GRの初期値設定問題
—- 通常のアプローチ vs Thin-Sandwich アプローチ —-

真貝寿明　shinkai@atlas.riken.go.jp
July 2001

ADM形式での初期値を決める方法は，constraint 方程式を解くことに帰着されていた．初期$t=0$での超曲面Σでの物理量を決めるという意味で，このことを初期値設定問題 (initial-value problem)という．（これはいわゆるCauchy問題という意味ではない．）

ここでは，最近提案された，「Thin-Sandwich方法」を，従来の「共形的アプローチ」と比較しながら紹介・検討する．

§1 従来の方法 – York-ÓMurchadha (1974)

N.ÓMurchadha and J.W.York,Jr., Phys. Rev. D. **10**, 428 (1974)

§2 Thin-Sandwichの方法 – York (1999)

J.W.York,Jr., Phys. Rev. Lett. **82**, 1350 (1999)

§3 考察

==

Let the metric in general,

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_l \beta^l)dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_l\beta^l & \beta_j \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta^j/\alpha^2 \\ \beta^i/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i\beta^j/\alpha^2 \end{pmatrix}$$

where

$$\alpha \equiv 1/\sqrt{-g^{00}}, \qquad \beta_j \equiv g_{0j}.$$

The projection operator to 3-space Σ,

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu,$$

where $n_\mu = (-\alpha, 0, 0, 0)$ and $n^\mu = g^{\mu\nu} n_\nu = \frac{1}{\alpha}(1, -\beta^i)$ is the unit normal vector of the spacelike hypersurface.

1　従来の方法 – York-ÓMurchadha (1974)

N.ÓMurchadha and J.W.York,Jr., Phys. Rev. D. **10**, 428 (1974)

1.1　目的

解くべき方程式は次の2つである．

<1a> The Hamiltonian constraint equation

$$ {}^{(3)}R + (\mathrm{tr}K)^2 - K_{ij}K^{ij} = 2\kappa\rho + 2\Lambda \tag{1.1} $$

<1b>The momentum constraint equation

$$ D_j(K^{ij} - \gamma^{ij}\mathrm{tr}K) = \kappa J^i \tag{1.2} $$

まず，超曲面Σを表す候補としての (trial) metric $\hat{\gamma}_{ij}$ は与えられているものとする．このtrial metricと(1.1), (1.2)の解としての metric γ_{ij} との間に次のように定義されるconformal 変換

$$ \text{solution} \quad \gamma_{ij} = \psi^4 \hat{\gamma}_{ij} \quad \text{trial metric} \tag{1.3} $$

を仮定し，適当なconformal factor ψ (>0)を求める，というのがYorkとÓMurchadhaのアイディアである．

1.2　conformal変換

extrinsic curvature K_{ij}をtrace部分と trace-freeな部分に分解する．

$$ K_{ij} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{tr}K = \gamma^{ij}K_{ij} & \text{trace part} \\ A_{ij} = K_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\mathrm{tr}K & \text{trace-free part} \end{cases} \tag{1.4} $$

K_{ij}を歪みテンソルからの類推で考えると，trace部分は形状不変な体積変化分を表し，trace-free部分は変形歪み(shear)を表すことに相当する．

(1.3)の変換に矛盾なく対応して定義されるconformal 変換をまとめて書くと

$$ \begin{aligned} \gamma_{ij} &= \psi^4\hat{\gamma}_{ij}, \qquad \gamma^{ij} = \psi^{-4}\hat{\gamma}^{ij} && (1.5) \\ A^{ij} &= \psi^{-10}\hat{A}^{ij}, \quad A_{ij} = \psi^{-2}\hat{A}_{ij} && (1.6) \\ \rho &= \psi^{-n}\hat{\rho}, \qquad J^i = \psi^{-10}\hat{J}^i && (1.7) \end{aligned} $$

となる．tr$K$はスカラー関数として扱い，この値はconformal 変換に対して不変

$$ \mathrm{tr}K = \hat{\mathrm{tr}}\hat{K}, \quad \mathrm{tr}A = \hat{\mathrm{tr}}\hat{A} = 0 \tag{1.8} $$

であるとする．

(1.5)より

$$
\begin{aligned}
\Gamma^i{}_{jk} &= \hat{\Gamma}^i{}_{jk} + 2\psi^{-1}(\delta^i{}_j \hat{D}_k\psi + \delta^i{}_k \hat{D}_j\psi - \hat{\gamma}_{jk}\hat{\gamma}^{im}\hat{D}_m\psi) \quad (1.9)\\
R &= \psi^{-4}\hat{R} - 8\psi^{-5}\hat{\Delta}\psi \quad (1.10)
\end{aligned}
$$

