微積分学 I	**真貝寿明** **平嶋洋一** **尾形尚子** **桑子和幸**	**全学科 1 年**	**なし**

【重要】 答案は，別紙の答案用紙に記入すること．問題用紙は回収しない．
解答は所定の解答欄に記入し，小問題の番号を記載すること．
答案には答えだけではなく，導出の過程も記すこと．

問題 1 〔微分とその応用〕(1)–(3) を求め，(4), (5) に答えよ．

(1) $y_1 = \dfrac{d}{dx}\left(x^2 \log x\right)$

(2) $y_2 = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)$

(3) $y_3 = \dfrac{d}{dx}\sqrt{1-4x^2}$

(4) ライプニッツの公式：$f(x)$, $g(x)$ に対して

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) = (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

を利用して，$y_4 = \dfrac{d^n}{dx^n}\left((x^2+x)\sin x\right)$ を求めよ．

(5) $y = e^{-(x-2)^2}$ の導関数を求め，増減表を作成し，グラフを描け．
ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} e^{-(x-2)^2} = 0$ であることを用いてよい．

問題 2 〔積分とその応用〕(1)–(4) を求め，(5) に答えよ．

(1) $I_1 = \displaystyle\int \cos(2x)\,dx$

(2) $I_2 = \displaystyle\int \frac{x+6}{(x+2)(x-2)}dx$

(3) $I_3 = \displaystyle\int x^2 \log x\,dx$

(4) $I_4 = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1-4x^2}\,dx$
（ヒント $2x = \sin t$ と置換）

(5) $y = \dfrac{1}{x+3}$, $x=0$, $x=1$ および x 軸で囲まれた図形を
x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．
ヒント．$y=f(x)$, $x=\alpha, x=\beta$ $(\alpha \leq \beta)$ および x 軸で囲まれた図形を
x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積 V は，次式で与えられる．

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \pi\left(f(x)\right)^2\,dx$$

$\boxed{\text{問題 3}}$ 〔級数展開〕関数 $f(x)$ の $x=a$ におけるテーラー展開が，次式で表される．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

また，$x=0$ のまわりのテーラー展開をマクローリン展開という．

(1) $f(x) = e^x$ をマクローリン展開せよ．3 次の項までと，n 次の項を記せ．

(2) $g(x) = \sin x$ をマクローリン展開せよ．5 次の項まで記せ．

(3) α を定数として，$h(x) = (1+x)^\alpha$ をマクローリン展開せよ．2 次の項まで記せ．

(4) (3) で求めた近似式を利用して，$1.1^{2.4}$ を小数第 3 位まで求めよ．(小数第 4 位を四捨五入せよ)

$\boxed{\text{問題 4}}$ 〔偏微分〕2 問を選択して答えよ．

(1) 関数 $z(x,y) = y\cos 3x$ の 2 階の偏導関数をすべて求めよ．

(2) $f(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$ とするとき，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ を示せ．

(3) $z = f(x,y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のとき，次の関係式を示せ．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$