla \Phi^*) \Rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla S(\mathbf{x}, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \nabla \cdot (\mathbf{v}n) = 0 \tag{1}$$

$$m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \nabla \left(V_{\text{ext}} + gn - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n}} \nabla^2 \sqrt{n} + \frac{mv^2}{2} \right) = 0. \tag{2}$$

(1) は連続の式, (2) は運動方程式.

原子間斥力が十分大きいとき, kinetic pressure を無視すれば, (2) は状態方程式 $P = (1/2)gn^2$ とした流体方程式の potential flow の式.

1. 重力物理の類似モデル
Unruhによる類似モデルの提案
ラバル管モデル
2. Bose-Einstein Condensate (BEC)
BEC実験の現状
BECを記述する方程式
3. 重力物理の類似モデルとしてのBEC
black hole Ring/Cigar
supernova “Bosenova”
white dwarf

“Table-top astrophysics” (?)

重力物理	BEC	(実験)	(理論)
Black Hole	“slow light” 光速を止める	Hau ら (1999/2001) Walsworth ら (2001)	Leonhardt ら (2000) まだ実現せず
Black Hole	“sonic horizon”		Garay ら (2000/2001) まだ実現せず
Supernova	“成長と崩壊”	Hulet ら (2000)	Hulet ら (1998)
Supernova	“bosonova”	Wieman ら (2000/2001)	上田 ら (2001/2002)
White Dwarf	${}^6\text{Li}$ in ${}^7\text{Li}$ Boson+Fermion 混合	Hulet ら (2001)	

BECを用いたブラックホール/ホワイトホール生成の提案【Ring】

Garay, Angli, Cirac, Zoller, PRL85(2000)4643; PRA 63 (2001) 023611

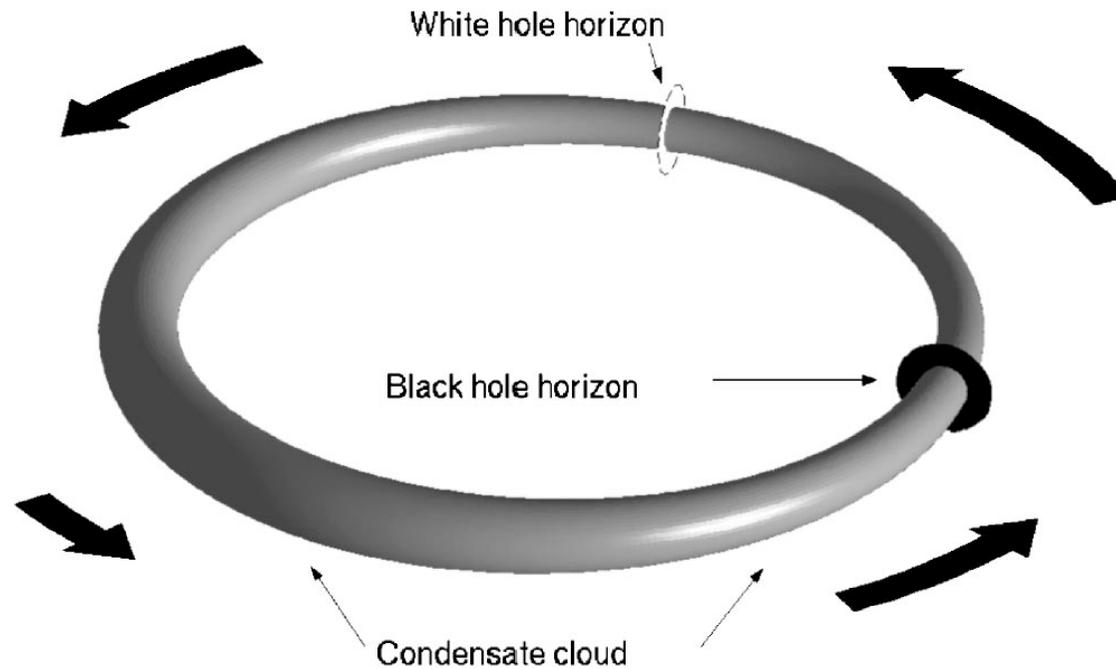


FIG. 1. The tight ring-shaped configuration, with both black and white horizons, and no singularity. Arrows indicate condensate flow velocity, with longer arrows for faster flow.

Ring形状BECで，ブラックホール・ホワイトホールを作る提案

Garay, Anglin, Cirac, Zollar, PRL 85 (2000) 4643; PRA 63 (2001) 023611.

- Ringの半径を R とする．波動関数 Ψ の (θ, τ) 成分のみを考える．

$$\Psi = f(z, r)\Phi(\theta, \tau), \quad \tau = (\hbar/mR^2)t, \quad \text{規格化} \int_0^{2\pi} d\theta |\Phi(\theta)|^2 = N \quad (1)$$

- GP方程式は，

$$i\partial_\tau \Phi = \left(-\frac{1}{2}\partial_\theta^2 + \mathcal{V}_{\text{ext.}} + \frac{\mathcal{U}}{N}|\Phi|^2 \right) \Phi, \quad \mathcal{U} \equiv 4\pi aNR^2 \int dzdr r|f(z, r)|^4 \quad (2)$$

- 定常解は，

$$\Phi_s(\theta, \tau) = \sqrt{\rho(\theta)} e^{i \int d\theta v(\theta)}, \quad \text{ただし } w = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta v(\theta) = \text{整数} \quad (3)$$

local dimensionless angular speed of sound は $c(\theta) = \sqrt{\mathcal{U}\rho(\theta)/N}$.

- 密度の関数形を仮定．

$$\rho(\theta) = \frac{N}{2\pi} (1 + b \cos \theta), \quad b \in [0, 1] \quad (4)$$

- 連続の式 $\partial_\theta(\rho v) = 0$ より $v(\theta) = \frac{\mathcal{U}w\sqrt{1-b^2}}{2\pi c(\theta)^2}$. 自由なパラメータは， \mathcal{U}, b, w .

Ring形状BECで、ブラックホール・ホワイトホールを作る提案：安定性？

安定性が示せないで、実験可能かどうか予測できない。

- 波動関数を $\Phi = \Phi_s + \varphi e^{i \int d\theta v(\theta)}$ と書き、摂動部分 φ をモード分解する。

$$\varphi(\theta, \tau) = \sum_{\omega, n} e^{-i\omega\tau} e^{in\theta} A_{\omega, n} u_{\omega, n}(\theta) + e^{i\omega^*\tau} e^{-in\theta} A_{\omega, n}^* v_{\omega, n}^*(\theta), \quad (5)$$

- GP 方程式に代入すると、モード $u_{\omega, n}, v_{\omega, n}$ に関して、次の式になる。

$$\omega \begin{pmatrix} u_{\omega, n} \\ v_{\omega, n} \end{pmatrix} = \sum_p \begin{pmatrix} h_{np}^+ & f_{np} \\ -f_{np} & h_{np}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\omega, p} \\ v_{\omega, p} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

$$f_{np} = \frac{U}{2\pi} \left(\delta_{n,p} + \frac{b}{2} \delta_{n,p+1} + \frac{b}{2} \delta_{n,p-1} \right), \quad \alpha_i = \sum_{j \geq |i|, i+j \text{ even}} \left(\frac{-b}{2} \right)^j \binom{j}{(i+j)/2}$$

$$h_{np}^\pm = \frac{1}{2}(n+p)w\sqrt{1-b^2}\alpha_{n-p} \pm \left(f_{np} + \frac{4n^2-1}{8}\delta_{n,p} + \frac{1-b^2}{8}\beta_{n-p} \right), \quad \beta_i = \sum_{j \geq |i|, i+j \text{ even}} \left(\frac{-b}{2} \right)^j \binom{j}{(i+j)/2} (j+1).$$

- 十分大きな cutoff Q , $2(Q+1) \times 2(Q+1)$ 行列の固有値解析。
- 実で負の固有値が常に存在し、BH/WHは、エネルギー的に不安定。
しかし、低温の希薄な凝縮体では、dissipationのタイムスケールが非常に長いので、そのようなエネルギー的な不安定性は問題にならない。
- b が大きいと、固有値が複素数になり、ダイナミカルな不安定性が生じる。