が得られる．ここで$\hat{\Delta} = \hat{\gamma}^{jk}\hat{D}_j\hat{D}_k$，$\hat{R} = R(\hat{\gamma})$である．また，

$$D_j A^{ij} = \psi^{-10}\hat{D}_j\hat{A}^{ij} \quad (1.11)$$

が成立する．

$\hat{A}$のような任意のtrace-freeである対称テンソルは，次のようにdivergence-free部分と，ベクトルの微分で導かれる部分とに分解できる．

$$\hat{A}^{ij} = \hat{A}^{ij}_{TT} + (\hat{\mathbb{L}}W)^{ij} \quad (1.12)$$

右辺第1項はtransverse-traceless (TT)部分と呼ばれ，

$$\hat{D}_j\hat{A}^{ij}_{TT} = 0 \qquad \text{and} \qquad \hat{\text{tr}}\hat{A}_{TT} = 0 \quad (1.13)$$

が成立するものとする．(1.12)の右辺第2項$(\hat{\mathbb{L}}W)^{ij}$は，$\hat{A}$の longitudinal部分であり，

$$(\hat{\mathbb{L}}W)^{ij} = \hat{D}^i W^j + \hat{D}^j W^i - \frac{2}{3}\hat{\gamma}^{ij}\hat{D}_k W^k \quad (1.14)$$

で求められる．ここで，

$$
\begin{aligned}
\hat{D}_j\hat{A}^{ij} &= \hat{D}_j(\hat{\mathbb{L}}W)^{ij} \equiv (\hat{\Delta}_{\mathbb{L}}W)^i\\
&= (\hat{\Delta}W)^i + \frac{1}{3}\hat{D}^i(\hat{D}_j W^j) + \hat{R}^i{}_j W^j \quad (1.15)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで'Laplacian' $\hat{\Delta}$はベクトルに作用するものであり，通常のスカラーに作用するLaplacian $\hat{\Delta} = \hat{D}^k\hat{D}_k$と同様，楕円型であり形式的にself-adjointである．

これらの変換によって，(1.1), (1.2)の 2つの方程式を書き直すと，次のようになる．

<1a'>The Hamiltonian constraint equation

$$8\hat{\Delta}\psi = \hat{R}\psi - (\hat{A}_{ij}\hat{A}^{ij})\psi^{-7} + [\frac{2}{3}(\text{tr}K)^2 - 2\Lambda]\psi^5 - 16\pi G\hat{\rho}\psi^{5-n} \quad (1.16)$$

<1b'>The momentum constraint equation

$$\hat{\Delta}W^i + \frac{1}{3}\hat{D}^i\hat{D}_k W^k + \hat{R}^i{}_k W^k = \frac{2}{3}\psi^6\hat{D}^i\text{tr}K + 8\pi G\hat{J}^i \quad (1.17)$$

1.3 まとめ

以上をまとめると次のようになる.

Conformal approach (York-ÓMurchadha, 1974)

初期値問題としてconstraint方程式(1.1), (1.2)を満たす解 $(\gamma_{ij}, K_{ij}, \rho, J^i)$を得るには，次のステップに従えばよい.

1. $\hat{\gamma}_{ij}$, $\mathrm{tr}K$, $\hat{A}_{ij}^{TT}$と物質分布 $\hat{\rho}$, $\hat{J}$を与える.
2. conformal変換された次のconstraints を解いて$(\psi,\ W^i)$を求める.

$$8\hat{\Delta}\psi = \hat{R}\psi - (\hat{A}_{ij}\hat{A}^{ij})\psi^{-7} + [\frac{2}{3}(\mathrm{tr}K)^2 - 2\Lambda]\psi^5 - 16\pi G\hat{\rho}\psi^{5-n} \tag{1.16}$$

$$\hat{\Delta}W^i + \frac{1}{3}\hat{D}^i\hat{D}_kW^k + \hat{R}^i{}_kW^k = \frac{2}{3}\psi^6\hat{D}^i\mathrm{tr}K + 8\pi G\hat{J}^i \tag{1.17}$$

where

$$\hat{A}^{ij} = \hat{A}_{TT}^{ij} + \hat{D}^iW^j + \hat{D}^jW^i - \frac{2}{3}\hat{\gamma}^{ij}\hat{D}_kW^k. \tag{1.18}$$

