微積分学Ｉ　定期試験　 2015 年度前期

【担当教員】真貝寿明，平嶋洋一，尾形尚子，桑子和幸

【対象学生】情報科学部　全学科　 1 年

【参照許可物】なし

【重要】 答案は，別紙の答案用紙に記入すること．問題用紙は回収しない．
解答は所定の解答欄に記入し，小問題の番号を記載すること．
答案には答えだけではなく，導出の過程も記すこと．

問題 1 〔微分とその応用〕(1)–(6) を求め，(7)–(8) に答えよ．

(1) $y_1 = \dfrac{d}{dx}\left(e^x + 2 + 3x^4 + \dfrac{1}{5x} + 6\sqrt{x}\right)$

(2) $y_2 = \dfrac{d}{dx}(\sin x + 2\cos x + 3\log x)$

(3) $y_3 = \dfrac{d}{dx}\left(x^2 \log x\right)$

(4) $y_4 = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$

(5) $y_5 = \dfrac{d}{dx}(2x+4)^5$

(6) $y_6 = \dfrac{d}{dx}\cos\left(x^2\right)$

(7) ライプニッツの公式：$f(x),\, g(x)$ に対して

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) = (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

を利用して，$y_7 = \dfrac{d^n}{dx^n}(x^2+x)\cos x$ を求めよ．

(8) $y = 2e^{-(x-1)^2}$ の導関数を求め，増減表を作成し，グラフを描け．
ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} 2e^{-(x-1)^2} = 0$ であることを用いてよい．

問題 2 〔積分とその応用〕(1)–(7) を求め，(8) に答えよ．

(1) $I_1 = \displaystyle\int\left(e^x + 2 + 3x^4 + \frac{1}{5x} + 6\sqrt{x}\right)dx$

(2) $I_2 = \displaystyle\int(\sin x + 2\cos x)\,dx$

(3) $I_3 = \displaystyle\int(2x+4)^5\,dx$

(4) $I_4 = \displaystyle\int\frac{1}{\tan x}dx$

(5) $I_5 = \displaystyle\int\frac{x+2}{x(x+1)}dx$

(6) $I_6 = \displaystyle\int_0^{\pi/3}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$
（ヒント $t = \sin x$ と置換）

(7) $I_7 = \displaystyle\int x\log x\,dx$

(8) $y = \cos x$ の $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ の部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．
ヒント．$y = f(x)$ を $\alpha \le x \le \beta$ の区間で，x 軸のまわりに回転させた立体の体積 V は，次式で与えられる．

$$V = \int_\alpha^\beta \pi\,(f(x))^2\,dx$$

$\boxed{\text{問題 3}}$ 〔級数展開〕関数 $f(x)$ の $x=a$ におけるテーラー展開が，次式で表される．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

また，$x=0$ のまわりのテーラー展開をマクローリン展開という．

(1) $f(x) = e^x$ をマクローリン展開せよ．3 次の項までと，n 次の項を記せ．

(2) $g(x) = e^{2x}$ をマクローリン展開せよ．3 次の項まで記せ．

(3) $h(x) = \sqrt{1+x}$ をマクローリン展開して，2 次までの項 (近似式) を記せ．また，求めた近似式を利用して，$\sqrt{10}$ を小数第 2 位まで求めよ．
ヒント．$\sqrt{10} = \sqrt{9\left(1+\dfrac{1}{9}\right)}$ と書ける．

$\boxed{\text{問題 4}}$ 〔偏微分〕2 問を選択して答えよ．

(1) 関数 $z(x,y) = e^{2x}\sin 3y$ の 2 階の偏導関数をすべて求めよ．

(2) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ とするとき，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(3) $z = x - \dfrac{y}{\sqrt{2}}$ とする．ただし，$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\dfrac{t}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right), y = \sin\left(\dfrac{t}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right)$ である．
このとき，$\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ．