微積分学 I　定期試験　 2020 年度前期　　 2020.08.25 実施

【担当教員】真貝寿明，平嶋洋一，齋藤洋介
【対象学生】情報科学部　全学科　1 年
【参照許可物】なし
【重要】 答案は，別紙の答案用紙に記入すること．問題用紙は回収しない．
解答は所定の解答欄に記入し，小問題の番号を記載すること．
答案には答えだけではなく，導出の過程も記すこと．

$\boxed{\text{問題 1}}$ 〔微分とその応用〕(1)–(3) を求め，(4), (5) に答えよ．

(1) $y_1 = \dfrac{d}{dx}\left(e^x \sin x\right)$

(2) $y_2 = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$

(3) $y_3 = \dfrac{d}{dx} \log\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)$

(4) ライプニッツの公式：$f(x)$, $g(x)$ に対して

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) = (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

を利用して，$y_4 = \dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^2 e^{-x}\right)$ を求めよ．

(5) $y(x) = x^2 \log x$ の導関数を求め，$x = [0, \infty)$ の範囲で増減表を作成し，グラフを描け．
必要であれば，$e \simeq 2.72$,　$e^2 \simeq 7.39$,　$e^{3/2} \simeq 4.48$,　$e^{1/2} \simeq 1.65$,　$e^{-1/2} \simeq 0.61$,
$e^{-3/2} \simeq 0.22$,　$e^{-2} \simeq 0.14$ を用いてよい．

$\boxed{\text{問題 2}}$ 〔積分とその応用〕(1)–(4) を求め，(5) に答えよ．

(1) $I_1 = \displaystyle\int \sin(4x+5)\,dx$

(2) $I_2 = \displaystyle\int \frac{x+5}{(x+1)(x+3)}dx$

(3) $I_3 = \displaystyle\int x^n \log x\,dx$　　(n: 定数)

(4) $I_4 = \displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,dx$

（ヒント：$x = \sin\theta$ と置換）

(5) カテナリー曲線 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ の，$0 \leq x \leq a$ の長さを求めよ．

ヒント：$y = f(x)$ のグラフの $a \leq x \leq b$ の長さ L は，次式で与えられる．

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$\boxed{\text{問題 3}}$ 〔級数展開〕関数 $f(x)$ の $x=a$ における級数展開（テーラー展開）は，次式で表される．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

また，$x=0$ のまわりのテーラー展開をマクローリン展開という．

(1) $f(x) = e^x$ をマクローリン展開せよ．n 次の項を求めよ．

(2) $g(x) = (1+x)^{1/3}$ をマクローリン展開して，2 次までの項 (近似式) を記せ．また，求めた近似式を利用して，$\sqrt[3]{100}$ $(= \sqrt[3]{125-25})$ を小数第 2 位まで求めよ．

(3) $h(x) = \sin x$ の マクローリン展開を 3 次の項まで記せ．

(4) $\sin x$ も $\tan x$ も $|x| \ll 1$ のときは，$\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$ と近似される．より正確には $\sin x$ と $\tan x$ のどちらがどれだけ大きいか．$x>0$ の場合について論じよ．$\tan x$ のマクローリン展開が，

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$$

であることを既知としてよい．

$\boxed{\text{問題 4}}$ 〔偏微分〕

(1) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ とするとき，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(2) 関数 $z(x,y) = x^2+y^2$, $x(t) = e^{-t}\cos t$, $y(t) = e^{-t}\sin t$ のとき，$\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ．

(3) 点 A (x,y) と，A からわずかに離れた点 B $(x+dx, y+dy)$ の距離 L は，$L^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ より求められる．極座標表示 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ を用いて，点 A を (r,θ)，点 B を $(r+dr, \theta+d\theta)$ とすると，L^2 は

$$(dx)^2 + (dy)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2$$

と対応することを示せ．
ヒント．全微分の対応として，$dx = \dfrac{\partial x}{\partial r}dr + \dfrac{\partial x}{\partial \theta}d\theta$, および $dy = \dfrac{\partial y}{\partial r}dr + \dfrac{\partial y}{\partial \theta}d\theta$ が成り立つことを利用せよ．