3. conformal 逆変換

$$\gamma_{ij} = \psi^4\hat{\gamma}_{ij}, \tag{1.19}$$

$$K_{ij} = \psi^{-2}[\hat{A}_{ij}^{TT} + (\hat{\mathrm{l}}W)_{ij}] + \frac{1}{3}\psi^4\hat{\gamma}_{ij}\mathrm{tr}K, \tag{1.20}$$

$$\rho = \psi^{-n}\hat{\rho}, \tag{1.21}$$

$$J^i = \psi^{-10}\hat{J}^i \tag{1.22}$$

を行うことにより，初期の物理量γ_{ij}, K_{ij}, ρ, J^iを決定する.

1.4 コメント

- 結局ψ, W^iの変数を用いることにより，初期値決定問題が計算し易くなった，といえよう. (1.16)はψに対する非線型楕円型の微分方程式であり，これを数値計算で解くためにはなんらかのiterativeな方法を使わなければならない. また，(1.17)はW^iに対する2次の線型微分方程式であるが，右辺第1項を通じて(1.16)と coupleしている.
  これは例えば，$\mathrm{tr}K = 0$ (maximal slicing condition)や$D_j(\mathrm{tr}K) = 0$ (constant mean curvature slicing)とすれば右辺第1項は消去され，(1.16)式とは分離されることになる.
- 通常，conformal変換された系$\hat{\gamma}_{ij}$を，conformally flat $\hat{\gamma}_{ij} = \delta_{ij}$として，解くべき式を簡略化する方法が好まれる. ただし，この妥当性については議論の余地が多分にある.
- なお，$\hat{A}_{ij}^{TT}$の2自由度は，重力波の自由度に相当するものと考えられているが，現在のところ，妥当な設定の仕方を統一的に論じたものはないと思われる.

1.5 Numerical procedures

1.5.1 Solve the Hamiltonian constraint

Two Methods:

1. Solve directly non-linear equation

$$8\hat{\Delta}\psi = \hat{R}\,\psi - \hat{K}_{ij}^{TF}\hat{K}^{ij}_{TF}\,\psi^{-7} + \frac{2}{3}\hat{K}^2\,\psi^5 - 16\pi G\,\hat{\rho}\,\psi^{5-n} \tag{1.23}$$

2. Solve iteratively the linearized equation $\psi = \psi_0 + \delta\psi$

$$\begin{aligned} 8\hat{\Delta}\psi &= E\,\psi + F\,\psi^{-7} + G\,\psi^5 + H\,\psi^{-3} + I\,\psi^{-1} + J \\ &= [E - 7F\psi_0^{-8} + 5G\psi_0^4 - 3H\psi_0^{-4} - 2I\psi_0^{-2}]\,\psi \\ &\quad +[8F\psi_0^{-7} - 4G\psi_0^5 + 4H\psi_0^{-3} + 2I\psi_0^{-1} + J] \end{aligned} \tag{1.24}$$

Boundary conditions:

- Robin BC

$$\psi = 1 + \frac{const.}{r}$$

- Dirichlet BC

$$\psi = 1 + \frac{M_{total}}{2r}$$

1.5.2 Solve the momentum constraint

Three Methods:

1. Solve directly non-linear equation

$$(\Delta W)^i + \frac{1}{3} D^i D_j W^j + R^i{}_j\, W^j - \frac{2}{3}\, \psi^6\, \hat{D}^i K = 8\pi G\, \hat{J}^i \tag{1.25}$$

2. Bowen's method for conformally flat case [GRG14(1982)1183]
   Under the ($\nabla^i K = 0$) condition, (1.25) becomes

$$\Delta W^i + \frac{1}{3}\nabla^i \nabla_j W^j = 8\pi S^i.$$

   By introducing a decomposition of W^i into vector and gradient terms

$$W^i = V^i - \frac{1}{4}\nabla^i \theta,$$

   the equations to solve are:

$$\begin{aligned} \Delta V^i &= 8\pi S^i, & \text{(26a)} \\ \Delta \theta &= \nabla_i V^i, & \text{(26b)} \end{aligned}$$

