

## 座標条件の選び方（一般論）

### 1 座標条件の選択（一般論）

ここでは座標条件の選択についていくつか紹介する<sup>1</sup>。数値解析を行う際に、どのような超曲面で空間を表現しどのようなslicingで時間発展を追っていくか、は扱う問題によって異なってくるものである。一般に座標条件を決める際に考慮すべき事柄として(1) 特異点の回避, (2) 方程式の簡略化, (3) 重力波の漸近的振舞い, (4) 既知の厳密解との比較, などが挙げられる。

#### 1.1 Lapse conditions

##### 1.1.1 Geodesic slicing

まず最も簡単なlapseの選択方法として

$$\alpha = 1 \quad (1)$$

を常に設定するgeodesic slicingがある。この条件は、さらにshift vectorを恒等的に

$$\beta^i = 0 \quad (2)$$

とおいた「同期化された基準系(synchronous reference system, Gaussian normal coordinate)」としてLandauとLifshitzによって導入されたものである。これらの設定は、幾何学的な意味付けをわかりやすくするだけではなく、発展方程式を明らかに簡単にし、扱いやすくする。しかし、このslicingは計算中に特異点が形成されるような場合、それを回避できない難点がある。また、超曲面の選び方によっては物質の運動には無関係に見かけ上の特異点が発生することがある[5]ので注意を要する。

##### 1.1.2 harmonic-slicing

Fully harmonic slicing 条件とは、

$$\square x^i \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu x^i) = 0 \quad (3)$$

多くのpost-Newtonian展開が、このスライス条件を採用している(要確認)。

数値相対論でのharmonic slicing 条件とは、Bona-Massó [8, 9]らの使った、

$$\square t \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu 0}) = 0 \quad (4)$$

これは、Choquet-Bruhat and York型のhyperbolic systemでも採用されている(要確認)。両者の違いは、Bona-Massó [9]に詳しい。

shiftをzeroとするならば、(4) は、 $\sqrt{-g} = \sqrt{\alpha^2 \det \gamma_{ij}} = \alpha \sqrt{\gamma}$ より、

$$\partial_t (\alpha / \sqrt{\gamma}) = 0 \quad (5)$$

すなわち、

$$\alpha = C(x^i) \sqrt{\gamma} \quad (6)$$

となる。この形からもわかるように(volumeが小さくなると進まない), harmonic sliceは、singularity avoidanceの性質がある。Kerr-Newmannでもharmonic sliceが張れることが示されている[8, 10]。

Geyer-Herold は、Sch時空[16]とOppenheimer-Snyder時空[17] でmaximalとharmonic sliceの比較を試みている。

---

<sup>1</sup>真貝修論付録A2に大幅加筆

### 1.1.3 Maximal slicing

Maximal slicing conditionは

$$K = 0 \quad \text{on } \Sigma(t) \quad (7)$$

の条件を常に満たすように時間発展をさせるものである．この条件は重力崩壊やBlack Holeの衝突などの途中で特異点が発生する計算で，数値解析がその特異点発生とともに中断しないようにするために，提案された．(7)を満たすような $\alpha$ は

$$\frac{\partial}{\partial t} K = \frac{\partial}{\partial t} (K_{ij} \gamma^{ij}) = 0 \quad (8)$$

に発展方程式を代入することにより

$$D^i D_i \alpha = \{ {}^{(3)}R + K^2 + 4\pi G(S - 3\rho_H) - 3\Lambda \} \alpha \quad (9)$$

または，さらにHamiltonian constraintを代入して

$$D^i D_i \alpha = \{ K_{ij} K^{ij} + 4\pi G(S + \rho_H) - \Lambda \} \alpha \quad (10)$$

の線型楕円型微分方程式の解として得られる．重力崩壊で生じる特異点の近くではこの式の右辺の係数は大きくなり，従って $\alpha$ の増加分は小さくなるので超曲面はなかなか特異点には近づかない．これに対し特異点から遠く離れた領域では超曲面はさらに進むことになる． $\alpha = 1$ のslicingでは特異点発生と同時にすべての領域でこの計算は中断してしまうが，maximal slicingでは外部の時空の進展を追うことができるのである．maximalという名はslicing上での超曲面の3次元体積要素 $V = \int \sqrt{\gamma} d^3x$ の法線方向への変化が $K = 0$ にすると最大になることから由来している．