BECを用いたブラックホール/ホワイトホール生成の提案【Ring】

Garay, Angli, Cirac, Zoller, PRL85(2000)4643; PRA 63 (2001) 023611

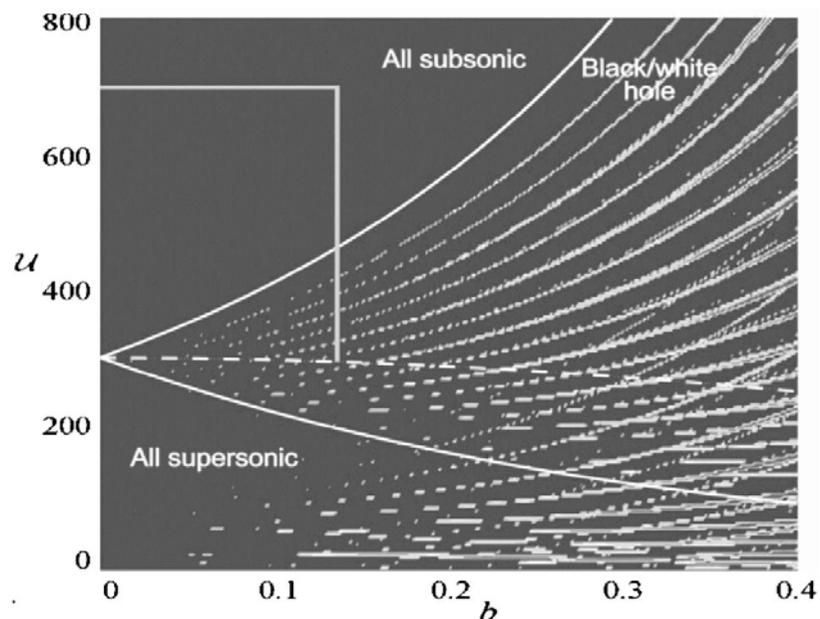


FIG. 3. Stability diagram for winding number $w = 7$. Solid dark-gray areas represent the regions of stability. Smaller plots at higher resolution confirm that the unstable “fingers” are actually smooth and unbroken. Points on the dashed curve are states with horizons at $\theta_h = \pm \pi/2$, so that the black/white hole fills half the ring.

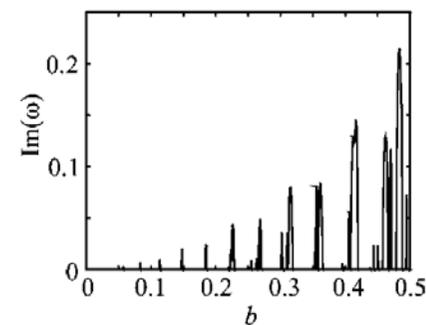


FIG. 4. Stability diagram for black/white holes of maximum size, i.e., along the dashed line of Fig. 3.

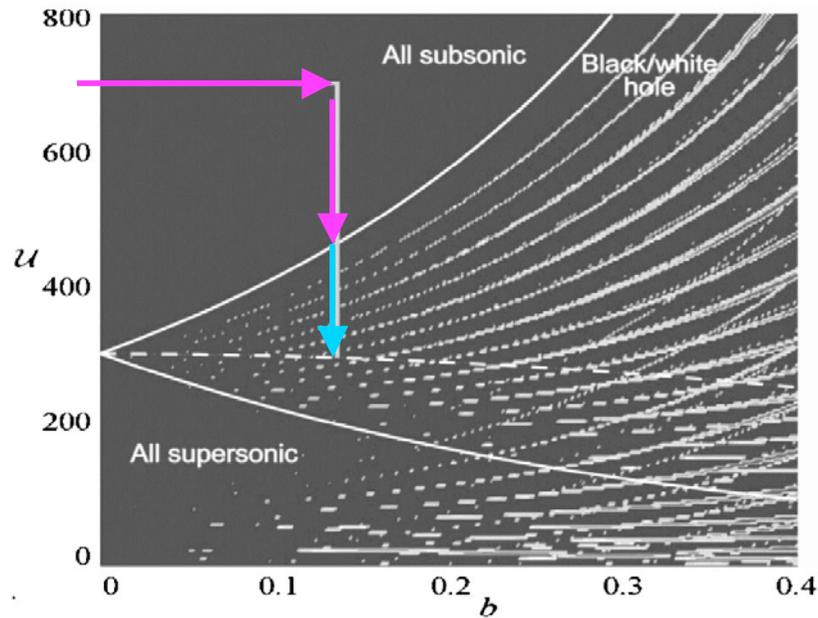
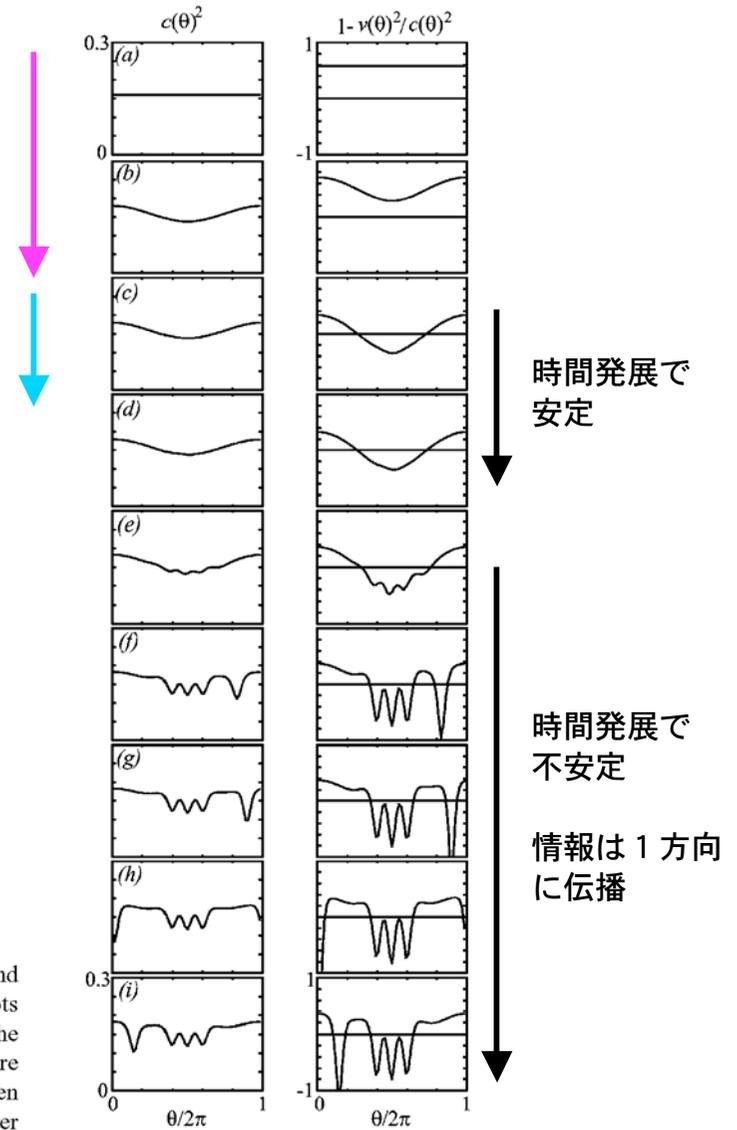


FIG. 3. Stability diagram for winding number $w = 7$. Solid dark-gray areas represent the regions of stability. Smaller plots at higher resolution confirm that the unstable “fingers” are actually smooth and unbroken. Points on the dashed curve are states with horizons at $\theta_h = \pm \pi/2$, so that the black/white hole fills half the ring.

FIG. 5. Simulation of creation of a stable black/white hole, and subsequent evolution into an unstable region. (a)–(d) are snapshots taken at the initial time (a); at an intermediate time, still within the subsonic region (b); when black/white holes of maximum size are approached (c); and after a long time in that configuration (d). Then the parameters are changed along the dashed curve of Fig. 3 to enter an unstable region (e) and kept there (f)–(i). It can be observed that a perturbation grows at the black-hole horizon, and travels rightward until it enters the white-hole horizon.