   If the source is of finite extent, then the the asymptotic behavior of V^i and θ are given by

$$V^i = -2\sum_{l=0}^{\infty} Q^{ij_1\cdots j_l} n_{j_1}\cdots n_{j_l}\frac{1}{r^{l+1}}, \tag{27a}$$

$$\begin{aligned} \theta = &-\sum_{l=1}^{\infty} Q^{\{ij_1\cdots j_{l-1}\}} n_i n_{j_1}\cdots n_{j_{l-1}}\frac{1}{r^{l-1}} + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{2(l+1)}{(2l+1)(2l+3)} Q_k^{kj_1\cdots j_l} n_{j_1}\cdots n_{j_l}\frac{1}{r^{l+1}} \\ &+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l-1}{2l+1} M^{\{ij_1\cdots j_{l-1}\}} n_i n_{j_1}\cdots n_{j_{l-1}}\frac{1}{r^{l+1}} \end{aligned} \tag{27b}$$

   where $n^i = x^i r^{-1}$ in the Cartesian cordinate, the multipoles Q and M are defined as

$$\begin{aligned} Q^{ij_1\cdots j_l} &\equiv \frac{(2l-1)!!}{l!}\int S^i(\mathbf{r}) x^{\{j_1} x^{j_2}\cdots x^{j_l\}} dV, \\ M^{ij_1\cdots j_l} &\equiv \frac{(2l-1)!!}{l!}\int r^2 S^i(\mathbf{r}) x^{\{j_1} x^{j_2}\cdots x^{j_l\}} dV, \end{aligned}$$

   and where brackets denote the completely symmetric trace-free part

$$Z^{\{ij_1\cdots j_l\}} = Z^{(ij_1\cdots j_l)} - \frac{l}{2l+1} Z_k^{k(j_1\cdots j_{l-1}}\delta^{j_l i)}$$

Which term is the lowest order?

More direct expressions are:

$$
\begin{aligned}
V^i &= -\frac{2}{r}\int S^i dV - \frac{2}{r^3}x^j\int S^i x^j dV - \frac{3}{r^5}x^j x^k\int S^i x^{\{j}x^{k\}}dV \\
&\quad -\frac{5}{r^7}x^j x^k x^l\int S^i x^{\{j}x^k x^{l\}}dV - \cdots \qquad (28a) \\
\theta &= -\frac{x^i}{r}\int S^i dV - \frac{2}{3}\frac{1}{r}\int S^k x^k dV - \frac{x^i x^j}{r^3}\int S^{\{i}x^{j\}}dV - \cdots \qquad (28b)
\end{aligned}
$$

Inspiral Binary of equal mass stars

For the case of inspiral binary (circular motion) of equal mass, which locate on x-axis and the orbital rotating vector aligns to z-axis, the lowest falling-off behavior is

$$
\begin{aligned}
V^x &= -2\frac{y}{r^3}\int S^x y dV \qquad (29a) \\
V^y &= -2\frac{x}{r^3}\int S^y x dV \qquad (29b) \\
V^z &= -5\frac{xyz}{r^7}\int S^z xyz dV \qquad (29c) \\
\theta &= -\frac{1}{2}\frac{xy}{r^3}[\int S^x y dV + \int S^y x dV] \qquad (29d)
\end{aligned}
$$

Head-on situation of equal mass stars

For the case of head-on two equal mass stars, which move along x-axis and with the center of mass is at the origin, then the lowest falling-off behavior is

$$
\begin{aligned}
V^x &= -2\frac{x}{r^3}\int S^x x dV \qquad (30a) \\
V^y &= -5\frac{xyz}{r^7}\int S^y xyz dV \qquad (30b) \\
V^z &= -5\frac{xyz}{r^7}\int S^z xyz dV \qquad (30c) \\
\theta &= -\frac{2}{3}\frac{1}{r}\int S^k x^k dV \qquad (30d)
\end{aligned}
$$

The expansion, (28a) and (28b), for general situation is ready in `thorn_outerBC` by HS.

3. Apply Bowen's method for general case (HS)

In general case, longitudinal part of the momentum constraints become

$$\Delta W^i + \frac{1}{3}\nabla^i \nabla_j W^j + R^i{}_j W^j = 8\pi J^i + \frac{2}{3}\psi^6 \nabla^i K \quad (\equiv 8\pi S^i). \tag{31}$$

By introducing a decomposition of W^i into vector and gradient terms

$$W^i = V^i - n\nabla^i \theta,$$

(31) becomes

$$\Delta V^i + R^i{}_j W^j + \frac{1}{3}\nabla^i[\nabla_j V^j - 4n\Delta\theta] = 8\pi S^i,$$

which are devided into

$$\Delta V^i = 8\pi S^i - R^i{}_j (V^j - n\nabla^j \theta) \quad (\equiv 8\pi \tilde{S}^i), \tag{32a}$$

$$\Delta \theta = \frac{1}{4n}\nabla_i V^i. \tag{32b}$$

- These equations are not decoupled, but we may apply the similar boundary conditions of Bowen's conformally flat case.
- If the source is of finite extent, then the solutions in the outside vacuum region are expressed as the same way of conformally flat case.