Estabrook *et al.* [12]らはSchwarzschild 時空についてこのslicingで $t \rightarrow \infty$ では $r = 2M$ にあるevent horizonよりも内側の $r = 1.5M$ の範囲まで追えることを解析的に示した．この解析を応用したものに，Maeda[13]によるcharged dust shellへの応用例や，Duncan [?]によるReissner-Nordstöm時空への応用があり，現実の物質を含む重力崩壊においてもmaximal slicingが同様に有効であると期待されている．ただし，遠方での重力波の抽出には適さない，という指摘もある[24]．maximal slicingはこれらのような相対論的な星の計算における漸近的平坦な時空に対しては良いslicingであるが，宇宙論の計算に適用する場合には次のconstant mean curvature slicingを使う方法がよく採られている．

**K-driver** 多分に作為的ではあるが，maximal slicingを数値的に保つために，人工的に粘性項を入れる，というテクニックがある．

$$\frac{\partial K}{\partial t} + c^2 K = 0 \quad (11)$$

where  $c$  is a constant.  $c$ の値を調整することにより，asymptoticにmaximal sliceを実現することができる[15]．解くべき式は，

$$D^i D_i \alpha = \{ K_{ij} K^{ij} + 4\pi G(S + \rho_H) - \Lambda \} \alpha + c^2 K \quad (12)$$

### 1.1.4 Constant mean curvature slicing

Eardley, Smarr[18]は $K \neq 0$ の場合についてさらに考察し，constant mean curvature slicing

$$K = K(t), \quad K = \text{const. on } \Sigma \quad (13)$$

の条件を提案した．このslicingを形成する $\alpha$ は，上と同様に

$$D^i D_i \alpha = \{ K_{ij} K^{ij} + 4\pi G(S + \rho_H) - \Lambda \} \alpha - \frac{\partial}{\partial t} K \quad (14)$$

の方程式を解くことによって決まる．

Brill *et al.* [19]はSchwarzschild時空についてhorizonの内部に興味がある場合， $|K|$ を大きくしていけばいくらかも特異点に近いところまで覆うことができることを示し，Nakao *et al.* [20]はSchwarzschild-de Sitter時空についてもこのslicingが有効であることを述べている．Piran [7]はconstant mean curvature slicingを宇宙論の数値解析に用いたときのmeritを

- 一様な時空になっているのか、近づいているのかの判定が $\alpha$ の各点の大きさを比較することによって可能になる。また、実際に一様な解でも非一様なslicingをとるというpotential gauge ambiguityを避けられる<sup>2</sup>。
- 特異点近くでは $\alpha$ の進み方は遅くなるので特異点には近づきにくく、他の領域ではこれに邪魔されず進展が追える。
- York, O’Murchadhaによる初期値決定のformalismの2つの方程式が分離し、容易になる。

と列挙し、“most suitable”であると述べている。

### 1.1.5 polar-slicing

polar-slicing 条件は、extrinsic curvatureのtransverse partをzeroにする、

$$K_{\theta}^{\theta} + K_{\varphi}^{\varphi} = 0 \quad or \quad K = K_r^r \quad (15)$$

という条件である。Bardeen-Piran (1983) [21]によって、提案された。radial 座標を用いるとき、有効である。

球対称時空では、初期にapparent horizonが無ければ、有限時間の発展でも apparent horizonは発生しない。非球対称時空の場合でも同様の現象が期待されている。

軸対称時空では、polar slice条件は、 $\beta^r$ をsourceに持つ、 $\beta^{\theta}$ の微分方程式として与えられる[22]。

Oppenheimer-Snyder時空に対してpolar sliceを応用した解析がある[23]。Schwarzschild radial 座標を使うとhorizon近辺でspikeが発生してしまうが、isotropic座標ではいい振る舞い（逆に maximal slice+ isotropicだとdiverge）という結果である。

### 1.1.6 conformal-slicing

conformal slicing 条件。3-metricをconformal変換  $\tilde{\gamma}_{ij} = \phi^{-4}\gamma_{ij}$  し、

$$\alpha = \exp\left[-2\left(\hat{\phi} + \frac{\hat{\phi}^3}{3} + \frac{\hat{\phi}^5}{5}\right)\right] \quad (16)$$

where  $\hat{\phi} = \phi - 1$  とする。Shibata-Nakamura (1992) [24] によって提案された。singularity avoidance と asymptotic Schwarzschildの特性があるとされ、Oohara-Nakamura 3Dコードで使われている。

### 1.1.7 algebraic slicing

maximal slicingに限らず、singularity avoidanceの性質を持つようなスライス条件を考え出すことは可能である。Sch時空に限れば、中心部分の発展を止めれば良いわけで、さまざまな形の関数形が提案されている。Bernstein [3] §4.4 に詳しい解説がある。代表的なものに、

$$\alpha = \sqrt{\gamma} \quad (17)$$

$$\alpha = 1 + \log \gamma \quad (18)$$

などがある。 $\gamma$ は、3-metricのdeterminantであるが、3-metricの conformal部分のdeterminantとする一派もある。