BECを用いたブラックホール生成の提案【Ciger】

Garay, Angli, Cirac, Zoller, PRA 63 (2001) 023611

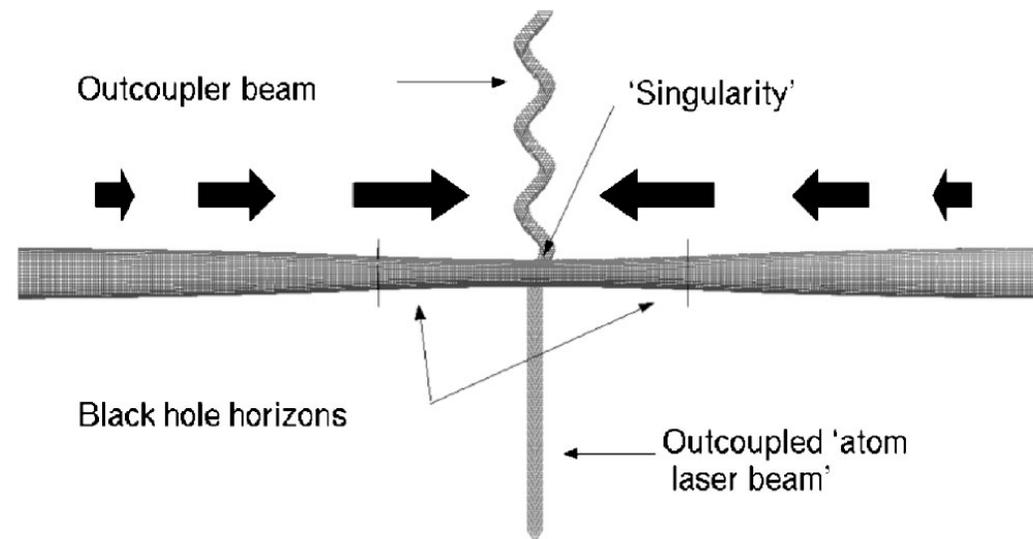
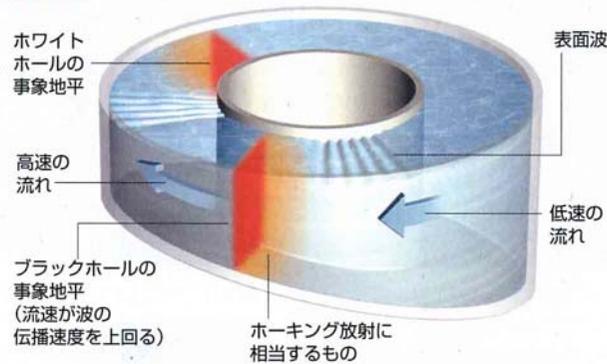


FIG. 2. The tight cigar-shaped configuration, with two black-hole horizons and a “singularity” where the condensate is outcoupled. Arrows indicate the condensate flow velocity, with longer arrows for faster flow.

これもブラックホール!? ——さまざまなモデル

ラバルノズルのほかにも、ブラックホールの事象地平と基本的に同じ特性を示すモデルがいくつか提案されている。い

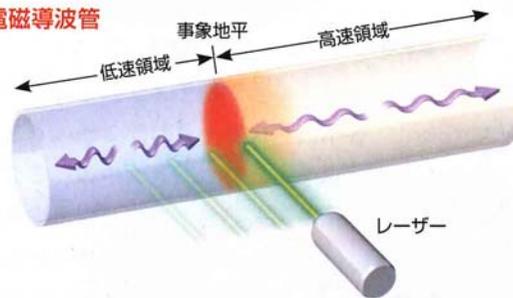
表面波



ずれも波が一方向にだけ伝わるような系であり、ホーキング放射に似た現象を引き起こす。

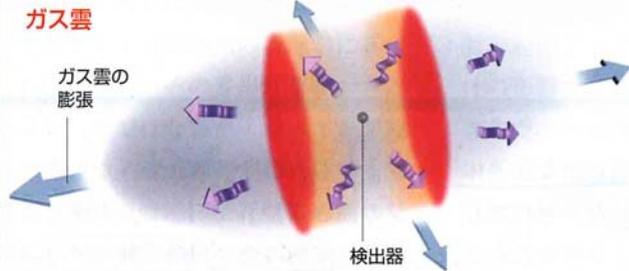
環状に閉じた水路を循環して流れる流体について、流体内部を伝わる音波ではなく、表面波を考える。流れに乗って移動してみよう。水路が浅くなっているところでは流速が上がり、ある段階で表面波の伝播速度よりも速くなるため、表面波は流れの上流へは戻れなくなる。ブラックホールの事象地平に似たものができるわけだ。さらに流れに乗って進むと流速が下がり「ホワイトホール」に相当する事象地平が現れる（ホワイトホールはブラックホールとは逆に、物質を吐き出すだけの天体）。ホーキング放射に相当する現象を観察するには、ヘリウム4など極低温の流体を使って実験する必要があるだろう。

電磁導波管



電磁波の伝播速度をレーザーによって微調整できるような導波管を作り、そのなかを伝わるマイクロ波を観察する。導波管の軸方向にレーザーを走査することにより、導波管を低速領域と高速領域に分ける境界（事象地平に相当）を自由に動かすことができる。低速領域の電磁波は高速領域に達することができないが、高速領域の電磁波は境界を越えて低速領域に入っていける。流体に基づく類似物に比べるとホーキング放射に相当する現象が強く生じ、観察しやすいだろう。

ガス雲



葉巻タバコのような細長いガス雲が長軸方向に膨張していく様子によって、一定の加速度で膨張する1次元的な宇宙を模擬できる。そのような宇宙はブラックホールを“裏返し”にしたようなものとして振る舞い、事象地平の外側にある波はさらに外側へと素早く押しやられて、内部には入ってこられない。ホーキング放射に似た放射が、外側ではなく内側に向かって放たれる。実験では、ガス雲としてボース・アインシュタイン凝縮体を使うことになるだろう。極低温のボース・アインシュタイン凝縮体は量子論的な特性を備えているため、ホーキング放射と似た現象が起こる。

BEC中でのBosonとFermionの冷却比較

Science 291 (2001) 2570

Observation of Fermi Pressure in a Gas of Trapped Atoms

Andrew G. Truscott, Kevin E. Strecker, William I. McAlexander,*
Guthrie B. Partridge, Randall G. Hulet†

We report the attainment of simultaneous quantum degeneracy in a mixed gas of bosons (lithium-7) and fermions (lithium-6). The Fermi gas has been cooled to a temperature of 0.25 times the Fermi temperature by thermal collisions with the evaporatively cooled bosons. At this temperature, the spatial size of the gas is strongly affected by the Fermi pressure resulting from the Pauli exclusion principle and gives clear experimental evidence for quantum degeneracy.