2 Thin Sandwich方法 (薄いサンドウィッチ，以下TS)

J.W.York,Jr., Phys. Rev. Lett. **82**, 1350 (1999)

2.1 概要

- これまでの初期値設定問題というのは，$t=0$という3次元面上でmetric と extrinsic curvatureの全成分を決定する，という問題設定だった．この論文では，初期値面を$t=0$と$t=\Delta t$の2つで用意して，それらから，extrinsic curvatureを定義し，conformal変換を用いて初期値問題を解く，という定式化を提案している．
- TSを持ち出す動機として，最近動機付けられたlapseの解釈 (York et al, 98) を挙げている．これは結果的に Ashtekar変数で使われているような，inverse densitized lapseを geometricalな意味をもつものとして考えておこう，というものである．
- 基本的には，前章で使った conformal変換を使うことになるが，利点の一つとして，これまでは「要請」するしかなかった $\bar{A}^{ij}=\psi^{-10}A^{ij}$の関係が，TSではderiveできるようになった．
- この論文では真空を仮定しているが，物質があっても同じ議論が展開できる，としている（実際そうである）．ここでは物質の項も含めて書き表すことにする．

2.2 metric, conformal metric, weighted conformal metric

conformal変換に関して3つのmetricが定義されるのでそれらを整理する．

(a) constraintを満たすmetric, $\overline{g}_{ij}$（いわゆる求めたい解）

(b) conformal変換されたconformal metric g_{ij}, where

$$\boxed{\text{「この世」}\quad \overline{g}_{ij}=\psi^4 g_{ij}\quad \text{「あの世」}}$$

$\psi>0$についてこれが成立するとき，$\overline{g}_{ij}$とg_{ij}は，conformally equivalentという．

(c) weightつきにしておくと，conformal変換の同値classが議論できるらしい．そこで，the weight $(-2/3)$ “conformal metric”

$$\hat{g}_{ij}=\overline{g}^{-1/3}\overline{g}_{ij}=g^{-1/3}g_{ij} \tag{1}$$

where $\overline{g}=\det(\overline{g}_{ij})$ and $g=(\det g_{ij})$.
ちなみに，微小な変化分に対して，いつでも$\overline{g}^{ij}\delta\hat{g}_{ij}=0$が成立し，

$$\overline{g}^{ij}\partial_t\hat{g}_{ij}=g^{ij}\partial_t\hat{g}_{ij}=\hat{g}^{ij}\partial_t\hat{g}_{ij}=0\,. \tag{2}$$

の関係式が得られる．

しかし，この論文では煩雑さをさけるために，weightつきの量は使わない．そのかわり，

weightつきの量がもつ $\hat{g}^{ij}\partial_t\hat{g}_{ij}=0$ のような性質(2) をconformal metric g_{ij} がもつ

と仮定して話を進めることにする[1]．

[1]言い換えれば，$\det g$ の時間変化なし．

2.3 velocity tensor の導入

$t=\delta t$での第2のsliceを考える．ここでのconformal metricは，

$$g'_{ij}=g_{ij}+u_{ij}\delta t \tag{3}$$

と発展しているとする．ただし，速度テンソル(velocity tensor)

$$\boxed{u_{ij}=\dot{g}_{ij}} \tag{4}$$

を導入し，以後，u_{ij}をknown valueとする [2]．weighted conformal metricの条件は，

$$g^{ij}u_{ij}=0, \qquad g^{ij}\dot{g}_{ij}=0 \tag{6}$$

となる．g'_{ij} と g_{ij}は，δt のfirst order では同じdeterminantになるが，一般に両者は同じconformal equivalence classではない [3]．

さて，以前と同様に(1.9), (1.10) を使って，運動方程式

$$\partial_t\overline{g}_{ij}\equiv\dot{\overline{g}}_{ij}=-2\overline{NK}_{ij}+(\overline{D}_i\overline{\beta}_j+\overline{D}_j\overline{\beta}_i) \tag{7}$$

