Differential Equation Final Exam. 2012年1月28日

微分方程式	**真貝寿明** **大島一能**	**IS科IN科1年**	**参照可能物　なし**

【Important】Fill your solutions in the attached answer-sheet. Problem-sheet will not be collected. If there is no more spaces, use the reverse side of the answer sheet. Free for answering order. Do not write only the final answer. Deriving processes will be checked.

$\boxed{\text{問題 } \mathbf{1}}$ （自然現象のモデル化，20点）

Make a differential equation (DE). Define variables, if necessary.

(1) Write a DE for curves of which tangential line has a gradient $\tan x$ at any points on $x-y$ plane?

(2) Write a DE for number of a radiative element which decreases constantly in time?

(3) Write a DE for a system which acceleration decreases in proportion to its velocity.

(4) Write a DE for number of flu infected people that increases in proportion to the square of itself.

次の微分方程式を立てよ．各自で導入した記号には説明をつけること．

(1) xy 平面上の各点で，接線の傾きが $\tan x$ である曲線が満たす微分方程式．

(2) 時間に対して一定の割合で減少していく放射性元素の数を求める微分方程式．

(3) 加速度が，速度に比例した抵抗を受けて減少してゆくことを表す微分方程式．

(4) その時の感染者数の2乗に比例して増加してゆくインフルエンザ感染者数を求める微分方程式．

$\boxed{\text{問題 } \mathbf{2}}$ （基本的な微分方程式，30点）

Find the general solutions of the following differential equations for $y(x)$. Find a special solution, if an initial condition is given.
$y(x)$ に対する次の微分方程式の一般解（初期条件が与えられているものは特殊解）を求めよ．

(1) $y' + 3y = 0,\ \ y(0) = 2$

(2) $y' + 3y = 6e^{3x}$

(3) $y' + 3y = 6e^{-3x}$

(4) $y' + 3y = 10\sin x,\ \ y(0) = 2$

(5) $y'' + 2y' - 3y = 0$

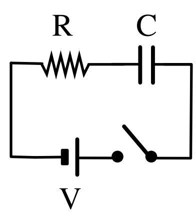
(6) $y'' + 2y' - 3y = 0,\ \ y(0) = 4,\ \ y'(0) = 0$

Choose two of the following three problems. 以下の3問のうち，２問を選択して解答せよ．

$\boxed{\text{問題 } \mathbf{3}}$ （1階微分方程式の応用，25点）

A circuit which has a resister (resistance R) and a capacitor (capacitance C) is turned on with a DC power $V(=\text{constant})$ at time $t=0$. Charge $Q(t)$ on a capacitor obeys the differential equation

$$V = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}.$$



Solve this for $Q(t)$, and draw a graph.
抵抗値 R の抵抗と容量 C のコンデンサで構成されるRC直列回路に，起電力 V（一定）の直流電源を接続し，時刻 $t=0$ でスイッチを入れる．コンデンサに蓄電される電荷の量 $Q(t)$ は，微分方程式

$$\text{起電力} = \sum \text{電圧降下} \quad \text{すなわち} \quad V = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

をみたす．$Q(t)$ を求め，グラフの概形を描け．

$\boxed{\text{問題 }\mathbf{4}}$ （2 階微分方程式の応用，25 点）

A point mass (mass m) is connected horizontally to a spring (spring constant k), and further receives a time-dependent external force $F(t)$. The equation of motion of the point mass is given by

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt} + F(t)$$

where x is the displacement from the balanced point $x = 0$, and c is a constant. Answer the following problems. Exact equations will not be required for (2) and (3).

(1) For $m = 1$, $k = 5$, $c = 4$, $F(t) = 0$, find a solution $x(t)$ and draw a graph by supposing a particular initial data.

(2) For $m = 1$, $k = 5$, $c = 4$, $F(t) = \sin 2t$, what is the movement? Explain with a couple of lines.

(3) For $m = 1$, $k = 4$, $c = 0$, $F(t) = \sin 2t$, what is the movement? Explain with a couple of lines.

水平方向に動くばね（ばね定数 k）につながれた質量 m の物体がある．ばねが自然長のとき，物体の位置を $x = 0$ とすると，運動方程式は，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt} + F(t)$$

となる．ここで，c は空気抵抗の比例定数，$F(t)$ は加える外力である．以下の問いに答えよ．ただし，(2) と (3) は厳密に $x(t)$ を求める必要はない．

(1) $m = 1$, $k = 5$, $c = 4$, $F(t) = 0$ のとき，$x(t)$ を求め，初期値を適当に仮定して，グラフの概形を描け．

(2) $m = 1$, $k = 5$, $c = 4$, $F(t) = \sin 2t$ のとき，どのような運動になるかを数行で述べよ．

(3) $m = 1$, $k = 4$, $c = 0$, $F(t) = \sin 2t$ のとき，どのような運動になるかを数行で述べよ．

$\boxed{\text{問題 }\mathbf{5}}$ （微分方程式の概念，25 点）

(1) Explain the differences between “Ordinary differential equations” and “Partial differential equations”.

(2) Explain what is an initial value problem.

(3) Explain “linear independence of the fundamental solutions” when solving the second-order differential equations.

(1) 「常微分方程式」と「偏微分方程式」の違いを説明せよ．

(2) 「初期値問題」とは何か．説明せよ．

(3) 2 階微分方程式を求める際の「基本解の 1 次独立性」について説明せよ．