微分方程式（1 年）**2017** 年度　期末試験

担当：真貝寿明・大島一能　　対象：**IS** 科 **IN** 科 **1** 年　　参照可能物：なし

【重要】 別紙の答案用紙に記入すること．問題用紙は回収しない．
解答順は自由とするが，答案用紙には，どの問題か分かるように記載すること．
答案には，答えだけではなく導出の過程も記すこと．導出の過程にも配点がある．

問題 1 （自然現象のモデル化，20 点）
次の微分方程式を立てよ．各自で導入した記号には説明をつけること．

(1) xy 平面上の各点で，接線の傾きが $\cos x$ である曲線がみたす微分方程式．
(2) （各時刻の総数に対して）一定の割合で崩壊する放射性元素の数を求める微分方程式．
(3) x 方向の加速度が，原点からの距離に比例し，常に原点方向に向くことを示す微分方程式．
(4) 球形の細胞の半径の時間変化が，表面積に比例して増大する項と体積に比例して減少する項とから成り立つことを示す微分方程式．

問題 2 （基本的な微分方程式，30 点）
$y(x)$ に対する次の微分方程式の一般解（初期条件が与えられているものは特殊解）を求めよ．

(1) $y' - 4y = 0,\ \ y(0) = 2$
(2) $y' - 4y = 8e^{-4x}$
(3) $y' - 4y = 2e^{4x}$
(4) $y' - 4y = 17\sin x$
(5) $y'' - 5y' + 6y = 0$
(6) $y'' - 5y' + 6y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1$

以下の 3 問のうち，2 問を選択して解答せよ．

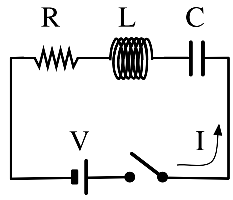
問題 3 （1 階微分方程式の応用，25 点）
雨滴が無限大の速さにならないのは，空気抵抗により減速されるからである．ここでは，空気抵抗が物体の速度 v に比例すると考えよう．すなわち，時間を t，抵抗の比例定数を k，雨滴の質量を m，重力加速度を g とすれば，運動方程式は，鉛直上向きを正として

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv$$

となる．初速をゼロとして速度 $v(t)$ を求めよ．雨滴の終端速度（最終的に一定となる速度）はどうなるか答えよ．

問題 4　（2 階微分方程式の応用，25 点）

抵抗値 R の抵抗，インダクタンス L のコイル，容量 C のコンデンサで構成される RLC 直列回路を考える．V を回路の起電力とすると，キルヒホフの法則により，時間 t を変数にする電流 $I(t)$ に対して次の微分方程式が成り立つ．



$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=\frac{dV}{dt}.$$

R, L, C は正の定数とし，$CR^2<4L$ の関係があるとする．いま，電源として直流電源 $V=$ (一定) をつなぎ，時刻 $t=0$ でスイッチを入れた．この微分方程式の一般解 $I(t)$ を求め，概形をグラフで示せ．

問題 5　（微分方程式の概念，25 点）

(1) $y(x)$ に対して，2 階の定数係数非同次線形常微分方程式の例を 1 つ挙げよ．

(2) 2 階微分方程式の解を求める際の「基本解の 1 次独立性」について説明せよ．

(3) 「一般解」「特殊解」「特異解」の違いを説明せよ．

(4) 次の表は微分方程式の分類である．空欄を次のものから選んで埋めよ．

常微分方程式/偏微分方程式/線形/非線形/同次型/非同次型/数値的な解/解析的な解

	(a)	(b)
(c)	解けるものが結構知られている．	必ず解くことができる．
(d)	解けるものが稀に知られている． 解けるのは特殊な簡単な場合のみ．	解けることが保証されていない． 難しい式は解き方を工夫する必要あり．