**2021 年度前期　微積分学 I（全学科 1 年）　定期試験　2021 年 8 月 2 日**

【担当教員】江口翔一，齋藤洋介，真貝寿明，濱田悦生

【対象学生】情報科学部　全学科　1 年

【参照許可物】なし

**【重要】** 答案は別紙の答案用紙に記入すること．問題用紙は回収しない．
解答順は自由．答案用紙にはどの問題かわかるように記載すること．
答案には答えだけではなく，導出の過程も記すこと．導出の過程にも配点がある．
問題 1 と問題 2 がシラバスの到達目標 (1)(2) に対応 [成績 C または D の判定基準].
問題 3 が到達目標 (3) に対応 [成績 B]．問題 4 が到達目標 (4) に対応 [成績 A].

問題 1 〔微分とその応用〕(1)–(4) を求め，(5) に答えよ．

(1) $y_1 = \dfrac{d}{dx}\left(e^x \log x\right)$

(2) $y_2 = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)$

(3) $y_3 = \dfrac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}$

(4) ライプニッツの公式：$f(x)$, $g(x)$ に対して

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) = (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

を利用して，$y_4 = \dfrac{d^n}{dx^n}\Big((x^2+4)\sin x\Big)$ を求めよ．

(5) $y = xe^{-x^2}$ の導関数を求め，増減表を作成し，グラフを描け．増減表は 1 階微分のものまででよい．また，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} xe^{-x^2} = 0$ を既知としてよい．

問題 2 〔積分とその応用〕(1)–(4) を求め，(5) に答えよ．

(1) $I_1 = \displaystyle\int (4x+5)^3\,dx$

(2) $I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}dx$

(3) $I_3 = \displaystyle\int x^3 \log x\,dx$

(4) $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$

（ヒント：$x = \tan\theta$ と置換）

(5) 半径 $r$ の円の面積 $S$ が $S = \pi r^2$ であることを，積分を使って説明せよ．

$\boxed{\text{問題 3}}$ 〔級数展開〕関数 $f(x)$ の $x=a$ における級数展開（テーラー展開）は，次式で表される．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

また, $x=0$ のまわりのテーラー展開をマクローリン展開という．次のうちから 3 問を選択して答えよ．

(1) $f(x) = \sin x$ をマクローリン展開せよ．5 次までの項を記せ．

(2) $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ をマクローリン展開せよ．$n$ 次の一般項も記せ．

(3) $h(x) = \cosh\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ をマクローリン展開せよ．4 次の項まで記せ．

(4) オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いて，$e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}$ を示せ．

$\boxed{\text{問題 4}}$ 〔偏微分〕 3 問を選択して答えよ．

(1) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ の 2 階の偏導関数をすべて求めよ．

(2) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ とするとき，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(3) 関数 $z(x,y) = x^2 + y^2$ に対して，$\begin{cases} x(t) = e^{-t}\cos t \\ y(t) = e^{-t}\sin t \end{cases}$ のとき，$\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ．

(4) 関数 $z = f(x,y)$ に対して $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ のとき， $z = \tilde{f}(r,\theta)$ とも考えられる．
このとき，次の式を示せ．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$