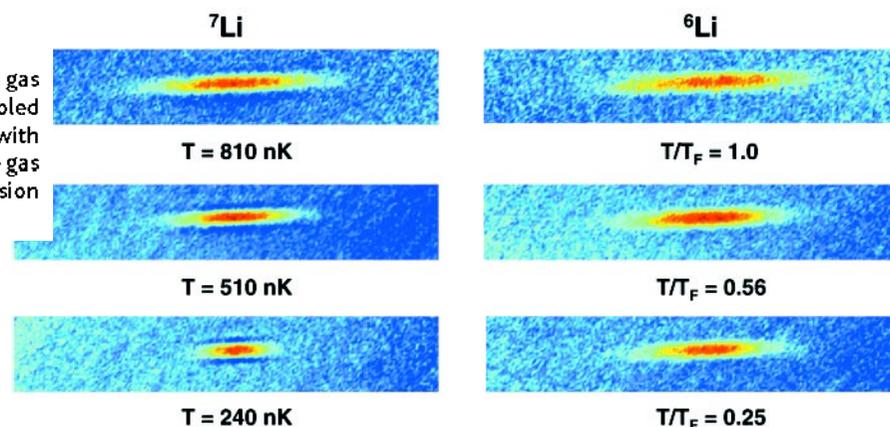


Fig. 1. Two-dimensional false-color images of both ${}^7\text{Li}$ and ${}^6\text{Li}$ clouds. At $T/T_F = 1.0$, the two clouds are approximately the same size, but as the atoms are cooled further, to $T/T_F = 0.56$, the Bose gas contracts, whereas the Fermi gas exhibits only subtle changes in size. At $T/T_F = 0.25$, the size difference between the two gases is clearly discernable. At this temperature the ${}^7\text{Li}$ image displays distortions due to high optical density. However, these distortions are present only in the radial direction and do not affect the measurements. The fitted numbers of ${}^7\text{Li}$ and ${}^6\text{Li}$ atoms, N_7 and N_6 , and the fitted temperatures are as follows: For the upper set, $N_7 = 2.4 \times 10^5$, $N_6 = 8.7 \times 10^4$, and $T = 810$ nK; for the middle set, $N_7 = 1.7 \times 10^5$, $N_6 = 1.3 \times 10^5$, and $T = 510$ nK; and for the lower set, $N_7 = 2.2 \times 10^4$, $N_6 = 1.4 \times 10^5$, and $T = 240$ nK. The probe detuning is a parameter of the fits but is constrained to vary by no more than its uncertainty of ± 3 MHz. The fits result in typical reduced- χ^2 values of ~ 1.0 . The uncertainties in number and temperature are due mainly to the uncertainties in the fit and are roughly estimated by finding the point at which the reduced- χ^2 increases by 20%. The resulting uncertainties are 8% in temperature and 15% in number. Other sources of uncertainty are relatively insignificant. The size of each displayed image is 1.00 mm in the horizontal axis and 0.17 mm in the vertical axis.

“Bosenova” …… BECによる超新星爆発のアナロジー

準安定なBECは気体相にあり、数ミクロンの大きさ。ひとたび崩壊をはじめれば、高密度なりチウム金属になるのか？

原子密度が高くなると、3体衝突が起こりはじめ、束縛状態の形成に伴って数Kの巨大な潜熱が放出されるのでダイナミクスは単純ではない。潜熱が原子の運動エネルギーに転化されたら、原子集団は大爆発を起こす可能性がある。

1 実験結果

Cornish, Claussen, Roberts, Cornell & Wieman, PRL 85 (2000) 1795.

Donley, Claussen, Cornish, Roberts, Cornell & Wieman Nature 412 (2001) 295.

- 10^4 個からなる Rb85 の原子を、誘導磁場 Feshbach 共鳴により、相互作用を斥力 ($a \sim 10\text{nm}$) から引力 ($a \sim -1\text{nm}$) へ変えると、BEC 状態は収縮をはじめ、実験解像度よりも小さくなった後、約 5ms 後、非等方なバースト的爆発が見られた。 “Bosenova”
- collapse 後の状態は次の 3 つに分けられる。
 - remnant (trap された中央部に残った密度の高い原子の塊)
 - burst (100nK 程度のエネルギー)
 - missing atoms (数の勘定が合わないため)

BEC状態の収縮と爆発 = “Bosenova”

【実験】 Donley et al, Nature 412 (2001) 295

articles

Dynamics of collapsing and exploding Bose–Einstein condensates

Elizabeth A. Donley*, Neil R. Claussen*, Simon L. Cornish*, Jacob L. Roberts*, Eric A. Cornell*† & Carl E. Wieman*

* JILA, Campus Box 440, and Department of Physics, Campus Box 390, University of Colorado, Boulder, Colorado 80309, USA

† Quantum Physics Division, National Institute of Standards and Technology, JILA A231, Boulder, Colorado 80309, USA

When atoms in a gas are cooled to extremely low temperatures, they will—under the appropriate conditions—condense into a single quantum-mechanical state known as a Bose–Einstein condensate. In such systems, quantum-mechanical behaviour is evident on a macroscopic scale. Here we explore the dynamics of how a Bose–Einstein condensate collapses and subsequently explodes when the balance of forces governing its size and shape is suddenly altered. A condensate’s equilibrium size and shape is strongly affected by the interatomic interactions. Our ability to induce a collapse by switching the interactions from repulsive to attractive by tuning an externally applied magnetic field yields detailed information on the violent collapse process. We observe anisotropic atom bursts that explode from the condensate, atoms leaving the condensate in undetected forms, spikes appearing in the condensate wavefunction and oscillating remnant condensates that survive the collapse. All these processes have curious dependences on time, on the strength of the interaction and on the number of condensate atoms. Although the system would seem to be simple and well characterized, our measurements reveal many phenomena that challenge theoretical models.

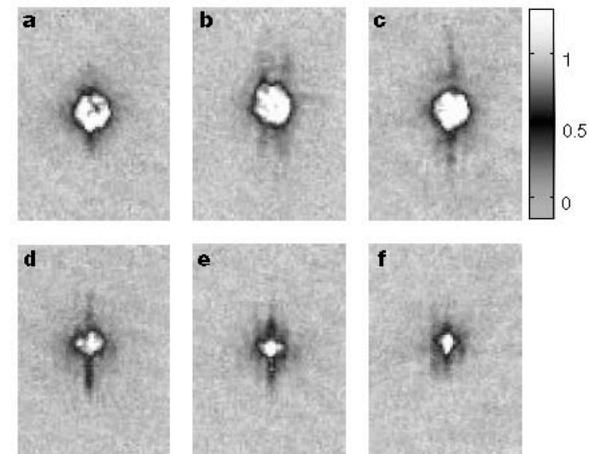


Figure 5 Jet images for a series of τ_{evolve} values for the conditions of Fig. 1b. The evolution times were 2, 3, 4, 6, 8 and 10 ms (from **a** to **f**). Each image is $150 \times 255 \mu\text{m}$. The bar indicates the optical depth scale. An expansion to $a_{\text{expand}} = +250a_0$ was applied, so the jets are longer than for the quantitative measurements explained in the text. The jets were longest (that is, most energetic) and contained the most atoms at values of τ_{evolve} for which the slope of the loss curve (Fig. 1b) was greatest. A tiny jet is barely visible for $\tau_{\text{evolve}} \approx 2$ ms (**a**), which is 1.7 ms before t_{collapse} . The images also show how the number of condensate atoms decreases with time. The time from the application of a_{quench} until the acquisition of the images was fixed at 5.2 ms.

【実験】 Donley et al, Nature 412 (2001) 295

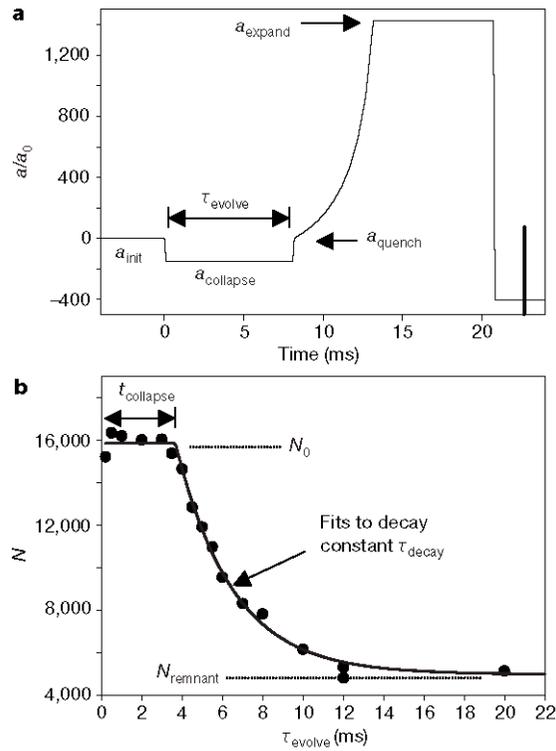
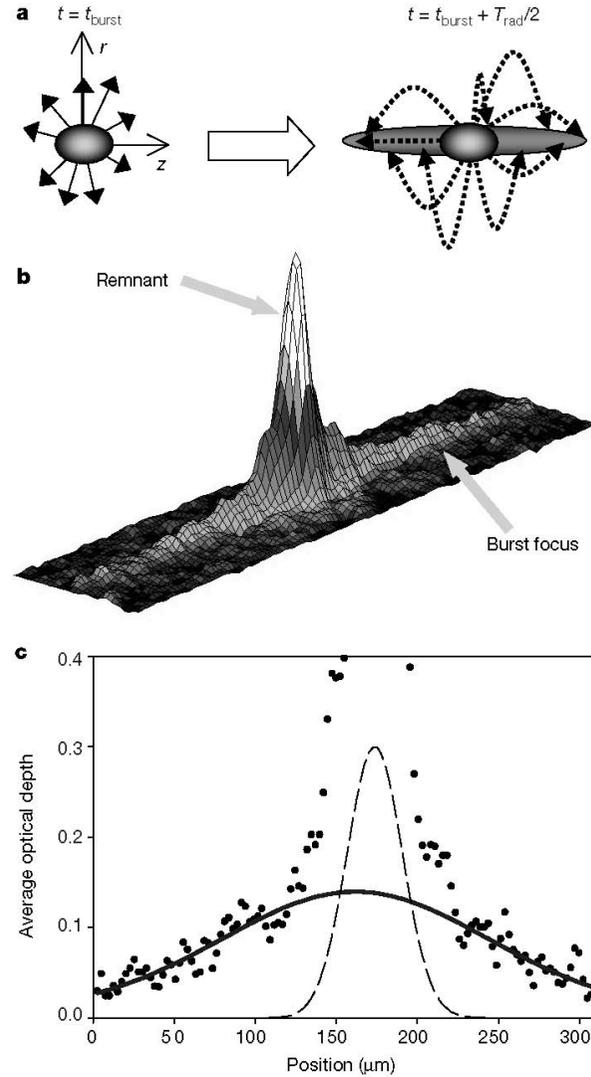


Figure 1 An example of a ramp applied to the scattering length a , and a plot of the condensate number N versus time after a jump to a negative scattering length. **a**, A typical $a(t)$ sequence. $a_0 = 0.529 \text{ \AA}$ is the Bohr radius. The scattering length is jumped at $t = 0$ in 0.1 ms from a_{init} to a_{collapse} , where the BEC evolves for a time τ_{evolve} . The field is carefully controlled so that magnetic-field noise translates into fluctuations in a_{collapse} on the order of $\sim 0.1 a_0$ in magnitude. The collapse is then interrupted with a jump to a_{quench} , and the field is ramped in 5 ms to a large positive scattering length which makes the BEC expand. After 7.5 ms of additional expansion, the trap is turned off in 0.1 ms, and 1.8 ms later the density distribution is probed using destructive absorption imaging with a 40- μs laser pulse (indicated by the vertical bar). The increase in a from a_{collapse} to a_{expand} is far too rapid to allow for the BEC to expand adiabatically. On the contrary, the smaller the BEC before expansion, the larger the cloud at the moment of imaging. Thus we can readily infer the relative size of the bulk of the BEC just before the jump to a_{quench} . The density of the expanded BEC is so low that the rapid transit of the Feshbach resonance pole²⁵ during the trap turn-off and the subsequent time spent at magnetic field $B = 0$ ($a = -400a_0$) both have a negligible effect. **b**, The number of atoms remaining in the BEC versus τ_{evolve} at $a_{\text{collapse}} = -30a_0$. We observed a delayed and abrupt onset of loss. The solid line is a fit to an exponential with a best-fit value of $t_{\text{collapse}} \approx 3.7(5)$ ms for the delay.



t_{burst} is the time at the onset of a radial burst of approximately 3,000 atoms. The temperature of the burst is 62 nK. The dashed line indicates the fit to this initial thermal component. We note the offset between the centres of the burst and the remnant. This offset varies from shot to shot by an amount comparable to the burst size ($\sigma = 17 \mu\text{m}$). The latter is present in the pre-collapse sample due to the finite temperature, and appears to be unaffected by the collapse. The dashed line indicates the fit to this initial thermal component. We note the offset between the centres of the burst and the remnant. This offset varies from shot to shot by an amount comparable to the burst size.

	Rice 大の実験事実
崩壊開始時刻	斥力から引力に変えてから，ある時間 (1-10 ms) 経過後に突然激しい崩壊が始まる。(非線形効果)
原子数の変化	減衰定数 τ_{decay} は，初期の原子数 N_0 や S 波散乱長 $ a _{collapse}$ に依存しない
バースト	崩壊に伴って，100 nK 程度の非等方バーストが発生
バーストエネルギー	1 原子あたりのバーストエネルギーは，初期の BEC 原子数に著しく依存
バースト原子数	$ a _{collapse}$ を変化させても，吹き飛ばされる外側の原子数は変わらない。
レムナント	N_{cr} のオーダー付近で決まり，これは， N_0 や $ a _{collapse}$ に依存（崩壊後に数十%（臨界原子数以下）の BEC が残される）
最終状態原子数比	remnant/burst/missing atoms の比は， N_0 に依らない
不明な点	「バーストはコヒーレントか」 「missing atoms は，どこに行ったのか？」

2 理論

Saito & Ueda, PRL 86 (2001) 1406; PRA 63 (2001) 043601; PRA 65 (2002) 033624.

Gross-Pitaevskii 方程式を数値的に積分することにより, Bose-Einstein 凝縮現象を説明を試みた. GP 方程式は, BEC の平均場を記述するものとして広く使われているものであり, それまで BEC 斥力の場をよく表現できていた. 引力場をどこまで記述できるかは不明であった.

- GP 方程式には, 原子の loss 効果を含める項を現象論的に導入した.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V_{\text{trap}}(\mathbf{r})\psi + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} |\psi|^2 \psi - \frac{i\hbar}{2} \left(\underbrace{K_2 |\psi|^2}_{\text{2体効果}} + \underbrace{K_3 |\psi|^4}_{\text{3体効果}} \right) \psi \quad (1)$$

$$V_{\text{trap}} = \frac{m}{2} [\omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2) + \omega_z^2 z^2]$$

- 全原子数 $\int |\psi|^2 d\mathbf{r}$ は保存すると考えるのが自然だが, 実際には 2 体 dipolar や 3 体 recombination 過程で減少してゆく.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int |\psi|^2 d\mathbf{r} = -\int (K_2 |\psi|^4 + K_3 |\psi|^6) d\mathbf{r} \quad (2)$$

- 数値計算では 2 体効果は無視. Feshbach 共鳴より離れた状態では K_3 や s 波散乱長 a の値は, 実験と理論で order 10 の範囲で一致するが, Feshbach 共鳴の近くではそのような値は得られていない.
- 数値計算は差分法, Crank-Nicholson スキーム. 実験と同じく, $a_{\text{initial}} > 0, a_{\text{collapse}} < 0$ (例えば $a_{\text{initial}} = 7a_0, a_{\text{collapse}} = -30a_0$), Rb85 をモデルにし, N_0 と K_3 を与えた. no other fitting parameters.

“Bosenova” 実験と数値計算 (1)

【実験】 Donley et al, Nature 412 (2001) 295

【数値計算】 Saito & Ueda, PRA 65 (2002) 033624

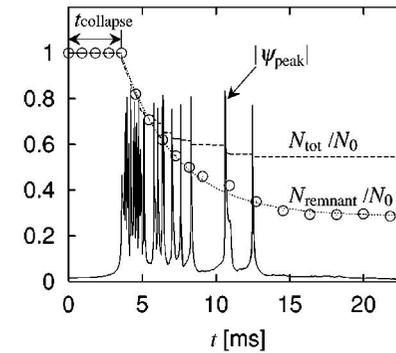
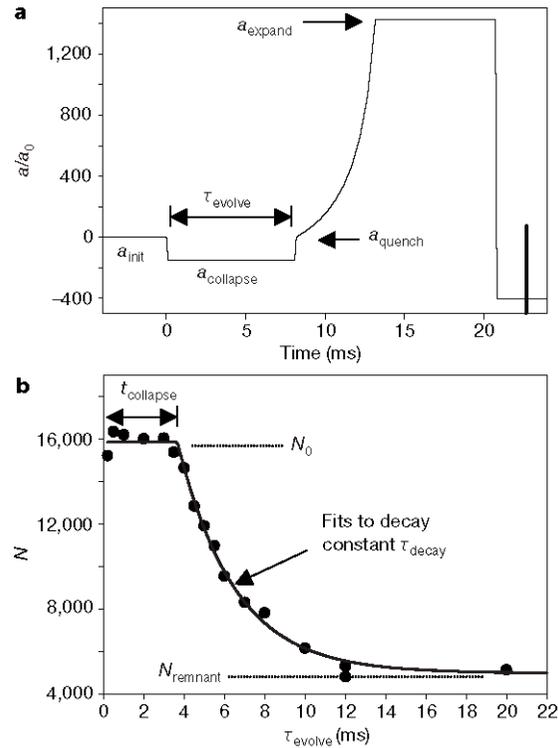


FIG. 1. Time evolutions of the peak height of the wave function $|\psi_{\text{peak}}|$ (solid curve in arbitrary scale), the fraction N_{tot}/N_0 of the total number of atoms remaining in the trap (dashed curve), and the fraction N_{remnant}/N_0 of the remnant BEC atoms (circles). The dotted curve is the best fit of the circles to Eq. (4) with $t_{\text{collapse}}=3.6$ ms and $\tau_{\text{decay}}=3.7$ ms. At $t=0$, the s -wave scattering length is changed from $a_{\text{init}}=7a_0$ to $a_{\text{collapse}}=-30a_0$, where a_0 is the Bohr radius. The initial number of BEC atoms is $N_0=15000$, and the three-body recombination loss-rate coefficient is $K_3=2 \times 10^{-28}$ cm⁶/s.

