

相対性理論

アインシュタインはどこまで正しいのか

1. 序論

2. 特殊相対性理論

時間の進み方は観測者によって異なる

$E=mc^2$, 原子核反応, 星の一生

干渉計

GPS

3. 一般相対性理論

時間の進み方は重力によって異なる

ブラックホール, 重力波

光格子時計

真貝寿明 (しんかい ひさあき)

大阪工業大学 情報科学部 教授

武庫川女子大学 非常勤講師

理化学研究所 客員研究員



<http://www.oit.ac.jp/is/shinkai/>

一般相対性理論 (1915年)



重力の正体は、空間の性質だ

空間のゆがみが
重力の正体だ

重力場の方程式 (アインシュタイン方程式, 1915年)

重力の正体は、時空の歪みである。その関係は、次の式で表される。

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R}_{\text{時空の歪み}} = \frac{8\pi G}{c^4} \underbrace{T_{\mu\nu}}_{\text{質量の分布}}$$

左辺はリーマン幾何学にもとづいて時空がどのように曲がっているのかを表している。右辺は物体がどのように分布しているのかを表す量である。

空間の曲がりモノの運動を決める \Leftrightarrow モノがあると空間が曲がる

アインシュタイン曲率テンソル
<空間の歪み>

エネルギー運動量テンソル
<モノの分布>

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &\equiv \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_{\nu}g_{\beta\mu} + \partial_{\mu}g_{\beta\nu} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu}) \\ R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} &\equiv \partial_{\alpha}\Gamma_{\nu\beta}^{\mu} - \partial_{\beta}\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} + \Gamma_{\sigma\alpha}^{\mu}\Gamma_{\nu\beta}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\beta}^{\mu}\Gamma_{\nu\alpha}^{\sigma} \\ R_{ab} \equiv R^{\mu}_{a\mu b} &\equiv \partial_{\mu}\Gamma_{ab}^{\mu} - \partial_b\Gamma_{a\mu}^{\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^{\mu}\Gamma_{ab}^{\nu} - \Gamma_{\nu b}^{\mu}\Gamma_{a\mu}^{\nu} \\ R &= g^{ab}R_{ab} \end{aligned}$$

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_{\mu}u_{\nu} + pg_{\mu\nu}$$

一般相対性理論(1915年)

