filename="BHexcision.tex" 2002-0119 HS `shinkai@atlas.riken.go.jp`

# 「BH 取り除き」テクニック


**概要**

3+1形式の数値相対論でのテクニックの一つとして，現在確立しつつある,「BHの特異点を計算領域から取り除く(black hole excision)」技法を，Alcubierre and Brügmann (2001)の論文を参考に復習する．


## 1 動機，背景

数値計算をする上で，境界条件の取り扱いは常に悩ましい問題である．しかも，ブラックホールの内部に生じる特異点では，物理量が発散するので，計算領域から取り除く必要がある．重力崩壊の計算などで，これまで，maximal slice条件が好まれてきたのは，maximal slice条件を使えば「特異点が発生したとしても，特異点付近では時間発展が止まるため特異点に近づかない」からであった．しかし，この方法を取る限り，特異点近傍では3次元超曲面が歪み，長時間積分が不可能になることは明白であった．

元来，ブラックホールのホライズンは，そこから内側の物理的な情報が外側に伝わらない，という意味を持つ．すなわち，3次元超曲面がホライズンの内側まで覆っていれば，その点を境界条件としても良いはずである．「特異点を取り除く」グリッドを用いる，という提案は，apparent horizonの数値的特定というテクニックと共に90年代初め，Seidelら [1, 2] によって，積極的に進められた．当時は「BH excision」とは呼ばず,「apparent horizon 境界条件」と呼ばれていた．彼らは，Schwarzschild BHに対して，この境界条件を実現した．しかし，歴史的には，Unruhに1984年頃に示唆されて，Thornburg [3, 4]が試みているようである（文献未調査).

より具体的には,「BH excision」は次の２つの部分からなる．

- 数値的な境界面を，BHの内側に設定し，特異点の部分を計算領域から取り除く．
- 時間発展の最中でもhorizonの位置がほぼ一定になるようにshift vectorを調整する(horizon tracking).

ここでは，単にhorizonと書いたが，物理的には「event horizonより内側」に境界面があればよい．ただし，数値的には3次元超曲面でその位置が決定できる「apparent horizonの内側」で，議論を進めることになる．

BH excisionは，長い間，球対称時空でのみ，その成功が伝えられてきた [1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10]．空間を3次元(3D)にすると，(幾分かの進展はあった[15, 16]が)，時間発展の不安定性の方が勝ってしまった [11, 12, 13, 14] [1]．

最近，Alcubierre and Brügmann [23]は，3DでSchwarzschild時空に対してこの技術を改良することに成功し(octant gridに限っているが)，現在では，ブラックホールの動的な2体問題の数値計算も，このテクニックで実現されているようだ[24].

残念ながら，日本ではこの手法に取り組んだ者はまだいない．ここではその準備すべき事項をまとめる．

## 2 最近の手法：Alcubierre and Brügmann (2001)

Alcubierre and Brügmann [23]が用いた手法を紹介する．彼らは，複雑化したこのテクニックの本質に戻るため，出来る限り簡単な手法に戻るように心がけた．

- 例え球対称BHであったとしても，Cartesian 座標を使っているのなら，取り除く領域は立方体とする．（下手に，球状にくり抜こうとすると，それだけで大変だから．これは3Dでの話).
- 使う運動方程式が双曲型であれば，境界値を外挿する方法などが使えるが，そのようなテクニックにこだわらず，単純で安定な境界条件をexcision boundaryで適用する．(境界を強引に固定しておいても良いだろう，という話).

[1] 一方で，characteristic formulationでのBH excisionは，当然ながら3Dでも成功していた．[17]．しかし，characteristic formulationでは，強い重力場でのcaustics形成が常に問題になるので，そこで喜んでばかりはいられなかった．

- causal differencingと呼ばれるような，高級な差分を用いない．shiftの advection terms (terms that look like $\beta^i \partial_i$ )以外は，中心差分とする．shiftのadvection termsについては，shiftの方向について風上差分を使う．( Cartesian 座標上での，標準的1次元2次風上差分で良いそうだ．これが技術的には最重要とか)．

彼らは，Schwarzschild BHを，ingoing Eddington-Finkelstein座標

$$ds^2 = -(1-2M/r)\,dt^2 + (4M/r)\,dtdr + (1+2M/r)\,dr^2 + r^2 d\Omega^2\ . \tag{1}$$

で表現し，Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura (BSSN) formulation [18, 19] を用いて長時間安定に発展させることに成功した．テクニカルな工夫として以下のものがある．

$\boxed{\text{運動方程式}}$ 彼らはBSSN方程式を用いながら，さらに次の工夫を行った．

1. $\tilde{A}_{ij}$のtraceless性を保証するように，時間発展計算の各時間ステップで，$\tilde{A}_{ij}$を$K_{ij}$から再定義した[20].
2. $\tilde{\Gamma}^i$ の発展方程式は，$\tilde{\Gamma}^i$ の微分が登場するところでのみ利用した．$\tilde{\Gamma}^i$ を微分する必要がない場合は，conformal Christoffel symbolsよりこの量を直接再計算した．(これが安定な計算を得るためには重要．現状では理論的に説明できない，と明記)

$\boxed{\text{lapse条件}}$ iEF座標であっても，そのlapseを直接使うのは数値的に不安定である．何らかの形で数値的時間発展と整合性の良い，“live” lapseが好ましい．