“Bosenova” 実験と数値計算 (2)

【実験】 Donley et al, Nature 412 (2001) 295

【数値計算】 Saito & Ueda, PRA 65 (2002) 033624

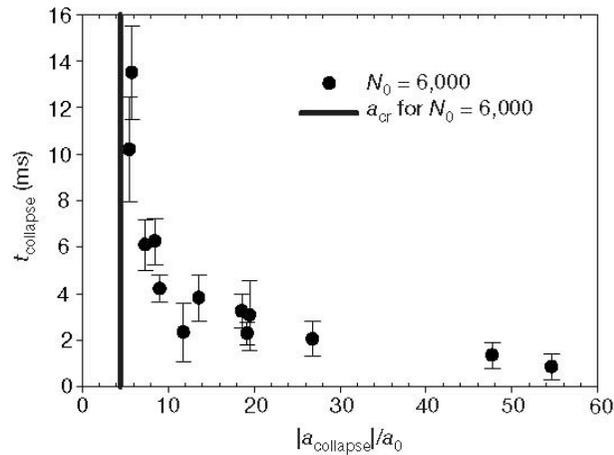


Figure 2 The collapse time t_{collapse} versus the scattering length to which the condensate is jumped, a_{collapse} for 6,000-atom condensates. The vertical line indicates the critical value of the scattering length, a_{cr} for $N_0 = 6,000$. The data were acquired with $a_{\text{init}} = a_{\text{quench}} = 0$ (to within $\sim 2a_0$; see Fig. 1).

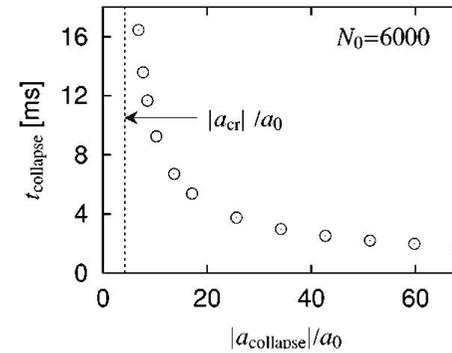


FIG. 3. The collapse time t_{collapse} at which implosions begin as a function of $|a_{\text{collapse}}|/a_0$, where the initial number of BEC atoms is $N_0 = 6000$. At $t = 0$, the s -wave scattering length is switched from $a_{\text{init}} = 0$ to $a_{\text{collapse}} < 0$. The dashed line indicates the critical ratio $|a_{\text{cr}}|/a_0$ for $N_0 = 6000$, below which the condensate does not collapse.

“Bosenova” 実験と数値計算 (3)

【実験】 Donley et al, Nature 412 (2001) 295

【数値計算】 Saito & Ueda, PRA 65 (2002) 033624

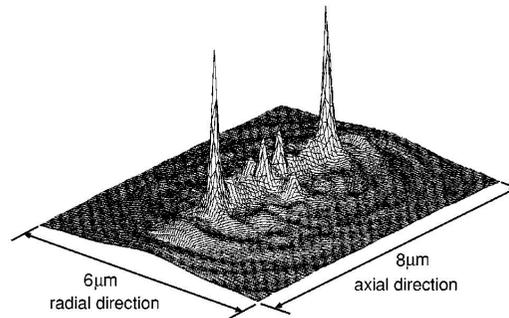
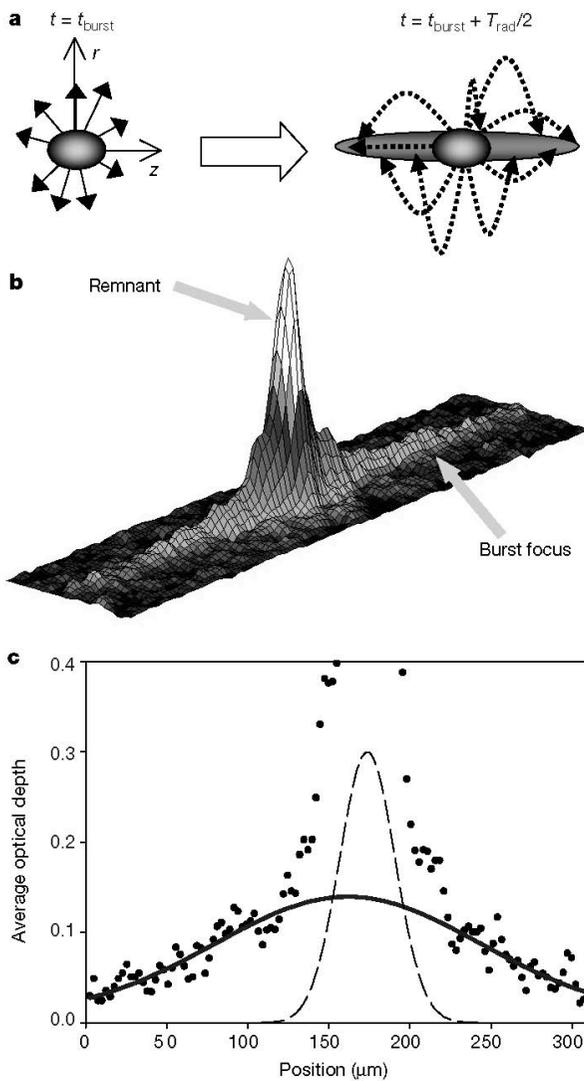


FIG. 2. A snapshot of the column density of the imploding BEC taken at 2.5 ms after the s -wave scattering length is changed from $a_{\text{init}}=0$ to $a_{\text{collapse}}=-30a_0$. The initial number of BEC atoms $N_0=15000$, and the loss-rate coefficient is $K_3=2\times 10^{-28}\text{ cm}^6/\text{s}$.

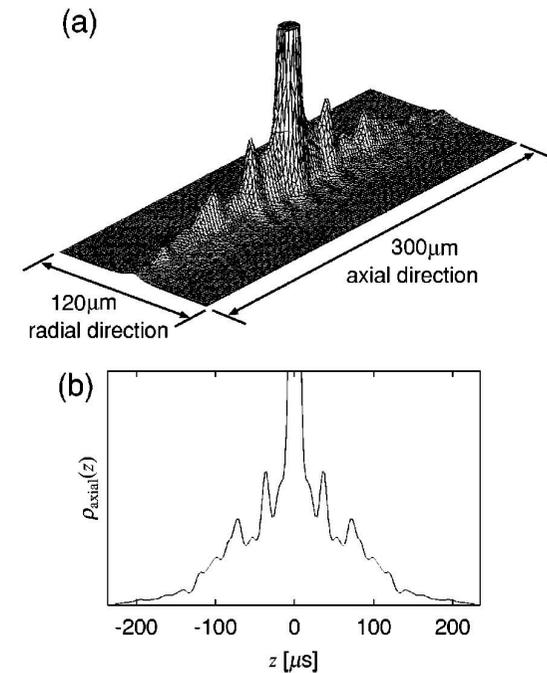


FIG. 5. (a) The integrated column density $\rho(x,z)=\int|\psi|^2 dy$ seen from the direction perpendicular to the trap axis and (b) the one-dimensional density distribution $\rho_{\text{axial}}(z)=\int|\psi|^2 dx dy$ along the axial direction. The s -wave scattering length is switched from $a_{\text{init}}=0$ to $a_{\text{collapse}}=-30a_0$ with $K_3=2\times 10^{-28}\text{ cm}^6/\text{s}$, where the images are taken at $t=33.6\text{ ms}$. The images are smoothed in accordance with the experimental resolution ($7\mu\text{m}$ FWHM), and the central peaks are truncated.