● 発端：

1905年の相対性理論では、加速度を扱えなかった。

加速度の正体は何だろうか？

加速度を生じさせる**重力**とは何だろうか？

● ブレークスルー：

エレベータの自由落下で重力が消せる！

だけど、地球の大きさのエレベータでは消せない。

● **アインシュタインの結論：**

重力の正体は時空の歪みである。

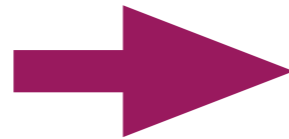
~~~~~

# Einstein方程式を解く = 時空の計量を決めること

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

- (1) 時空の対称性を決める (変数を決める)
- (2) 物質の種類・構成・配置を決める
- (3) 境界条件を決める

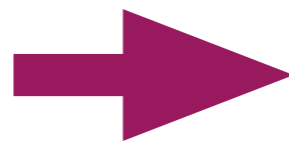
- (1) 球対称・静的
- (2) 真空, 1点だけ質量
- (3) 漸近的平坦



**Schwarzschild解**  
(ブラックホール解)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{a}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

- (1) 球対称
- (2)  $p=p(\rho)$
- (3) 一様等方的時空構造

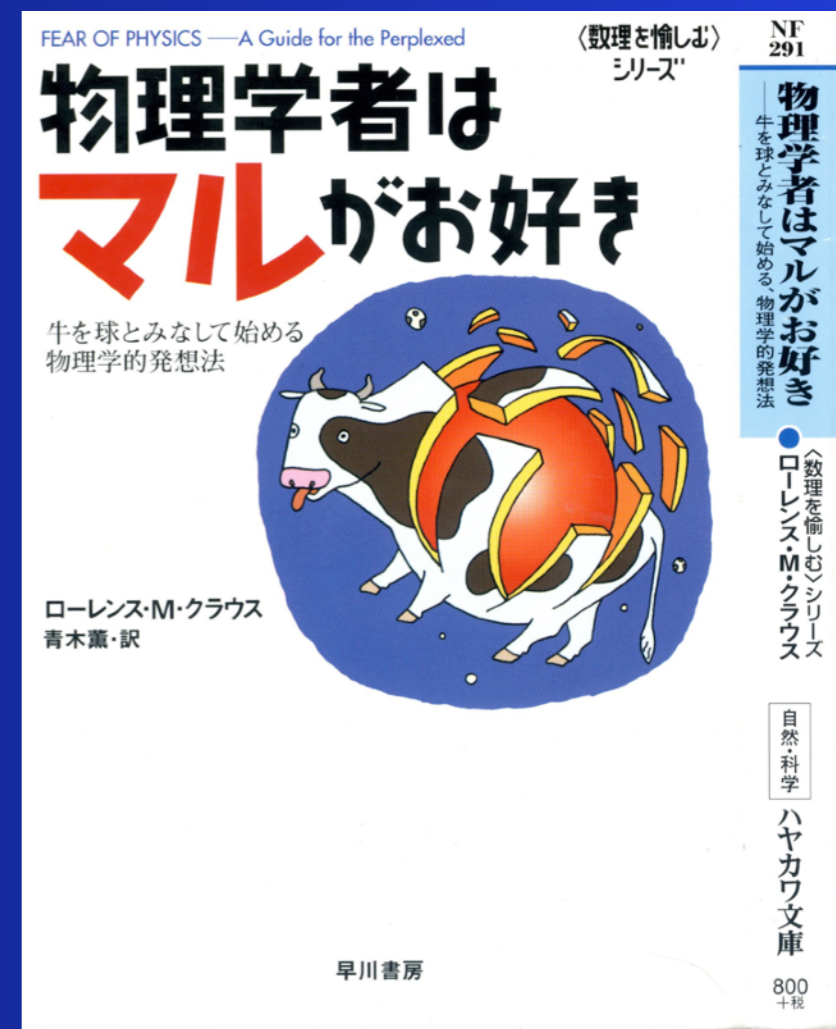
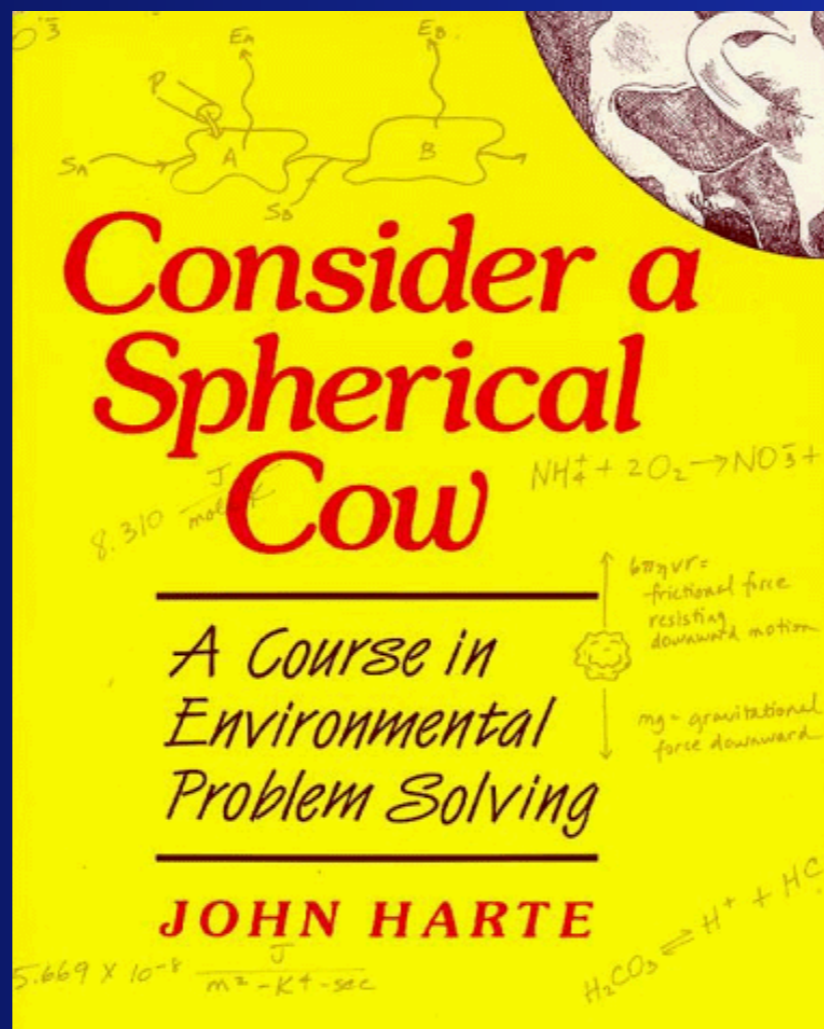


**Friedman解**  
(膨張宇宙解)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right\}$$

# 球対称の牛アプローチ【物理屋の思考回路】

「乳牛の乳の生産量を増やすにはどうしたらよいか」  
(物理学者) 「まず、球対称の牛がいた、と考えよう」

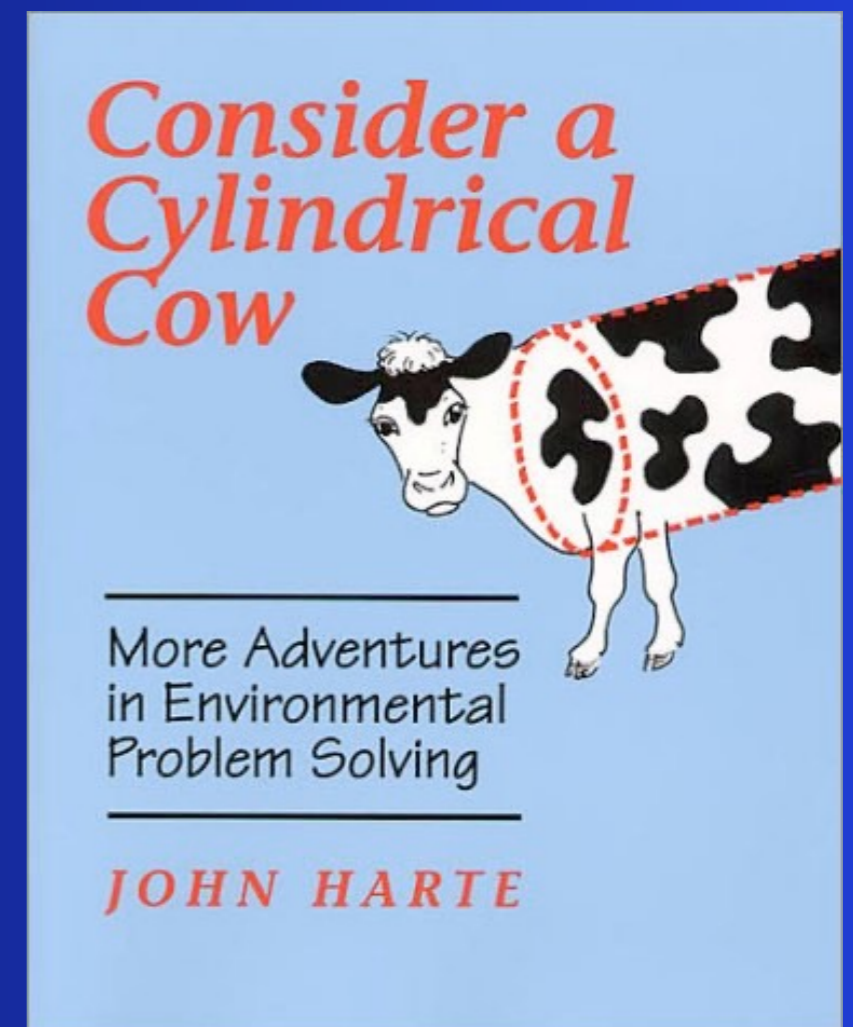
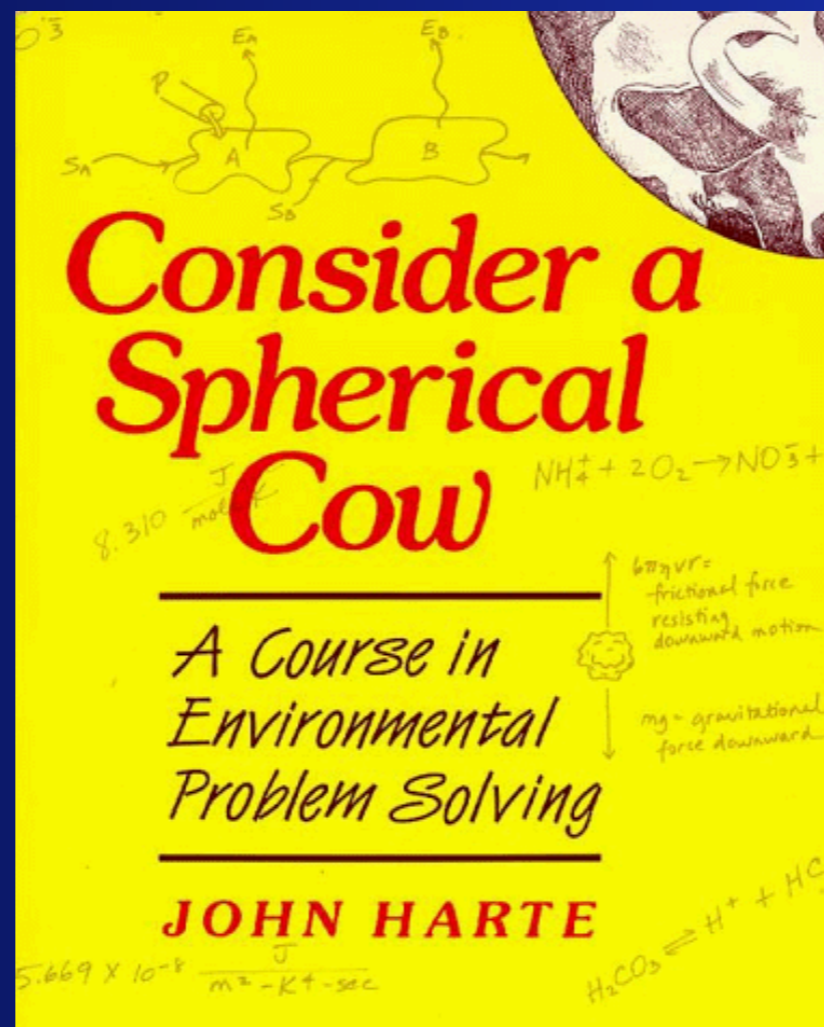


# Lesson 1

## 円筒対称の牛アプローチ【物理屋の思考回路】

「乳牛の乳の生産量を増やすにはどうしたらよいか」

「次に、円筒対称の牛がいた、と考えよう」



# Lesson 1

## ○○対称の牛アプローチ【時空】

「乳牛の乳の生産量を増やすにはどうしたらよいか」

「まず、球対称の牛がいた、と考えよう」

「次に、円筒対称の牛がいた、と考えよう」

「次に、面対称の牛がいた、と考えよう」

「次に、軸対称の牛がいた、と考えよう」



# ブラックホール解 いろいろ

Schwarzschild (1916)

球対称, 真空でのEinstein方程式の厳密解

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

|       | 電荷なし                            | 電荷あり                             |
|-------|---------------------------------|----------------------------------|
| 宇宙項なし | Schwarzschild<br>1916           | Reissner-Nordstrom<br>1916, 1918 |
| 宇宙項あり | Sch-de Sitter<br>(Kottler) 1918 | RN-de Sitter                     |

$$ds^2 = -V(R)dT^2 + \frac{dR^2}{V(R)} + R^2 d\Omega^2$$

$$V(R) = 1 - \frac{2M}{R} + \frac{Q^2}{R^2} - \frac{\Lambda}{3} R^2$$



GRAVITATIONAL FIELD OF A SPINNING MASS AS AN EXAMPLE  
