

微積分学 I 定期試験 2016 年度前期 2016 年 8 月 1 日

【担当教員】 真貝寿明, 平嶋洋一, 尾形尚子, 桑子和幸

【対象学生】 情報科学部 全学科 1 年

【参照許可物】 なし

【重要】 答えは, 別紙の答案用紙に記入すること. 問題用紙は回収しない.
解答は所定の解答欄に記入し, 小問題の番号を記載すること.
答案には答えだけでなく, 導出の過程も記すこと.

問題 1 [微分とその応用] (1)–(6) を求め, (7)–(8) に答えよ.

$$(1) y_1 = \frac{d}{dx} \left(2e^x + 3 + 4x^5 + \frac{1}{6x} + \sqrt{x} \right) \quad (4) y_4 = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{x+1} \right)$$

$$(2) y_2 = \frac{d}{dx} (2 \sin x + 3 \cos x + \log x) \quad (5) y_5 = \frac{d}{dx} (x^2 + 3)^8$$

$$(3) y_3 = \frac{d}{dx} (x \log x) \quad (6) y_6 = \frac{d}{dx} \log(x^4)$$

(7) ライブニッツの公式: $f(x), g(x)$ に対して

$$\frac{d^n}{dx^n} (fg) = (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

を利用して, $y_7 = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 \cos x)$ を求めよ.

(8) $y = \sqrt{2} x e^{-(x^2 - \frac{1}{2})}$ の導関数を求め, 増減表を作成し, グラフを描け.
ただし, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x e^{-(x^2 - \frac{1}{2})} = 0$ であることを用いてよい.

問題 2 [積分とその応用] (1)–(7) を求め, (8) に答えよ.

$$(1) I_1 = \int \left(2e^x + 3 + 4x^5 + \frac{1}{6x} + \sqrt{x} \right) dx \quad (5) I_5 = \int \frac{x+3}{(x+4)(x+2)} dx$$

$$(2) I_2 = \int (2 \sin x + \cos x) dx \quad (6) I_6 = \int x^2 \log x dx$$

$$(3) I_3 = \int (2x+3)^8 dx$$

$$(4) I_4 = \int \frac{1}{\tan x} dx$$

$$(7) I_7 = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{4 - \sin^2 x} \cos x dx$$

(ヒント $t = \sin x$ と置換)

(8) $y = |\sin x|$ の $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ.

ヒント. $y = f(x)$ を $\alpha \leq x \leq \beta$ の区間で, x 軸のまわりに回転させた立体の体積 V は, 次式で与えられる.

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \pi (f(x))^2 dx$$

問題3 〔級数展開〕関数 $f(x)$ の $x = a$ におけるテーラー展開が、次式で表される。

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

また、 $x = 0$ のまわりのテーラー展開をマクローリン展開という。

- (1) $f(x) = e^x$ をマクローリン展開せよ。3次の項までと、 n 次の項を記せ。
- (2) $g(x) = \sin x$ をマクローリン展開せよ。5次の項まで記せ。
- (3) (2) で求めた近似式を利用して、 $\sin 0.2$ を小数第3位まで求めよ。(小数第4位を四捨五入せよ)

問題4 〔偏微分〕2問を選択して答えよ。

- (1) 関数 $z(x, y) = x \sin 2y$ の2階の偏導関数をすべて求めよ。
- (2) $f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$ とするとき、 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ。
- (3) $z = f(x, y)$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ のとき、次の関係式を示せ。

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$