### 1.1.8 その他

以上の他、lapseをdensitized したものを基本量とする方がよい、という立場もある。see Anderson-York [25]。

---

<sup>2</sup>証明はされていない。

## 1.2 shift conditions

### 1.2.1 Normal coordinate

まず最も簡単に

$$\beta^i = 0 \quad (19)$$

と設定してしまう方法。「同期化された基準系」でも使われる方法である。発展方程式は明らかに簡単になり扱いやすくなる。また、time slicingで特異点が発生しない限り座標上の特異点が発生しない利点も持つ。

### 1.2.2 Minimal distortion condition, minimal strain condition

Smarr, York [5]は座標一定の軸に沿った観測者に対する時空の歪みの形状のずれを極小にする条件(minamal distortion condition)を提案している。特異点回避を行う限り、座標の引き延ばしが発生するので、それに対応するようなshiftを選んでおこうというのが動機である。

grid stretchingをcongruence  $t^\mu$ に沿ったexpansion tensorで表現することにする。surface (normal方向  $n^\mu$ , すなわち  $t_\mu = \alpha n_\mu + \beta_\mu$ ) 上にprojection する作用素を $\perp$ として、expansion tensorを

$$\Theta_{\mu\nu} = \perp \nabla_{(\nu} t_{\mu)} = -\alpha K_{\mu\nu} + \frac{1}{2} D_{(\mu} \beta_{\nu)} \quad (20)$$

Smarr-York は歪み(distortion)テンソル $\Sigma_{ij}$ を

$$\Sigma_{ij} = \Theta_{ij} - \frac{1}{3} \text{tr} \Theta \gamma_{ij} \quad (21a)$$

$$= -2\alpha \left( K_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} K \right) + \frac{1}{2} \left( D_{(i} \beta_{j)} - \frac{1}{3} D^k \beta_k \gamma_{ij} \right) \quad (21b)$$

と定義し、

$$\delta S[\beta] = \delta \left\{ \frac{1}{2} \int \Sigma_{ij} \Sigma^{ij} d^3 x \right\} = 0 \quad (22)$$

となるような $\beta^i$ を選ぶ、というものである。結果として、求める式は $D^j \Sigma_{ij} = 0$  または、

$$D^j D_j \beta_i + D^j D_i \beta_j - \frac{2}{3} D_i D_j \beta^j = D^j \left[ 2\alpha \left( K_{ij} - \frac{1}{3} \text{tr} K \gamma_{ij} \right) \right] \quad (23)$$

あるいは、

$$\Delta \beta_i + \frac{1}{3} D_i (D^j \beta_j) + R_i^j \beta_j = D^j \left[ 2\alpha \left( K_{ij} - \frac{1}{3} \text{tr} K \gamma_{ij} \right) \right] \quad (24)$$

where  $\Delta = D^i D_i$  となる。

同様にminimal strain conditionとは、 $\Theta^{ij} \Theta_{ij}$ を最小にするようにとる shiftの条件のことである[5]。数値的に両者の差はないようだ (see Bernstein [3])。

### 1.2.3 Shift for horizon locking coordinate

Apparent horizonを境界条件とする座標を取るために、horizonが固定しているような座標を保つ必要性が出てきた。その時に提案されたスライス条件[26]として、次のようなものがある。3-metricを

$$dl^2 = \psi^4 (A d\eta^2 + B d\theta^2 + B \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (25)$$

とする。apparent horizonは、外向き3-vector  $s^a$ を用いて定義されるexpansion

$$\Theta := D_a s^a + K_{ab} s^a s^b - K \quad (26)$$

がzeroになる2次元面で定義される[27]。このとき、[26]では、

“distance freezing” shift  $\partial_t A = 0$ とする。

“area freezing” shift  $\partial_t B = 0$ とする。

“expansion freezing” shift  $\partial_t \Theta = 0$ とする。

などをminimal distortionと共に調べている。

#### 1.2.4 Other conditions

この他のshift vectorの決め方として共動(comoving)座標条件がある。これは物質の空間座標を物質の運動に伴って一定にとるものであり、物質流の4元速度 $u^\mu$ が超曲面 $\Sigma$ に垂直であることから $J^i = 0$ となり、

$$u^\mu = n^\mu, \quad V^i = \frac{u^i}{u^0} = -\beta^i \quad (27)$$

などと決められる。この場合物質の運動の記述は簡単になるが、特異点を避けることはできない。

また、物理的意味は明確ではないが、metric  $\gamma_{ij}$ の形を先に決定し(isotropicとか、diagonalとか)、その形を保つように $\beta^i$ を調整していく方法もある。