OF ALGEBRAICALLY SPECIAL METRICS

Roy P. Kerr\*

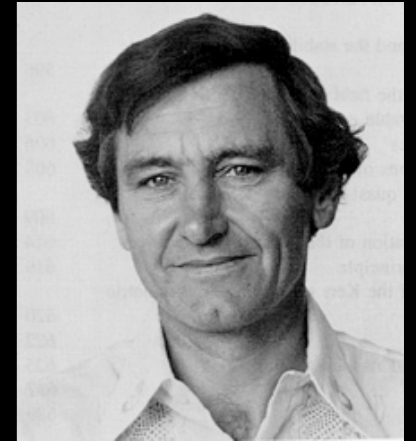
University of Texas, Austin, Texas and Aerospace Research Laboratories, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio  
(Received 26 July 1963)

Kerr (1963)

軸対称, 真空でのEinstein方程式の厳密解

$$ds^2 = -\frac{\Delta_r}{\Sigma\Xi^2} [dt - a \sin^2 \theta d\phi]^2 + \frac{\Sigma}{\Delta_r} dr^2 + \frac{\Sigma}{\Delta_\theta} d\theta^2$$

$$+ \frac{\Delta_\theta \sin^2 \theta}{\Sigma\Xi^2} [(r^2 + a^2)d\phi - a dt]^2$$



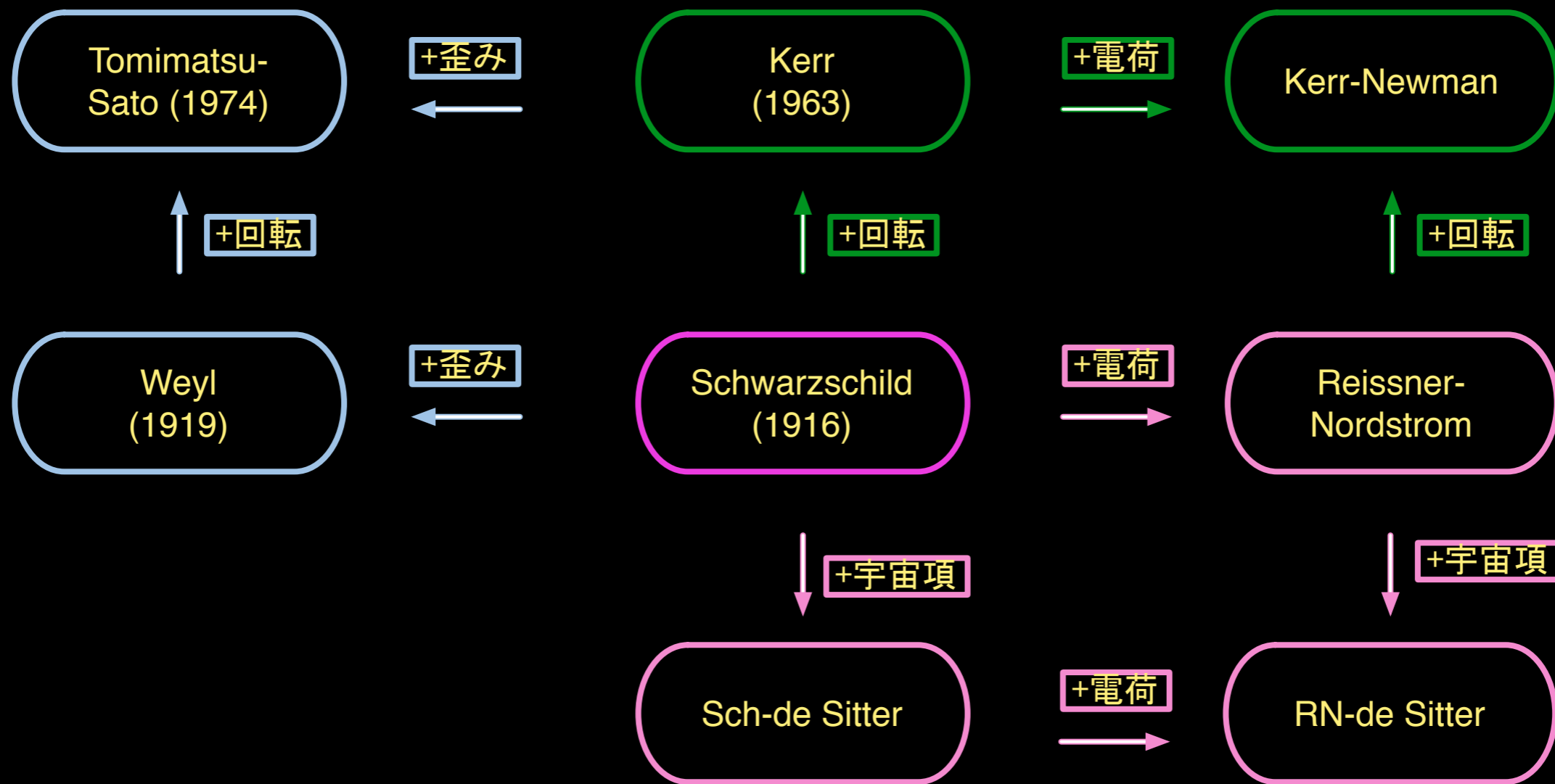
$$\Delta_r = r^2 - 2Mr + a^2$$

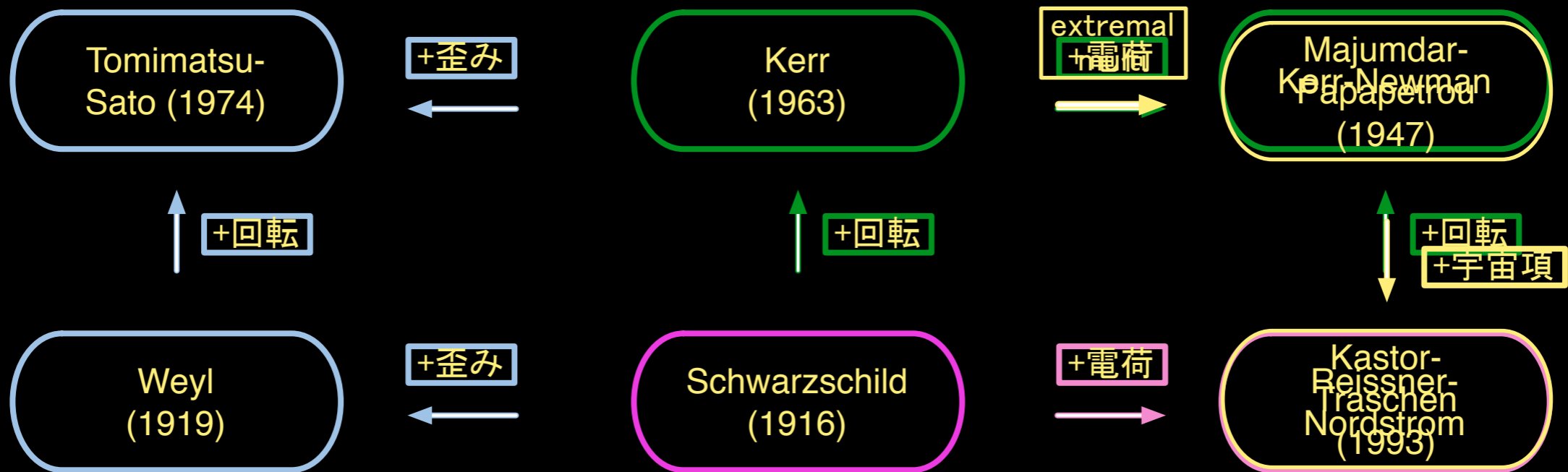
$$\Delta_\theta = 1$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta,$$

$$\Xi = 1$$

|       | 電荷なし           | 電荷あり                |
|-------|----------------|---------------------|
| 宇宙項なし | Kerr<br>1963   | Kerr-Newman<br>1963 |
| 宇宙項あり | Kerr-de Sitter | KN-de Sitter        |





$$ds^2 = -\frac{dt^2}{\Omega^2} + a^2(t)\Omega^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Sch-de Sitter

+電荷

$$\Omega = 1 + \sum_i \frac{M_i}{ar_i}$$

RN-de Sitter

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$$

$$a(t) = e^{Ht}, \quad H = \pm \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$$

# ○○対称の牛アプローチ【時空】

「乳牛の乳の生産量を増やすにはどうしたらよいか」

「まず、球対称の牛がいた、と考えよう」

「次に、円筒対称の牛がいた、と考えよう」

「次に、面対称の牛がいた、と考えよう」

「次に、軸対称の牛がいた、と考えよう」

「次に、歪んだ牛がいた、と考えよう」

「次に、帯電した牛がいた、と考えよう」

「次に、膨張している牛がいた、と考えよう」

「次に、2頭の牛がいた、と考えよう」



# 相対性理論

アインシュタインはどこまで正しいのか

## 1. 序論

## 2. 特殊相対性理論

時間の進み方は観測者によって異なる

$E=mc^2$ , 原子核反応, 星の一生

干渉計

GPS

## 3. 一般相対性理論

時間の進み方は重力によって異なる

ブラックホール, 重力波

光格子時計

真貝寿明 (しんかい ひさあき)

大阪工業大学 情報科学部 教授

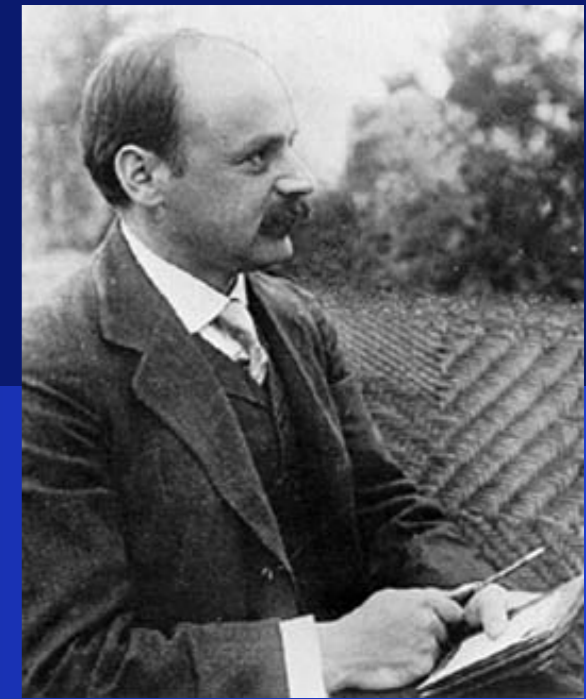
武庫川女子大学 非常勤講師

理化学研究所 客員研究員



<http://www.oit.ac.jp/is/shinkai/>

# アインシュタイン方程式の解 【シュワルツシルド解】



Schwarzschild (1916)  
