2012 年度前期　微積分学 I（真貝，平嶋，尾形，桑子）　2012 年 8 月 2 日実施　持込許可物　なし

問題 1　〔微分とその応用〕(1)–(4) を求め，(5)–(6) に答えよ．

(1) $y_1 = \dfrac{d}{dx}\left(6 + 5x^4 + \dfrac{3}{x} + 2\sqrt{x}\right)$

(2) $y_2 = \dfrac{d}{dx}\left(e^x + \log x + 2\cos x + \tan x\right)$

(3) $y_3 = \dfrac{d}{dx}\left(x\log x + \dfrac{\sin x}{x}\right)$

(4) $y_4 = \dfrac{d}{dx}\left(\sin^2 x + \sin(x^2)\right)$

(5) ライプニッツの公式：$f(x)$, $g(x)$ に対して

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(f(x)\,g(x)\right) = \sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

を利用して，$y_6 = \dfrac{d^n}{dx^n}(x^2+1)\sin x$ を求めよ．

(6) $y = xe^{-x^2}$ の導関数を求め，増減表を作成し，グラフを描け．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} xe^{-x^2} = 0$ を用いてよい．

問題 2　〔積分とその応用〕(1)–(6) を求め，(7) に答えよ．

(1) $I_1 = \displaystyle\int \left(6 + 5x^4 + \frac{3}{x} + 2\sqrt{x}\right) dx$

(2) $I_2 = \displaystyle\int \left(e^x + 4\sin x + 2\cos x + \tan x\right) dx$

(3) $I_3 = \displaystyle\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

(4) $I_4 = \displaystyle\int x\log x\, dx$

(5) $I_5 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos x\, dx$　　($t = \sin x$ と置換)

(6) $I_6 = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 16}$

(7) 半径 a の円の面積が πa^2 であることを，積分を使って説明せよ．

問題 3　〔級数展開〕関数 $f(x)$ の $x = a$ におけるテーラー展開は，次式で表される．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

また， $x = 0$ のまわりのテーラー展開をマクローリン展開という．

(1) e^x を マクローリン展開して，x の 4 次までの近似式を求めよ．

(2) $\sin x$ を マクローリン展開して，x の 5 次までの近似式を求めよ．

(3) $(1-x)^\alpha$ を x の 2 次までマクローリン展開し，その式を用いて，$\sqrt[3]{0.9}$ を小数第 3 位まで求めよ．

問題 4　〔偏微分〕

(1) 関数 $z(x,y) = e^{2xy}$ の 2 次の偏導関数をすべて求めよ．

(2) 2 変数関数 $z = f(x,y)$ について，$x = u\cos\theta - v\sin\theta,\ y = u\sin\theta + v\cos\theta$ （θ は定数）とするとき，

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

が成り立つことを示せ．