1. Bona-Massó family of slicing conditions [21]をさらにshiftの影響を含めた
$$\partial_t \alpha = -\alpha\, f(\alpha) \left[\alpha\, \mathrm{tr}K - \nabla_i \beta^i\right]\ . \tag{2}$$
2. maximal slicingに，“K freezing” 効果を加えた，
$$\Delta\alpha - \alpha K_{ij}K^{ij} - \beta^i \nabla_i \mathrm{tr}K = 0. \tag{3}$$

$\boxed{\text{shift条件}}$ 実はshiftは，iEF座標の厳密表現を適用しても安定であった．しかし，同様に “live” shiftの成功例もいくつか得られた．

1. BSSNに特化しているが，$\partial_t \tilde{\Gamma}^k$=0 (“Gamma freezing” condition, note that $\tilde{\Gamma}^k \neq 0$)，すなわち
$$\begin{aligned}&\tilde{\gamma}^{jk}\partial_j\partial_k\beta^i + \frac{1}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\partial_j\partial_k\beta^k - \tilde{\Gamma}^j\partial_j\beta^i + \frac{2}{3}\tilde{\Gamma}^i\partial_j\beta^j + \beta^j\partial_j\tilde{\Gamma}^i \\ &-2\tilde{A}^{ij}\partial_j\alpha - 2\alpha\left(\frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\partial_j\mathrm{tr}K - 6\tilde{A}^{ij}\partial_j\phi - \tilde{\Gamma}^i_{jk}\tilde{A}^{jk}\right) = 0.\end{aligned} \tag{4}$$
(ここで，momentum constraintで $\partial_j \tilde{A}^{ij}$をreplaceしている)．楕円型.
2. もう一つは，楕円型条件を放物型に置き換える“driver” 技法[22]で “Gamma driver” condition
$$\partial_t \beta^i = k\,\partial_t \tilde{\Gamma}^i\,, \qquad (k>0)\,. \tag{5}$$

$\boxed{\text{境界条件}}$

- $\boxed{\text{excision cube}}$ 境界より垂直に一つ外側の点での時間微分された値を，単純に境界値にコピー.（cubeの端では，垂直方法をdiagonalに延長して定義）
- $\boxed{\text{outer BC}}$ lapse とshiftを含め，$\tilde{\Gamma}^i$ 以外のすべての変数に，a radiative boundary condition．即ち，数値解と厳密解との差に対して，$f - f_{\rm exact} = u(r-t)/r$.
- $\boxed{\text{outer BC}}$ $\tilde{\Gamma}^i$は，fixed.

なお，Alcubierre and Brügmannの論文にはoctanct gridに限って成功，と書かれていたが，後の仕事(BH grazing collision) [24]ではそれがどう解決されたのか，記述はない．PennStateグループ[25]も，ADM形式を用いた計算で，同様な成功例を報告した．

## 参考文献


[1] E. Seidel and W.-M. Suen, Phys. Rev. Lett. **69**, 1845 (1992).

[2] P. Anninos *et al.*, Phys. Rev. D **51**, 5562 (1995).

[3] J. Thornburg, Classical and Quantum Gravity **4**, 1119 (1987).

[4] J. Thornburg, Ph.D. thesis, University of British Columbia, Vancouver, British Columbia, 1993.

[5] M. A. Scheel, S. L. Shapiro, and S. A. Teukolsky, Phys. Rev. D **51**, 4208 (1995).

[6] R. Marsa and M. Choptuik, Phys Rev D **54**, 4929 (1996).

[7] C. Gundlach and P. Walker, Class. Quantum Grav. **16**, 991 (1999), gr-qc/9809021.

[8] M. Scheel *et al.*, Phys. Rev. D **56**, 6320 (1997).

[9] M. A. Scheel *et al.*, Phys. Rev. D **58**, 044020 (1998).

[10] L. E. Kidder *et al.*, (2000), gr-qc/0005056.

[11] P. Anninos *et al.*, Phys. Rev. D **52**, 2059 (1995).

[12] G. E. Daues, Ph.D. thesis, Washington University, St. Louis, Missouri, 1996.

[13] B. Brügmann, Phys. Rev. D **54**, 7361 (1996).

[14] P. Walker, Ph.D. thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois, 1998.

[15] G. B. Cook *et al.*, Phys. Rev. Lett **80**, 2512 (1998).

[16] J. Thornburg, (1999), gr-qc/9906022.

[17] R. Gomez *et al.*, Phys. Rev. Lett. **80**, 3915 (1998), gr-qc/9801069.

[18] T. W. Baumgarte and S. L. Shapiro, Physical Review D **59**, 024007 (1999).

[19] M. Shibata and T. Nakamura, Phys. Rev. D **52**, 5428 (1995).

[20] M. Alcubierre *et al.*, Phys. Rev. D **62**, 044034 (2000). [gr-qc/0003071]

[21] C. Bona, J. Massó, E. Seidel, and J. Stela, Phys. Rev. Lett. **75**, 600 (1995).

[22] J. Balakrishna *et al.*, Class. Quant. Grav. **13**, L135 (1996).

[23] M. Alcubierre and B. Brügmann, Phys. Rev. D. **63**, 104006 (2001). [gr-qc/0008067]

[24] M. Alcubierre, B. Brügmann, D. Pollney, E. Seidel, and R. Takahashi, Phys. Rev. D. **64**, 061501 (2001)

[25] S. Brandt, R. Correll, R. Gomez, M. Huq, P. Laguna, L. Lehner, P. Marronetti, R. A. Matzner, D. Neilsen, J. Pullin, E.Schnetter, D. Shoemaker, and J. Winicour, Phys.Rev.Lett. 85 (2000) 5496 [gr-qc/0009047]