球対称, 真空での方程式の厳密解

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

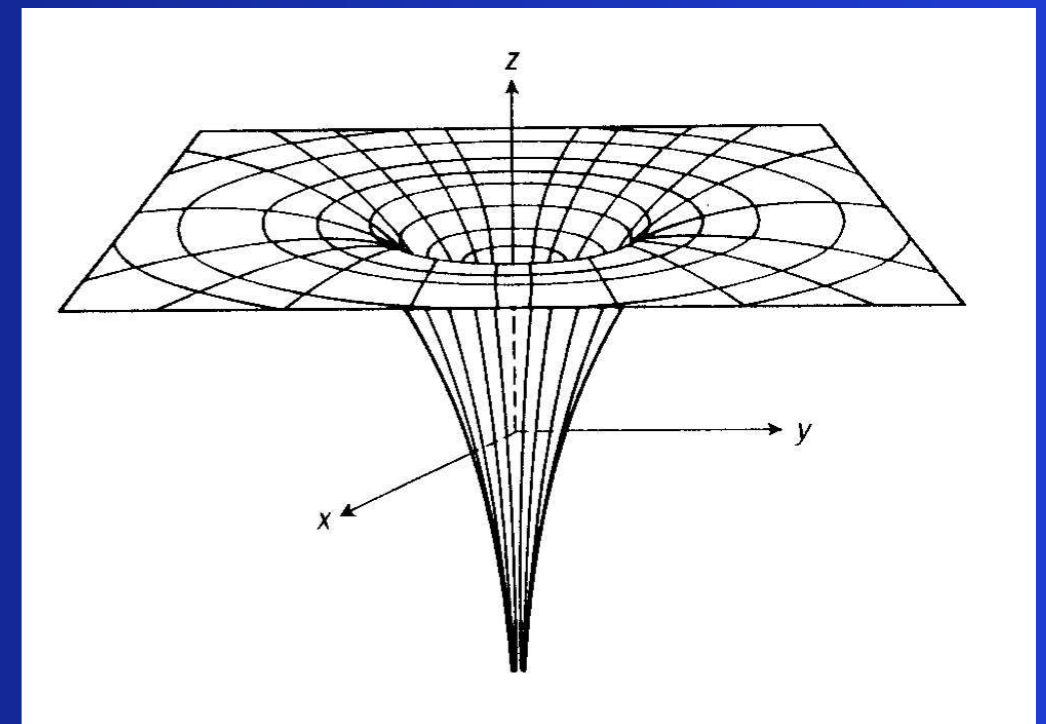
困ったことに, ……

$r=0$  で特異点

⇒ 今でも困ってる

$r=2GM/c^2$  でも特異点

⇒ ブラックホールの境界



# 重力による時間の進み方の違い

質量  $M$  の重力源から距離  $r$  の位置では

$$\Delta T' = \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} \Delta T$$

重力場にいる観測者の時間

静止している観測者の時間

あるいは、重力ポテンシャル  $U$  を用いて

$$\Delta T' = \left(1 - \frac{U}{c^2}\right) \Delta T$$

**\*重力が強いところにいる観測者は時間の進み方が遅い**

- 未来に行くタイムマシンになる：浦島太郎問題
- GPSによる時刻計測に補正が必要になる
- 光格子時計で検証することができる

# 重力による時間の進み方の違い (advanced)

## 2 人工衛星の時計と地上の時計

これまでは、時計の議論は、1次のPN項で十分だとされてきた。理由は、2次の補正が $10^{-16}$ 程度にしかならないから。

- 地球  $M_{\oplus} = 6 \times 10^{24}\text{kg}$ ,  $r_{\oplus} = 6.4 \times 10^6\text{m}$  に対して,  $U/c^2 = 6.94 \times 10^{-10}$ .
- 太陽  $M_{\odot} = 2 \times 10^{30}\text{kg}$ ,  $r_{\oplus\odot} = 1.5 \times 10^{11}\text{m}$  に対して,  $U/c^2 \sim 10^{-8}$ .

地球中心の非回転の座標系では、計量は<sup>1</sup>

$$ds^2 = - \left[ 1 - \frac{2}{c^2}U - \frac{2}{c^4}(\Psi - U^2) + O(c^{-5}) \right] d(ct)^2 + \left[ -\frac{4}{c^3}U_j + O(c^{-5}) \right] d(ct)dx^j + \left[ 1 + \frac{2}{c^2}U + O(c^{-4}) \right] (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (14)$$

固有時間を  $d\tau$  とすれば,  $ds^2 = c^2 d\tau^2$ . また,  $v = dx/dt$  より,

$$d\tau^2 = - \left[ 1 - \frac{2}{c^2}U - \frac{2}{c^4}(\Psi - U^2) \right] dt^2 - \frac{4}{c^4}U_j v^j dt^2 + \frac{1}{c^2} \left[ 1 + \frac{2}{c^2}U \right] v^2 dt^2 = - \left[ 1 - \frac{2}{c^2} \left( \frac{1}{2}v^2 + U \right) - \frac{2}{c^4}(Uv^2 - U^2 + \Psi - 2U_j v^j) \right] dt^2 \quad (15)$$

2nd order Post-Newtonian term

したがって,

$$d\tau = \left[ 1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{1}{2}v^2 + U \right) - \frac{1}{c^4}(Uv^2 - U^2 + \Psi - 2U_j v^j) \right] dt. \quad (16)$$