を書き換えよう．traceless partを取ることによって，

$$\dot{\overline{g}}_{ij}-\frac{1}{3}\overline{g}_{ij}\overline{g}^{kl}\dot{\overline{g}}_{kl}\equiv\overline{u}_{ij}=-2\overline{NA}_{ij}+(\overline{L\beta})_{ij} \tag{8}$$

$$\text{where } \overline{A}_{ij}\equiv\overline{K}_{ij}-(1/3)\overline{K}\overline{g}_{ij},$$

$$\text{and} \quad (\overline{L\beta})_{ij}\equiv\overline{D}_i\overline{\beta}_j+\overline{D}_j\overline{\beta}_i-(2/3)\overline{g}_{ij}\overline{D}^k\overline{\beta}_k \tag{9}$$

(8) より，

$$\boxed{\overline{u}_{ij}=\psi^4u_{ij}} \tag{10}$$

同様に次の関係も成立する．

$$\overline{\beta}^i=\beta^i, \qquad \overline{\beta}_i=\psi^4\beta_i, \tag{11}$$

$$(\overline{L\beta})_{ij}=\psi^4(L\beta)_{ij}, \qquad (\overline{L}\beta)^{ij}=\psi^{-4}(L\beta)^{ij}\ . \tag{12}$$

[2]正確に書くなら，u_{ij}は，後の (10) との整合性を考えて，tracefreeとして定義し，

$$u_{ij}=\dot{g}_{ij}-\frac{1}{3}g_{ij}g^{kl}\dot{g}_{kl} \tag{5}$$

する方が良い．「$\det g$ が発展しない」という weighted conformal metricの条件 (6) を考慮すると第2項は消える．　もし，「$\det g$ も発展する」場合，(5)を定義とすることで，以下同様の議論が展開できる．その場合，conformal metricの要請は不要である．ただし，「あの世とこの世の時間発展の関係式」(27) に違いが生じる．いずれにせよ，York 自身は，consistentである．

[3]時間発展されているんだから，まあ当たり前．

2.4 lapseの再定義とそのconformal変換 / その帰着

ここでは，$\alpha(t,x)>0$ を，「slicing function」と呼び，lapse 関数$\overline{N}$を，天下り的に

$$\boxed{\overline{N}=\overline{g}^{1/2}\alpha \qquad (13)}$$

として定義する．逆に $\alpha=\overline{g}^{-1/2}\overline{N}=\underset{\sim}{N}$ は inverse densitized lapseとも言える[4]．

ここでの lapse $\overline{N}$ は，gに依存するから，dynamicalであり，gauge変数という純粋な意味付けは，できない量である． 「freely specifiedなのは，あくまでも α」である．そこで，

$$\boxed{\overline{\alpha}=\alpha} \text{ とすると，(13)より，} \boxed{\overline{N}=\psi^6 N}$$

というこれまでになかった，新しい関係式が得られる．

今までと同様

$$\boxed{\overline{K}=K}$$

という関係も導入しておく．traceless partの定義 (8) より，

$$\begin{aligned}\overline{A}^{ij} &= \psi^{-6}(2N)^{-1}\left[\psi^{-4}(L\beta)^{ij}-\psi^{-4}u^{ij}\right]\\ &= \psi^{-10}\left\{(2N)^{-1}\left[(L\beta)^{ij}-u^{ij}\right]\right\}=\psi^{-10}A^{ij} \qquad \text{すなわち} \qquad \boxed{\overline{A}^{ij}=\psi^{-10}A^{ij}}\end{aligned}$$

という関係が「導かれる」．これは，lapseにconformal変換の関係式が生じた結果である．

2.5 解くべきconstraints

以上の枠囲みのconformal変換を使うと，constraintは，(matterの変換も以前と同じとして)[5]

<2a'> The Hamiltonian constraint equation なんと全く同じ形式

$$8\Delta_g\psi-R(g)\psi+A_{ij}A^{ij}\psi^{-7}-[\frac{2}{3}K-2\Lambda]\psi^5-16\pi G\rho\psi^{5-n}=0\,, \qquad (14)$$

<2b'> The momentum constraint equation これはかなり違って

$$D_j\left[(2N)^{-1}(L\beta)^{ij}\right] = D_j\left[(2N)^{-1}u^{ij}\right]+\frac{2}{3}\psi^6D^iK+8\pi GJ^i \qquad (15)$$

[4] inverse densitized lapseを使う formulationは，さまざまな所に現れる．Teitelboimの経路積分，Ashtekar変数，Bianchi id.を簡略化，Choquet-Bruhat流 hyperbolic 形式...