“Bosenova” 実験と数値計算 (4)

【実験】 Donley et al, Nature 412 (2001) 295

【数値計算】 Saito & Ueda, PRA 65 (2002) 033624

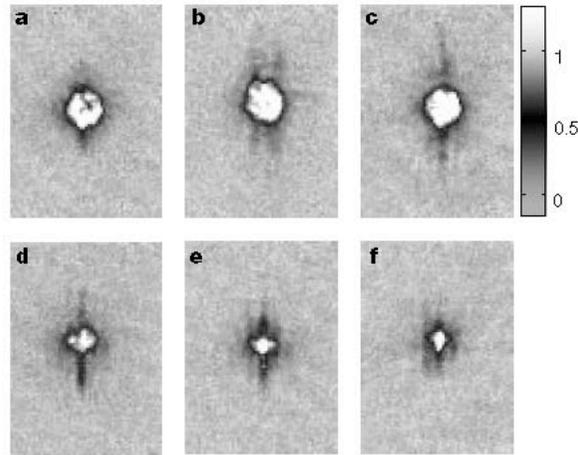


Figure 5 Jet images for a series of τ_{evolve} values for the conditions of Fig. 1b. The evolution times were 2, 3, 4, 6, 8 and 10 ms (from **a** to **f**). Each image is $150 \times 255 \mu\text{m}$. The bar indicates the optical depth scale. An expansion to $a_{\text{expand}} = +250a_0$ was applied, so the jets are longer than for the quantitative measurements explained in the text. The jets were longest (that is, most energetic) and contained the most atoms at values of τ_{evolve} for which the slope of the loss curve (Fig. 1b) was greatest. A tiny jet is barely visible for $\tau_{\text{evolve}} \approx 2$ ms (**a**), which is 1.7 ms before t_{collapse} . The images also show how the number of condensate atoms decreases with time. The time from the application of a_{quench} until the acquisition of the images was fixed at 5.2 ms.

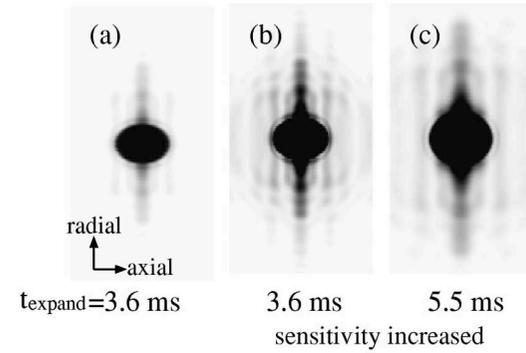


FIG. 6. The integrated column densities $\rho(x, z) = \int |\psi|^2 dy$ of condensates and jets seen from the radial direction. The wave function in Fig. 2 is expanded by a switch of the s -wave scattering length from $a_{\text{collapse}} = -30a_0$ to $a_{\text{expand}} = 100a_0$. The size of each image is $48 \times 90 \mu\text{m}$. (a) The image is taken with $t_{\text{expand}} = 3.6$ ms. (b) The sensitivity of imaging in (a) is increased. (c) The image is taken with $t_{\text{expand}} = 5.5$ ms and with the same sensitivity as (b).

“Bosenova” 実験と数値計算 (5)

【数値計算】 Saito & Ueda, PRA 65 (2002) 033624

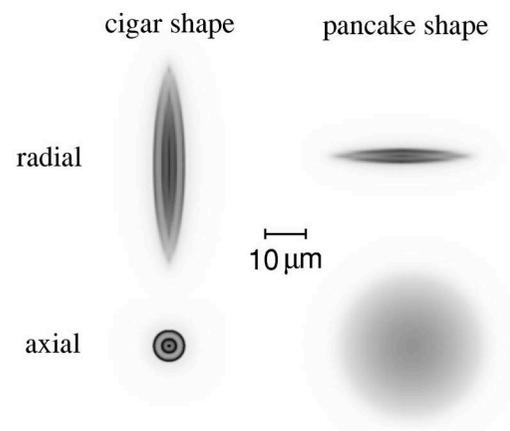


FIG. 7. Pattern formation in a prolate trap (left panel) and an oblate trap (right panel), where the column density is seen from the radial (upper images) and axial (lower images) directions. The initial number of atoms is $N_0 = 50\,000$, and at $t = 0$ the s -wave scattering length is switched from $a_{\text{init}} = 400a_0$ to $a_{\text{collapse}} = -310a_0$. The ratio is $\omega_z/\omega_\perp = 0.39(\sqrt{8})$ with $\omega_\perp = 17.5$ Hz (9.03 Hz) in the prolate (oblate) trap, and the images are taken at $t = 6.2$ ms ($t = 4.8$ ms).

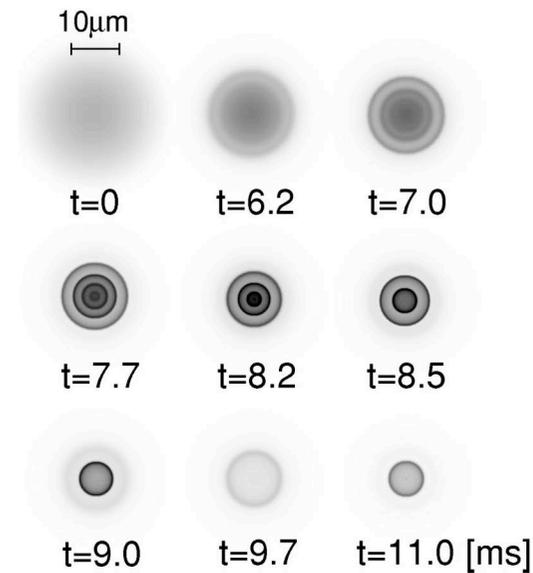


FIG. 8. Time evolution of the column density of BEC in an isotropic trap, where the trap frequency is $\omega/2\pi = 12.8$ Hz. At $t = 0$ the s -wave scattering length is switched from $a_{\text{init}} = 400a_0$ to $a_{\text{collapse}} = -310a_0$. The initial number of atoms is $N_0 = 50\,000$ and the loss-rate coefficient is $K_3 = 8 \times 10^{-26}$ cm⁶/s.

Saito-Ueda による Bose-nova の理解

1. 引力によって中心の狭い領域に密度の高い部分ができる。
2. 密度の高い部分で3体衝突により、原子の損失が盛んに起こり、密度が低下する。
3. 密度が下がると引力が減少するので、狭い領域に集まった原子は不確定性関係に起因する零点圧力により外に飛び出す。