### 1.3 Combined coordinate conditions

lapseとshiftを同時に決めてゆこう、という立場もある。

#### 1.3.1 Radiation gauge

電磁気学でのCoulomb gaugeからの類推。解説中。[28]

#### 1.3.2 IBBH problem

IBBH(Intermediate Binary Black Hole)問題[29, 30]として、提案されたもの<sup>3</sup>。これは、「バイナリblack holeの計算をするためには、静止座標の上でblack holeをKepler回転させるのではなく、black holeのKepler回転系に乗った座標で計算するのがよいだろう」という発案にもとづき、lapse and shiftに対する提案をしている。

「co-rotate座標をとり、metricの発展がもっとも緩やかになるように座標条件を考える」というのがpolicyです。アイデアとしては、

$$\mathcal{L}_{\partial_t} \mathbf{g} \simeq 0, \quad (28)$$

where  $\mathcal{L}_{\partial_t} \mathbf{g}$  is the Lie derivative of the spacetime metric  $\mathbf{g}$  with respect to the coordinate system's time generator  $\partial_t$ . となるのですが、これではまだ曖昧。(timelike Killing vectorは、この系では存在しないはず。BHは重力波を放出しながら運動するのでtime symmetricではないから)。そこで、[29] では二つの座標条件を提案しています。

**The Minimal-Strain Lapse and Shift** これは、Smarr and York's [5] による minimal distortion shiftの改訂版らしい。まず、次の actionを定義。

$$I_1[\alpha, \beta_k] = \int d^3x \sqrt{\gamma} \gamma_{ij} \dot{\gamma}^{ik} \gamma^{jl} \dot{\gamma}_{kl}. \quad (29)$$

where  $\dot{\gamma}_{ij} = \partial \gamma_{ij} / \partial t$  (the Lie derivative of  $\gamma_{ij}$  along  $\partial_t$ ).  $\alpha$  and  $\beta_i$ で変分することにより、

$$K^{ij}[-2\alpha K_{ij} + 2D_i \beta_j] = 0, \quad (30a)$$

$$D^j[-2\alpha K_{ij} + 2D_{(i} \beta_{j)}] = 0. \quad (30b)$$

<sup>3</sup>000510 HS IBBH.texの解説あり。

この前者の式は $\alpha$ を $\beta_i$ の関数として与え、後者の式はこれにより、 $\beta_i$ についての式になります。  $\alpha$ を前者の式として与えなくても(例えばmaximal slicing)、後者はminimal strain shift条件を与えるそうで、著者らは、この(30a)(30b)をminimal strain equationと呼んでいます。物理的にはmetricの形とvolumeを保存する、と期待しています。ただ、これがidea通りにいくかどうかは予想の形でしか議論されていません。

**Other Choices of Lapse and Shift** もう一つの提案としては、Lie derivative of the 4-metric along  $\partial_t$  を  $j_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\partial_t} g_{\mu\nu}$  と表し、 $\mathbf{v}$  be some other vector field independent of  $\partial_t$ として  $H_{\mathbf{v}}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + v^\mu v^\nu$ というテンソルを定義して、次のactionを定義。

$$I_2[\partial_t; \mathbf{v}] = \int_{\mathcal{M}} (j_{\mu\nu} H_{\mathbf{v}}^{\mu\rho} H_{\mathbf{v}}^{\nu\sigma} j_{\rho\sigma}) . \quad (31)$$

On varying  $\partial_t$ , while holding  $\mathbf{v}$  and the spacetime metric fixed, we arrive at

$$\nabla_\nu (H_{\mathbf{v}}^{\mu\rho} H_{\mathbf{v}}^{\nu\sigma} j_{\rho\sigma}) = 0 . \quad (32)$$

This is a dynamical system of equations for the lapse and shift.しかし、これ以上の有用な議論はされていない。このBCT gaugeの存在・唯一性をDirichlet境界条件の下に議論した論文[31]もある。

## A ADM 3+1 decomposition

Let the metric in general,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_l \beta^l & \beta_j \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta^j/\alpha^2 \\ \beta^i/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i \beta^j/\alpha^2 \end{pmatrix} \quad (33)$$

where

$$\alpha \equiv 1/\sqrt{-g^{00}}, \quad \beta_j \equiv g_{0j}. \quad (34)$$

The projection operator,  $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu$ , where  $n_\mu = (-\alpha, 0, 0, 0)$  and  $n^\mu = g^{\mu\nu} n_\nu = \frac{1}{\alpha}(1, -\beta^i)$  is the unit normal vector of the spacelike hypersurface.