[5] (15)左辺を具体的に 書くと，

$$D_a\left[(2N)^{-1}\right](D^i\beta^a+D^a\beta^i-\frac{1}{3}g^{ia}D^k\beta_k)+(2N)^{-1}\left[\Delta\beta^i+\frac{1}{3}D^iD_k\beta^k+R^i{}_k\beta^k\right]$$

2.6 まとめ

結局　まとめると，

Thin-Sandwich approach (York, 1999)

初期値問題としてconstraint方程式(1.1)，(1.2)を満たす解 $(\overline{g}_{ij}, \overline{K}_{ij}, \overline{N}, \overline{\beta}^i, \overline{\rho}, \overline{J}^i)$を得るには，次のステップに従えばよい．

1. $g_{ij}, u_{ij}(= \dot{g}_{ij}), N, K$と物質分布 ρ，J^iを与える．
2. conformal 変換されたconstraints を解いて(ψ, β^i)を求める．

$$8\Delta_g\psi - R(g)\psi + A_{ij}A^{ij}\psi^{-7} - [\frac{2}{3}K - 2\Lambda]\psi^5 - 16\pi G\rho\psi^{5-n} = 0\,, \tag{14}$$

$$D_j\left[(2N)^{-1}(L\beta)^{ij}\right] = D_j\left[(2N)^{-1}u^{ij}\right] + \frac{2}{3}\psi^6 D^i K + 8\pi G J^i \tag{15}$$

where

$$A^{ij} = (2N)^{-1}\left[(L\beta)^{ij} - u^{ij}\right] \tag{16}$$

3. conformal 変換

$$\overline{N} = \psi^6 N, \tag{17}$$

$$\overline{\beta}^i = \beta^i, \tag{18}$$

$$\overline{g}_{ij} = \psi^4 g_{ij}, \tag{19}$$

$$\overline{K}_{ij} = \psi^{-2}A_{ij} + \frac{1}{3}\psi^4 g_{ij}K, \tag{20}$$

$$\overline{\rho} = \psi^{-8}\rho, \tag{21}$$

$$\overline{J}^i = \psi^{-10}J^i \tag{22}$$

を行うことにより，初期の物理量 $(\overline{\gamma}_{ij}, \overline{K}_{ij}, \overline{N}, \overline{\beta}^i, \overline{\rho}, \overline{J}^i)$を決定する．

- momentum constraintの方は，実際にnumericalに解けるのかどうかという問題があるが，数学的に解けることが研究されているらしい (York, in preparation.)
- K =const. のときに，両者がdecoupleするのは，以前と同じである．
ただし，必ずmomentum constraint から解き始めなければならない．

その他，比較・問題提起は次章．

2.7 この世とあの世との時間発展関係

最後に，物理系metric (この世)

$$\overline{g}_{ij} \qquad \text{and} \qquad \overline{g}'_{ij} = \overline{g}_{ij} + \dot{\overline{g}}_{ij}\delta t \tag{23}$$

と，実際に計算を行う conformal系でのmetric (あの世)

$$g_{ij} \qquad \text{and} \qquad g'_{ij} = g_{ij} + u_{ij}\delta t \tag{24}$$

の関係を導いておく．

まず，$t=0$での$\overline{g}_{ij} = \psi^4 g_{ij}$は，明らか．運動方程式 (7) より，

$$\partial_t\left(\psi^4 g_{ij}\right) = \dot{\overline{g}}_{ij} = -2\overline{N}\left(\overline{A}_{ij} + \frac{1}{3}\overline{g}_{ij}\overline{K}\right) + \left(\overline{D}_i\overline{\beta}_j + \overline{D}_j\overline{\beta}_i\right) .$$

これより

$$\dot{\overline{g}}_{ij} = \psi^4\left[u_{ij} + g_{ij}\partial_t\left(4\log\psi\right)\right] = \overline{u}_{ij} + \overline{g}_{ij}\partial_t\left(4\log\psi\right) , \tag{25}$$

where

$$\begin{aligned}\partial_t\left(4\log\psi\right) &= \frac{2}{3}\left(D_k\beta^k + 6\beta^k\partial_k\log\psi - NK\psi^6\right)\\ &= \partial_t\left(\overline{g}/g\right)^{1/3} = \frac{2}{3}\left(\overline{D}_k\beta^k - \overline{N}K\right) .\end{aligned} \tag{26}$$

すなわち，

$$\boxed{\dot{\overline{g}}_{ij} = \overline{u}_{ij} + \frac{2}{3}\overline{g}_{ij}\left(\overline{D}_k\beta^k - \overline{N}K\right)} \tag{27}$$

となる[6]．

- We see that $\dot{\psi}$ and $\dot{\overline{g}}_{ij}$ are fully determined by the constraints and, from (26).
- the rather obvious conformal invariance of β^k $(=\overline{\beta}^k)$ and the primitive conformal invariance of K $(=\overline{K})$ are fully consistent.