この式が衛星での時計の刻み  $d\tau$  と基準座標系の座標時間  $dt$  との比を決める。厳密には、衛星と地球上を比較するのなら、両者の固有時間の差になる。



# 浦島太郎問題

## 課題 3.2. 【浦島問題 2】

浦島太郎は、自分の旅立った日と帰還した日を調べると、10日ほどさらに余計に未来にきていることに気がついた。竜宮城にいた11年の間に、地球との時間差10日が生じた理由として、竜宮城が大きな質量の星にあったためではないかと考えた。地球の重力はとても弱く平坦な空間とみなして良いとすれば、式(3.19)に応じた時間差が竜宮城で生じたことになる。

(1) 式(3.19)にて、竜宮城のある星と地球との時間の進み方を比較することにより、比  $a/r$  の値を求めよ。

ここで求めた比  $a/r$  は、相対性理論が有効となるスケールを表すが、ここでは非常に小さい。そのために、地球上の重力と同じような環境が竜宮城での得られていたと考えられる。以後、星の中心からの距離  $r$  を星の半径の位置  $R$  としよう

(2) 竜宮城のある星の質量  $M$  と半径  $R$  の比  $M/R$  を求めよ。

(3) 竜宮城の重力加速度が地球と同じ  $g$  だったとすると、竜宮城のあった星の質量と半径はいくらか。

レポート課題 1

課題2.7

締め切り 金曜正午

レポート課題 2

課題2.9 浦島問題

or

課題2.10 太陽問題

どちらか選択して答えよ

期限：土曜午後1時

レポート課題 3

課題3.2 浦島問題

or

課題3.3 GPS問題

どちらか選択して答えよ

期限：土曜午後1時

# 一般相対性理論の予言【GPS】

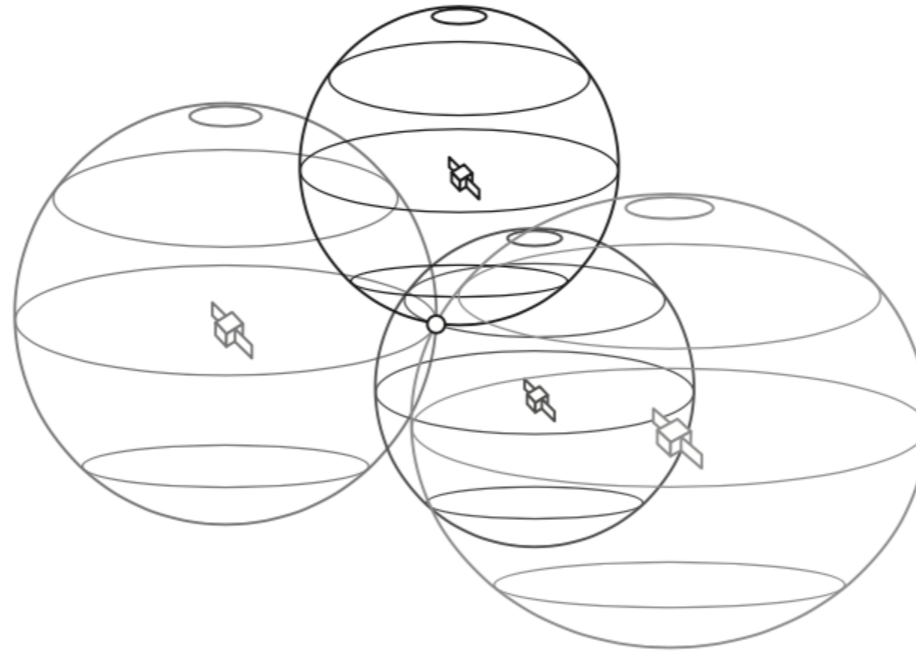
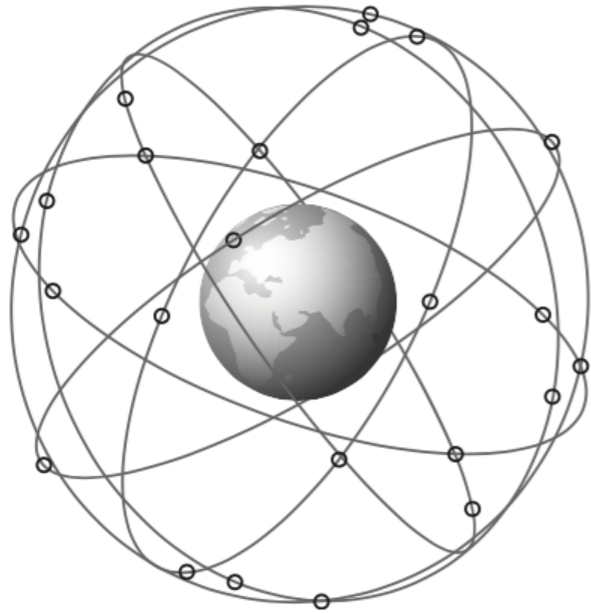


図 3.43 GPS システム. 2 台の GPS 衛星からの電波を使うと重なり合う部分は 1 つの円周上, 3 台からの電波では 3 点に絞られ, 4 台の衛星からの情報を使うと 1 点に絞られる.



正確な位置と時刻の情報を含んだ電波で,

3 角測量 → 精度  $\pm 15\text{m}$

高速飛行の特殊相対論効果と

地球重力の一般相対論効果

⇒ 1 日につき,  $38 \times 10^{-6}$  秒ずつ衛星の  
時計を遅らせる必要あり



一般相対性理論は正しい

### 課題 3.3. 【GPS の時間補正】

まず、特殊相対性理論の効果が、どれだけ影響するのかを考えよう。法則 2.3 にあるように、速度  $v$  で運動する観測者の時計の進み方  $\Delta\tau$  は、静止している人の時間の進み方  $\Delta t$  に対して

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \Delta t \quad (3.15)$$

となる。万有引力定数  $G$  と地球の質量  $M$  の積を  $GM = 3.986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ 、光速  $c$  は  $c = 299792458 \text{ m/s}$  である。

- (1) 地球上にいる人は自転している。赤道上にいる人の自転速度  $v_0$  はいくらか。地球の半径  $R$  は  $R = 6380 \text{ km}$  と自転周期  $T$  は  $T = 24 \text{ hr}$  とする。
- (2) GPS 衛星は、高度  $R_1 = 20184 \text{ km}$  で地球を周回している。速度  $v_1$  はいくらか。
- (3) 静止している座標系での 1 秒は、地表で  $\Delta t_0$ 、GPS 衛星で  $\Delta t_1$  とする、 $\Delta t_0$ 、 $\Delta t_1$  と静止している座標系での 1 秒との差はどれだけか。
- (4) (3) で求めた差が、1 日分蓄積されるとどれだけの差になるか。

