微積分学 I　定期試験　**2017 年度前期**　2017 年 7 月 31 日

【担当教員】真貝寿明，平嶋洋一，尾形尚子，桑子和幸

【対象学生】情報科学部　全学科　1 年

【参照許可物】なし

【重要】 答案は，別紙の答案用紙に記入すること．問題用紙は回収しない．
解答は所定の解答欄に記入し，小問題の番号を記載すること．
答案には答えだけではなく，導出の過程も記すこと．

問題 1　〔微分とその応用〕(1)–(5) を求め，(6), (7) に答えよ．

(1) $y_1 = \dfrac{d}{dx}\left(1 + 2x^3 + \dfrac{4}{x} + 5\sqrt{x}\right)$

(2) $y_2 = \dfrac{d}{dx}\left(4e^x + 3\sin x + 2\cos x + \log x\right)$

(3) $y_3 = \dfrac{d}{dx}\left(x^3 \log x\right)$

(4) $y_4 = \dfrac{d}{dx}\left(\tan x + \dfrac{1}{\tan x}\right)$

(5) $y_5 = \dfrac{d}{dx}\sqrt{1 - x^2}$

(6) ライプニッツの公式：$f(x)$, $g(x)$ に対して

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) = (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

を利用して，$y_6 = \dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^2 \sin x\right)$ を求めよ．

(7) $y = -xe^{-x^2}$ の導関数を求め，増減表を作成し，グラフを描け．
なお，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}(-xe^{-x^2}) = 0$ である．

問題 2　〔積分とその応用〕(1)–(6) を求め，(7) に答えよ．

(1) $I_1 = \displaystyle\int \left(1 + 2x^3 + \dfrac{4}{x} + 5\sqrt{x}\right) dx$

(2) $I_2 = \displaystyle\int \left(4e^x + 3\sin x + 2\cos x\right) dx$

(3) $I_3 = \displaystyle\int \sin(2x+3)\, dx$

(4) $I_4 = \displaystyle\int \left(\tan x + \dfrac{1}{\tan x}\right) dx$

(5) $I_5 = \displaystyle\int x^3 \log x\, dx$

(6) $I_6 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$
（$x = \sin\theta$ と置換して求めよ）

(7) $y = e^x + e^{-x}$ と x 軸, $x = -1$, $x = 1$ とで囲まれる部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．
ヒント: $y = f(x)$ と x 軸，$x = \alpha$, $x = \beta$ $(\alpha < \beta)$ で囲まれる領域を x 軸のまわりに回転させた立体の体積 V は，次式で与えられる．

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \pi \left(f(x)\right)^2 dx$$

$\boxed{\text{問題 3}}$ 〔級数展開〕関数 $f(x)$ の $x=a$ における級数展開（テーラー展開）が，次式で表される．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

また，$x=0$ のまわりの級数展開をマクローリン展開という．

(1) $f(x) = e^x$ をマクローリン展開せよ．3 次の項までと，n 次の項を記せ．

(2) $g(x) = \cos x$ をマクローリン展開せよ．4 次の項まで記せ．

(3) $h(x) = (1+x)^\alpha$ をマクローリン展開して，2 次までの近似式を求めよ．α は定数とする．

(4) (3) で求めた近似式を利用して，$\sqrt[3]{8.8}$ を小数第 3 位まで求めよ (小数第 4 位を四捨五入せよ)．

$\boxed{\text{問題 4}}$ 〔偏微分〕2 問を選択して答えよ．

(1) 関数 $z(x,y) = e^x \sin 2y$ の 2 階の偏導関数をすべて求めよ．

(2) 関数 $R(x,y) = x^2 + y^2$ において，$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ であるとき，$\dfrac{dR}{dt}$ を求めよ．

(3) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ とするとき，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．