[6]物理系とconformal系の時間発展の関係式 (25)(26)式は，Yorkの定義

$$u_{ij} = \dot{g}_{ij}$$

のままでは正しいが，私の脚注での定義(5)では付加項が必要で，

$$\dot{\overline{g}}_{ij} = \psi^4\left[\dot{g}_{ij} + g_{ij}\partial_t\left(4\log\psi\right)\right] = \overline{u}_{ij} + \overline{g}_{ij}\partial_t\left(4\log\psi\right) , \tag{28}$$

where

$$\partial_t\left(4\log\psi\right) = \frac{2}{3}\left(\overline{D}_k\overline{\beta}^k - \overline{NK}\right) - \frac{2}{3}\left(D_k\beta^k - NK\right) \tag{29}$$

となる．

3 考察

3.1 従来の方法とTS法で何が違うか

1. conformal系で与える変数（既知だと仮定する変数）が違う．
   - 従来．g_{ij}, K, A_{ij}^{TT}で自由度は順に 6, 1, 2.
   - TS法．g_{ij}, K, u_{ij}, Nで自由度は順に6, 1, 5, 1.
2. gauge 変数(lapse, shift)の取扱いが違う．
   - 従来．lapse, shiftは3次元超曲面とは関係ないので無関係.
   - TS法．lapseはconformal変換で関係付けられる．shiftは「解いて」与えられる．
3. momentum constraintの解釈が違う．
   - 従来．Hamiltonian constraintは，conformal factor ψについての式，momentum constraintは，A_{ij}のlongitudinal part (自由度3)を与える式.
   - TS法．Hamiltonian constraintは，conformal factor ψについての式，momentum constraintは，shift β^iを (自由度3)を与える式.
4. トータルの自由度勘定が異なる．
   - 従来．与えるのが9，momentum constraintを解いて3，合わせて12は，3次元メトリック+ ext．curvatureの自由度．lapse, shiftは自由.
   - TS法．与えるのが13，momentum constraintを解いて3，合わせて16は，3次元メトリック+ ext．curvature+lapse+shiftの自由度.
5. Yorkに言わせれば,
   - 従来．メトリックとその正準運動量を与える．Hamiltonian的.
   - TS法．メトリックとその時間微分を与える．Lagragian的.
6. TS法では，解の満たすべき時間発展式が同時に与えられる．

3.2 TS法では何がうれしいのか

1. lapse, shiftをinitial dataで与えるという形式になっている．
2. shiftは解く形ではあるが，lapseが自由に与えられることにより，初期値で用意したデータをスムーズに時間発展させるために数値的なメリットが期待できる．これまでの方法では，初期スライスとその後の lapseの取り方は別物だったが，この方法では整合性がより良くなると期待される[7] ただし，shiftも常に登場してしまうことになるが.
3. これまで「要請」するしかなかったA_{ij}の conformal変換の factorがlapseの関係付けを設定することで「導出」され，すっきりした.
4. 解の時間発展式が，同時に与えられるので，初期値設定の方法に新たな手段をもたらす.
5. これまでの方法では重力波の自由度TTモードが自由に選べたのに対し，TS法では，メトリックの時間微分が自由に選べるようになっているので，特別重力波のモードを取り出して設定することはできない．あるいは必要がない．これは賛否両論だろう．

3.3 TS法では何が不明，不満か

1. momentum constraintが複雑になった. 本当に，数値的に解けるのか？
2. densitized lapseは，時間発展でどう取り扱うのか?
3. weightつきのconformal変換の議論は不必要なのではないか.
4. shiftも自由に設定できるように，以前のように「momentum constraintsは，longitudinal partを解く形」にもどせないか.

[7]例えば，これまでは，初期値は$K = 0$ スライスで時間発展は harmonic slicingなどという組み合わせをしてきたが，それが，初期値がharmonic slicingに適したように，設定できる.