次に一般相対性理論の効果が、どれだけ影響するのかを考えよう。地球の重力による時間の進み方  $\Delta T'$  は、浦島効果での説明式 (3.14) にあるように、平坦な時空での時間の進み方  $\Delta T$  に対して

$$\Delta T' = \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} \Delta T \quad (3.16)$$

で与えられる。ここで、 $r$  は天体中心からの距離である。

- (5) 静止している座標系での 1 秒は、地表で  $\Delta T_0$ 、GPS 衛星で  $\Delta T_1$  とする。 $\Delta T_0$ 、 $\Delta T_1$  と静止している座標系での 1 秒との差はどれだけか。
- (6) (5) で求めた差が、1 日分蓄積されるとどれだけの差になるか。

特殊相対性理論の効果と一般相対性理論の効果을合せて考える。

- (7) これらの補正を行わないと、1 日で GPS 測距はどれだけずれるか。

**レポート課題 3**  
**課題3.2 浦島問題**  
**or**  
**課題3.3 GPS問題**  
**どちらか選択して答えよ**  
**期限：土曜午後1時**

# Hafele-Keatingの実験 (1972) : 航空機世界一周での原子時計のずれ

民間機に4台のCs原子時計を搭載して世界1周することにより、高度差および東回り・西回りの違いによって地上に設置した時計との時間差が、一般相対性理論の予言と10%の精度で計測されたことを報告

地球の半径を  $R$ ，回転角速度を  $\Omega$  とし，飛行機の高度を  $h$ ，移動相対速度を  $v$  とする．特殊相対性理論により，動いている物体では時間の進み方が遅くなり，

$$\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \Delta t \simeq \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) \Delta t \quad (2.3)$$

すなわち， $\Delta t_{\text{diff}} \equiv \Delta t' - \Delta t = \frac{v^2}{2c^2} \Delta t$  になる．移動が赤道上だとして，地球の自転に対する相対的な差を考えると，

$$\left(1 + \frac{(R\Omega)^2}{2c^2}\right) \Delta t = \left(1 + \frac{(R\Omega + v)^2}{2c^2}\right) \Delta t' \quad (2.4)$$

すなわち，

$$\Delta t_{\text{diff}} = \left(1 + \frac{(R\Omega)^2}{2c^2}\right) \left(1 - \frac{(R\Omega + v)^2}{2c^2}\right) \Delta t - \Delta t = -\frac{2R\Omega v + v^2}{2c^2} \Delta t \quad (2.5)$$

$v$  は東回りのとき正，西回りのときは負に対応する．実際には高度差  $H$  を考えて，重力赤方偏移の影響を加えると，

$$\Delta t_{\text{diff}} = \left(\frac{gH}{c^2} - \frac{2R\Omega v + v^2}{2c^2}\right) \Delta t \quad (2.6)$$

1周する時間  $\Delta t = 2\pi R/|v|$  に対して生じる時間差は，

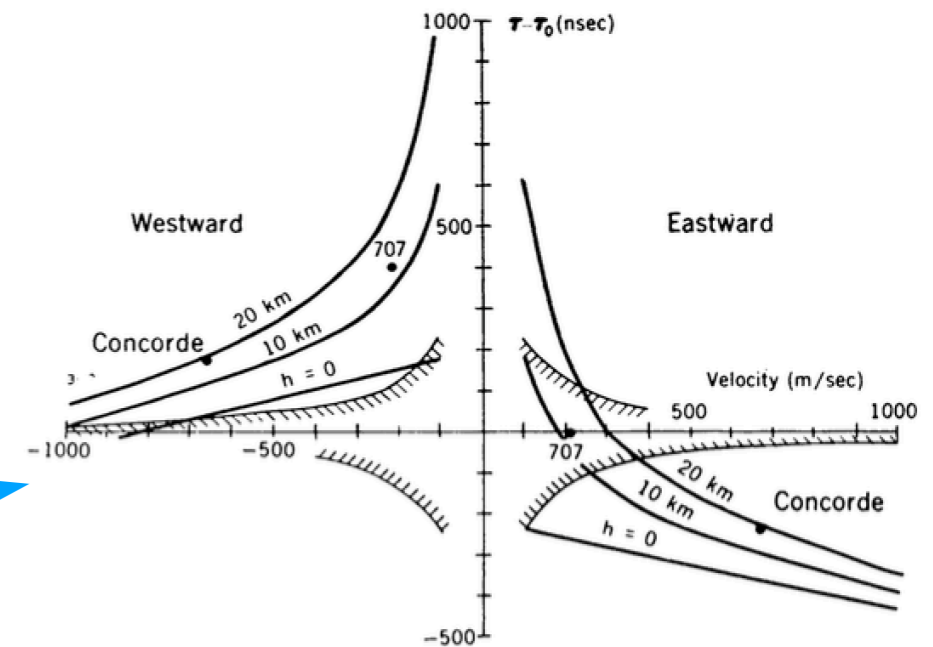
$$\Delta t_{\text{diff}} = \left(\frac{gH}{|v|} - R\Omega \frac{v}{|v|} - \frac{|v|}{2}\right) \frac{2\pi R}{c^2} \quad (2.7)$$