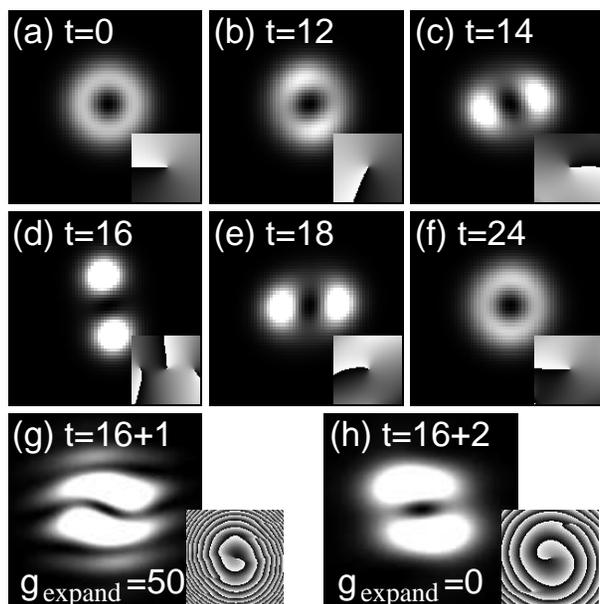
	Rice 大の実験事実	東工大の数値計算
崩壊開始時刻	斥力から引力に変えてから，ある時間 (1-10 ms) 経過後に突然激しい崩壊が始まる。(非線形効果)	確認
原子数の変化	減衰定数 τ_{decay} は，初期の原子数 N_0 や S 波散乱長 $ a _{collapse}$ に依存しない	確認
バースト	崩壊に伴って，100 nK 程度の非等方バーストが発生	burst 現象が起きる．毎 half trap period ごとに，refocus 現象も起きる．
バーストエネルギー	1 原子あたりのバーストエネルギーは，初期の BEC 原子数に著しく依存	
バースト原子数	$ a _{collapse}$ を変化させても，吹き飛ばされる外側の原子数は変わらない．	
レムナント	N_{cr} のオーダー付近で決まり，これは， N_0 や $ a _{collapse}$ に依存（崩壊後に数十%（臨界原子数以下）の BEC が残される）	N_0 が大きいとき，remnant として残される BEC 原子数は， N_{cr} よりもかなり大きい．
最終状態原子数比	remnant/burst/missing atoms の比は， N_0 に依らない	確認
不明な点	「バーストはコヒーレントか」	jet が干渉の縁の部分 (interference fringes) に起因することから，バースト原子はコヒーレントであろう．
不明な点	「missing atoms は，どこに行ったのか？」	

- 崩壊は一度だけではなく，間欠的に何度も生じているであろう．その結果，原子密度に shell 状のパターンが形成されるであろう．
- 展開パラメータ $n|a|^3 \sim 10^{-3}$ であることから，mean-field theory も適用可能であることが示された．

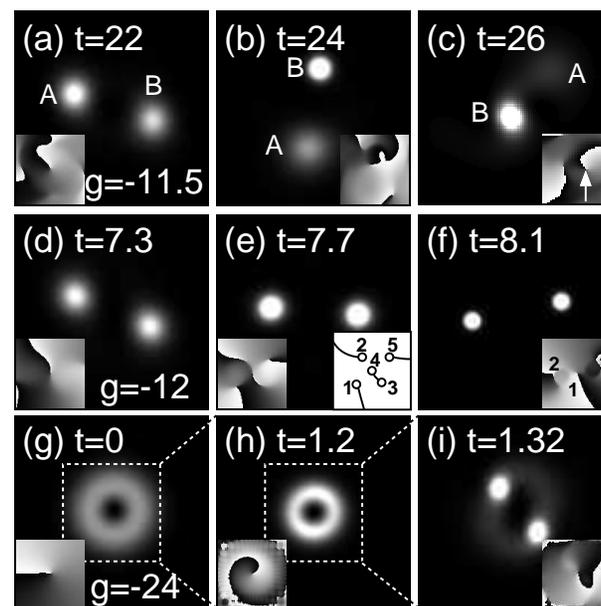
Rotating Bosevova

Saito, Ueda, PRL 89 (2002) 190402

“self-focusing effect” vs “topological constraint”



四重極不安定性が勝り，渦は2つに split するが，やがて再び合体する現象が繰り返される場合．



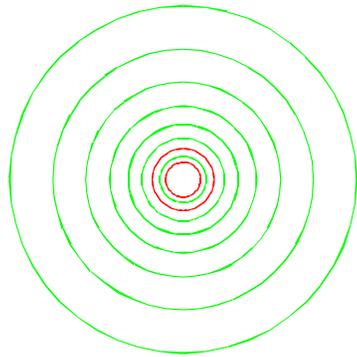
dipole 不安定性が勝り，渦が分離する場合．(a-c) 渦 B の勝ち．(d-f) 引き分け．monopole mode が優勢の場合 (g)-(i)．

重力物理と BEC の ア ナロ ジー : 言いたい 放題

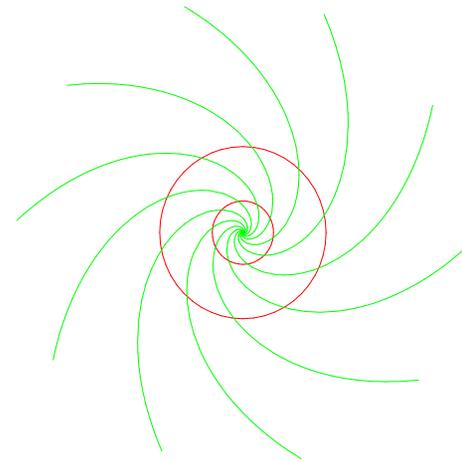
重力物理	BEC
Schwarzschild BH	ring を つ く る Garay ò (2000/2001)
Kerr BH	洞 を つ く る Visser-Weinfurtner(2004)
Lorentz 破れ	Visser ò (2001)
重力波	Unruh ò (2002)
FRW	Visser ò (2003)
superradiance	Federici ò (2005)
NS	Rojas ò (2004)
Gibbons-Hawking 効果	膨張す る cigar Fedichev-Fischer (2003)

BEC で Kerr BH

Visser, Weinfurtner, Class. Quant. Grav. **22** (2005) 2493



単純に回転する渦 (non-collapsing vortex)



洗面台吸込口型 (draining bathtub)

Gross-Pitaevskii 方程式の Hamilton-Jacobi 化

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{x}) + g|\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 \right) \Phi(\mathbf{x}, t)$$

• 関数形を modulus と phase に分離 $\Phi = \sqrt{n(\mathbf{x}, t)} e^{iS(\mathbf{x}, t)}$

• 速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ を定義

$$n(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{2im} (\Phi^* \nabla \Phi - \Phi \nabla \Phi^*) \Rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla S(\mathbf{x}, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \nabla \cdot (\mathbf{v}n) = 0 \tag{1}$$

$$m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \nabla \left(V_{\text{ext}} + gn - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n}} \nabla^2 \sqrt{n} + \frac{mv^2}{2} \right) = 0. \tag{2}$$

(1) は連続の式, (2) は運動方程式.

原子間斥力が十分大きいとき, kinetic pressure を無視すれば, (2) は状態方程式 $P = (1/2)gn^2$ とした流体方程式の potential flow の式.

BECに見られる Lorentz 条件の破れ

Visser, Barceló, and Liberati, hep-th/0109033

GP 方程式 \Rightarrow kinetic potential 無視 \Rightarrow 渦なし粘性なし流体 \Rightarrow BH アナロジー

• 一方で, 非線形 Schrödinger \Rightarrow 放物型, 情報は瞬時に伝播

• 一方で, Lorentzian metric \Rightarrow 双曲型, 有限速度 **パズル?**

kinetic potential を無視せずに, eikonal 近似を行い, 分散関係を求めると,

$$(\omega - \vec{v}_0 \cdot \vec{k})^2 = c_s^2 k^2 + \left(\frac{\hbar}{2m} k^2\right)^2.$$

• 群速度
$$\vec{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = \vec{v}_0 + \frac{\left(c_s^2 + \frac{\hbar^2}{2m^2} k^2\right)}{\sqrt{c_s^2 k^2 + \left(\frac{\hbar}{2m} k^2\right)^2}} \vec{k}$$

• 位相速度
$$\vec{v}_p = \frac{\omega \hat{k}}{\|\vec{k}\|} = (v_0 \cdot \hat{k}) \hat{k} + \sqrt{c_s^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{4m^2}} \hat{k}$$

high momentum ($k \gg k_c \equiv m c_s / \hbar \Leftrightarrow \lambda \ll \lambda_C \equiv \hbar / (m c_s)$.) では, どちらも unbound.

high momentum では, 分散関係は「質量公式」もどきの式にも.

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} + \vec{v}_0 \cdot \vec{k} + \frac{m c_s^2}{\hbar} + O(k^{-2}).$$

BECに限らず, 伝播速度が無限な系では, causality を破っている.

Research Directions?

- モデルの提案
 - BH+WH, BH formation, ...
 - NS models w EOS, multi-component, ...
- 精密な計算
 - pattern formation, rotation, observables, ...
 - 安定性, 一般性, 実験可能性, ...
 - 基礎方程式の妥当性, ...
- alternativeな計算
 - N体?