## References

- [1] L. Smarr, *The structure of GR with a numerical example: The collision of two BHs*, doctoral dissertation, 1975, Univ. of Texas at Austin, Austin, Texas. (not available)
- [2] K.R. Eppley, *The numerical evolution of the collision of two black holes*, doctoral dissertation, 1975, Princeton University, Princeton, New Jersey. (not available)
- [3] D.H. Bernstein, *A numerical study of the BH plus Brill wave spacetime*, doctoral dissertation, 1993, U. of Illinois at Urbana-Champaign, Illinois. (available)
- [4] R. Arnowitt, S. Deser, and C.W. Misner, “The Dynamics of General Relativity”, in *Gravitation: An Introduction to Current Research*, ed. by L.Witten, (Wiley, New York,1962)
- [5] J.W. York,Jr., “Kinematics and Dynamics of General Relativity”, in *Sources of Gravitational Radiation*, ed. by L.Smarr, (Cambridge, 1979) ;  
L.Smarr and J.W.York,Jr., Phys. Rev. D **17**, 2529 (1978)
- [6] N. O’Murchadha and J.W. York,Jr., Phys. Rev. D **10**, 428 (1974)

- [7] T. Piran, “Numerical Relativity and Cosmology”, in *The Early Universe*, ed. by W.G.Unruh and G.W.Semenoff, (NATO Scientific, 1986)
- [8] C. Bona and J. Massó, *Phys. Rev. D* **38**, 3419 (1988).
- [9] C. Bona and J. Massó, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1097 (1992).
- [10] G.B. Cook and M.A. Scheel, *Phys. Rev. D* **56**, 4775 (1997).
- [11] D. Bernstein, D.W. Hobill, and L. Smarr, in *Frontiers in Numerical Relativity*, edited by C.R. Evans, L.S. Finn, and D.W. Hobill (Cambridge Univ. Press, 1989)
- [12] F. Estabrook, H. Wahlquist, S. Christensen, B. DeWitt, L. Smarr, and E. Tsiang, *Phys. Rev. D.* **7**, 2814 (1973).
- [13] K. Maeda, *Prog. Theo. Phys.* **63**, 425 (1980)
- [14] M.J. Duncan, *Phys. Rev. D* **31**, 1267 (1985).
- [15] J. Balakrishna, G. Daues, E. Seidel, W-M. Suen, M. Tobias and E. Wang, *Class. Quant. Grav.* **13**, L135 (1996).
- [16] A. Geyer and H. Herold , *Phys. Rev. D.* **52**, 6182 (1995).
- [17] A. Geyer and H. Herold , *Gen. Rel. Grav.* **29**, 1257 (1997).
- [18] D.M. Eardley, L. Smarr, *Phys. Rev. D* **19**, 2239 (1979)
- [19] D.R. Brill, J.M. Cavallo, J.A. Isenberg, *J. Math. Phys.* **21**, 2789 (1980)
- [20] K. Nakao, T. Nakamura, K. Oohara, K. Maeda, *Phys. Rev. D* **44**, 1326 (1991)
- [21] J.M. Bardeen and T. Piran, *Phys. Rep.* **96**, 205 (1983).
- [22] R. A. d’Inverno, *Class. Quantum Grav.* **12**, L75 (1995).
- [23] L. I. Petrich, S.L. Shapiro, and S.A. Teukolsky, *Phys. Rev. D* **33**, 2100 (1986).
- [24] M. Shibata and T. Nakamura, *Prog. Theor. Phys.* **88**, 317 (1992).
- [25] A. Anderson and J. W. York, Jr., *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1154 (1998).
- [26] P. Anninos, G. Daues, J. Massó, E. Seidel, and W-M. Suen, *Phys. Rev. D.* **51**, 5562 (1995).
- [27] J.W. York, Jr. in *Frontiers in Numerical Relativity*, edited by C.R. Evans, L.S. Finn, and D.W. Hobill (Cambridge Univ. Press, 1989)
- [28] L. Smarr and J.W. York, Jr., *Phys. Rev. D* **17**, 1945 (1978).
- [29] P.R. Brady, J.D.E. Creighton and K. S. Thorne, *Phys. Rev. D* **58**, 061501 (1998).
- [30] K.S. Thorne, gr-qc/9808024, (unpublished)
- [31] D. Garfinkle, C. Gundlach, J. Isenberg, and N. ÓMurchadha *Class. Quant. Grav.* **17** 3899 (2000).