となる．図9は，これをプロットしたもの．緯度  $\lambda$  のところを周回するならば，

$$\Delta t_{\text{diff}} = \left(\frac{gH}{|v|} - R\Omega \cos \lambda \frac{v}{|v|} - \frac{|v|}{2}\right) \frac{2\pi R}{c^2} \quad (2.8)$$

となる．

Hafele-Keating の実験では，東向きの場合の予測値  $-40 \pm 23$  nsec に対して実測値  $-59 \pm 10$  nsec，西向きの場合の実測値  $275 \pm 21$  nsec に対して実測値  $273 \pm 7$  nsec を得ている．



# 重力赤方偏移 検出の原理

星の重力に逆らって光が出てくるとき，その振動数が低下する現象= **重力赤方偏移**  
 光が重力に抗してエネルギーを失う現象とも解釈できる。

振動数変化は，重力場による時間スケールの変化と同じとみなせる。  $c = f\lambda$



アインシュタインの等価原理によれば，重力場中の実験と等加速度運動する実験は区別されない。  
 そのために，重力赤方偏移の検証は，異なる慣性座標系での実験比較をすることに相当する。等価原理の検証になる。

## 高度差 H でのエネルギー差

光子のエネルギー

$$E = h\nu$$

質量エネルギー

$$E = mc^2$$

光子の慣性質量

$$m = \frac{h\nu}{c^2}$$

$$\Delta E = \frac{h\nu}{c^2} gH$$

$$\Delta E = h\Delta\nu$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{g}{c^2} H = \frac{9.8\text{m/s}^2}{9.0 \times 10^{16}(\text{m/s})^2} H \text{ m}$$

## 重力赤方偏移 検出の原理

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{g}{c^2} H = \frac{9.8\text{m/s}^2}{9.0 \times 10^{16} (\text{m/s})^2} H \text{m} = 1.09 \times 10^{-16} H$$

- $H = 10\text{m}$  で  $10^{-15}$  程度の振動数変化
- $H = 450\text{m}$  (スカイツリー展望台) ならば  $4.91 \times 10^{-14}$  程度の振動数変化

$g$  に高さ依存性をもたせて,  $g(H) = \frac{GM}{(R+H)^2} = \left(\frac{R}{R+H}\right)^2 g(0)$  とすると,

地上との周波数差の比は,  $\frac{\Delta\nu}{\nu} \Big|_H = \frac{g(0)}{c^2} H \left(1 + \frac{H}{R}\right)^{-2}$  を用いると,

- ISS の高度 ( $H = 400\text{km}$ ) では,  $g_{\text{ISS}} = 8.694 \text{ m/s}^2$
- GPS の高度 ( $H = 20184\text{km}$ ) では,  $g_{\text{GPS}} = 0.565 \text{ m/s}^2$
- 静止衛星高度 ( $H = 35786\text{km}$ ) では,  $g_{\text{geo}} = 0.224 \text{ m/s}^2$

- $\frac{\Delta\nu}{\nu} \Big|_{\text{ISS}} = 3.86 \times 10^{-11}$
- $\frac{\Delta\nu}{\nu} \Big|_{\text{GPS}} = 1.27 \times 10^{-10}$
- $\frac{\Delta\nu}{\nu} \Big|_{\text{geo}} = 8.92 \times 10^{-11}$
- $\frac{\Delta\nu}{\nu} \Big|_H$  は,  $H = 6370\text{km}$  で最大値をとる.

### 局所位置不変性 (LPI: Local Position Invariance) の検証

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = (1 + \alpha) \frac{U}{c^2}$$

- Pound-Rebka による重力赤方偏移の観測 ( $\alpha \simeq 10^{-2}$ )
- Cs 原子時計を地上と航空機で地球一周して測定した実験 ( $\alpha \simeq 2 \times 10^{-4}$ )
- 水素メーザー周波数を地上と高度 10000km のロケットで測定した実験 ( $\alpha \simeq 2 \times 10^{-4}$ )

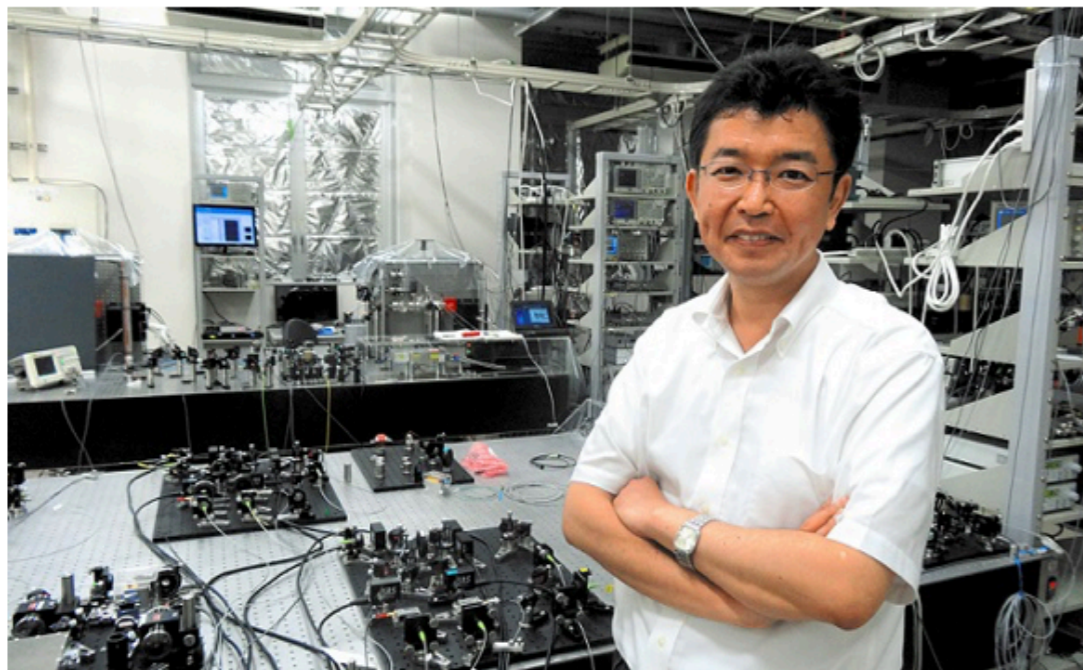
---

### 課題 3.4. 【地球表面重力での時間の遅れ】

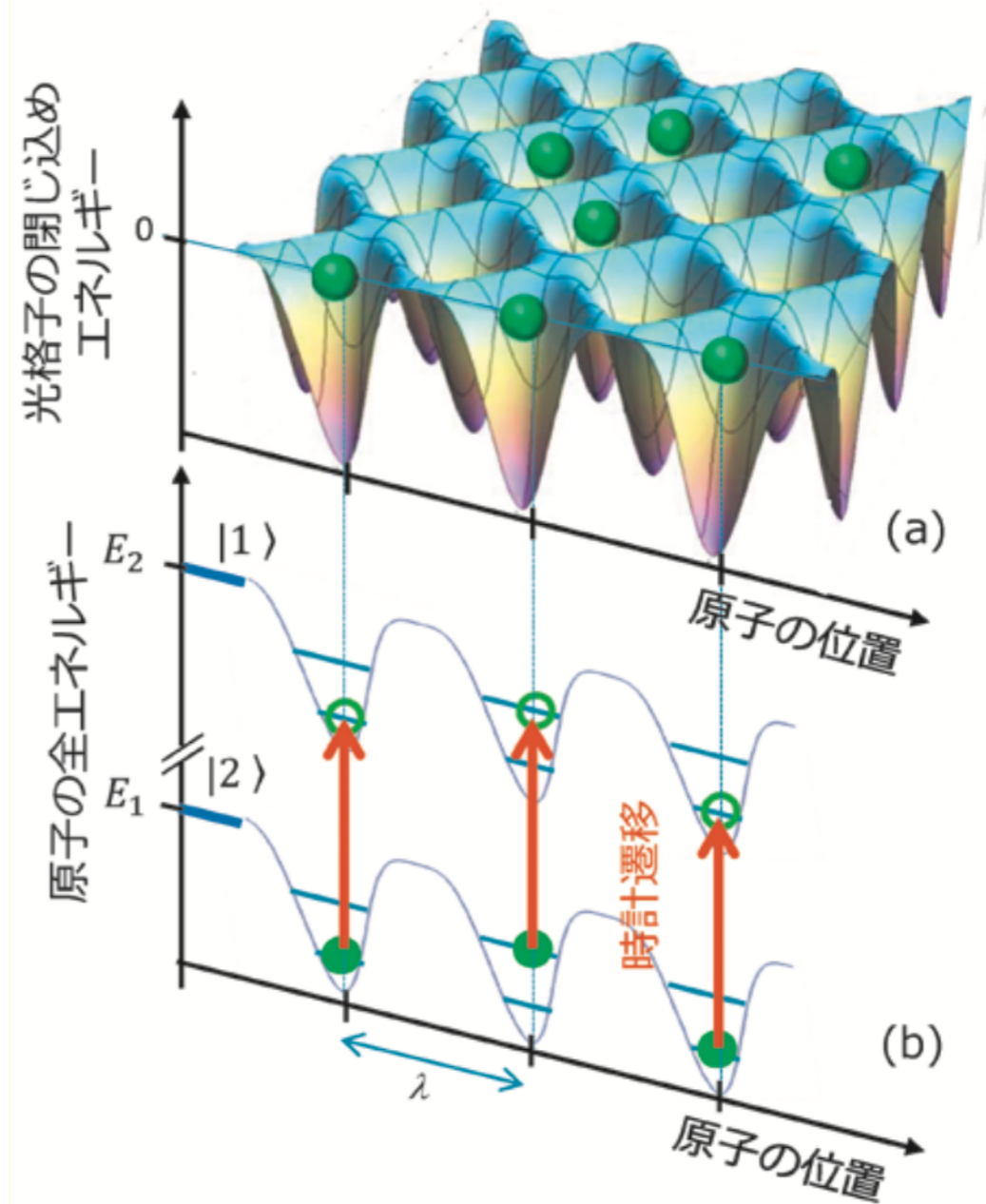
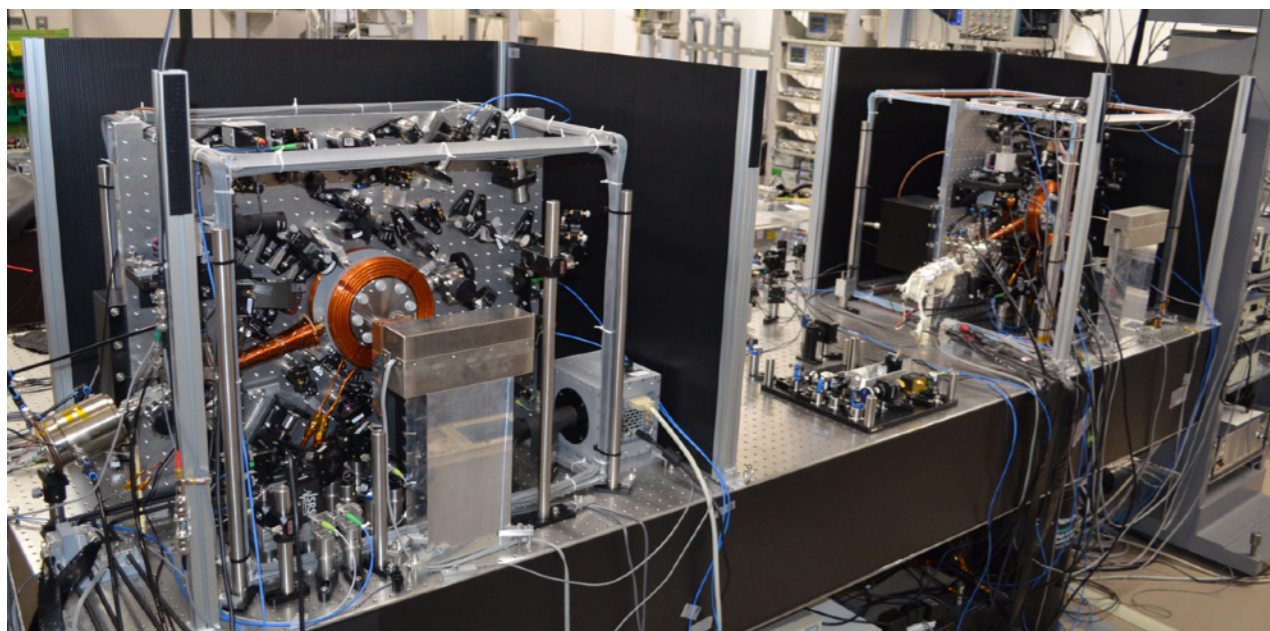
一般相対性理論によれば、重力ポテンシャル  $U(r) = GM/r$  における時間の進み方は、重力のないところの時間刻み幅  $dt$  に対して、 $(1 - \frac{U}{c^2})dt$  となる。地球表面での 1 cm の高度差がもたらす時間の進み方の違いはどれだけか。

---

# もっとも精密な時計＝光格子時計



光格子時計を開発した香取秀俊東京大学教授  
兼理化学研究所招聘主任研究員＝2013年7月  
31日、田中郁也撮影



$10^{-18}$  の精度を実現  
(300億年ですれは1秒以内)

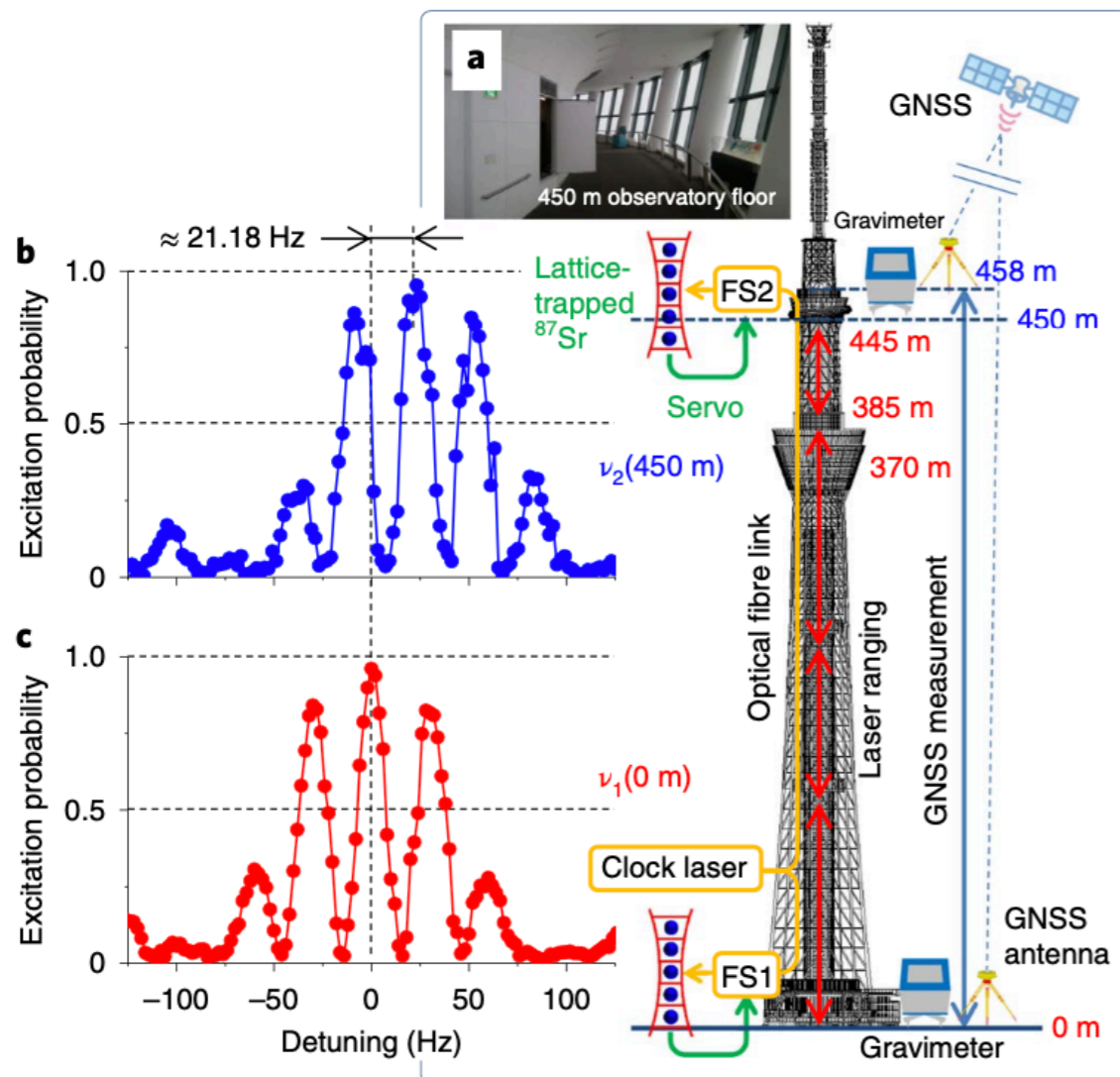


# スカイツリーの上下で時間の進み方が違う

アインシュタインの相対性理論によれば、  
重力の強いところでは時間の進み方が遅くなる

地上と450mの展望台に光格子時計を設置して検証

図 6: 東京スカイツリーでの一般相対論検証実験の概要。地上階と展望台に設置した2台の可搬型光格子時計を光ファイバーでつなぎ、周波数比較を行った。一方、2台の時計の標高差を従来の測量手法（GNSS 測量およびレーザー測距）によって計測した。時計遷移を分光して得られたスペクトルでは、標高差 450 メートルに相当する約 21 ヘルツの周波数シフトが観測された。



Nature Photonics, 14 (2020) 411

nature  
photonics

LETTERS

<https://doi.org/10.1038/s41566-020-0619-8>

Check for updates

## Test of general relativity by a pair of transportable optical lattice clocks

Masao Takamoto<sup>1,2</sup>, Ichiro Ushijima<sup>3</sup>, Noriaki Ohmae<sup>1,2</sup>, Toshihiro Yahagi<sup>4</sup>, Kensuke Kokado<sup>4</sup>, Hisaaki Shinkai<sup>5</sup> and Hidetoshi Katori<sup>1,2,3</sup>✉

# スカイツリーの上下で時間の進み方が違う

アインシュタインの相対性理論によれば、  
重力の強いところでは時間の進み方が遅くなる

地上と450mの展望台に光格子時計を設置して検証

1週間の計測。平均して、差が

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = (49337.8 \pm 4.3) \times 10^{-18}$$

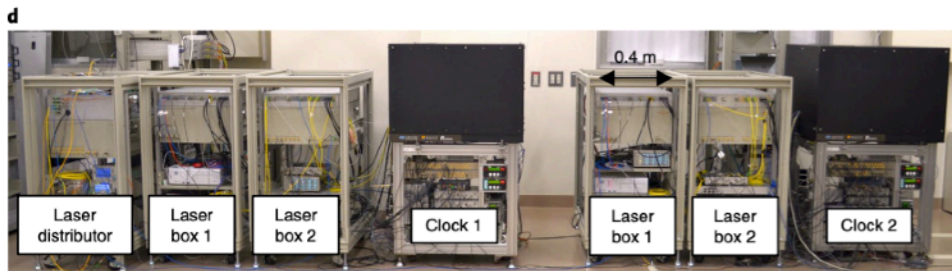
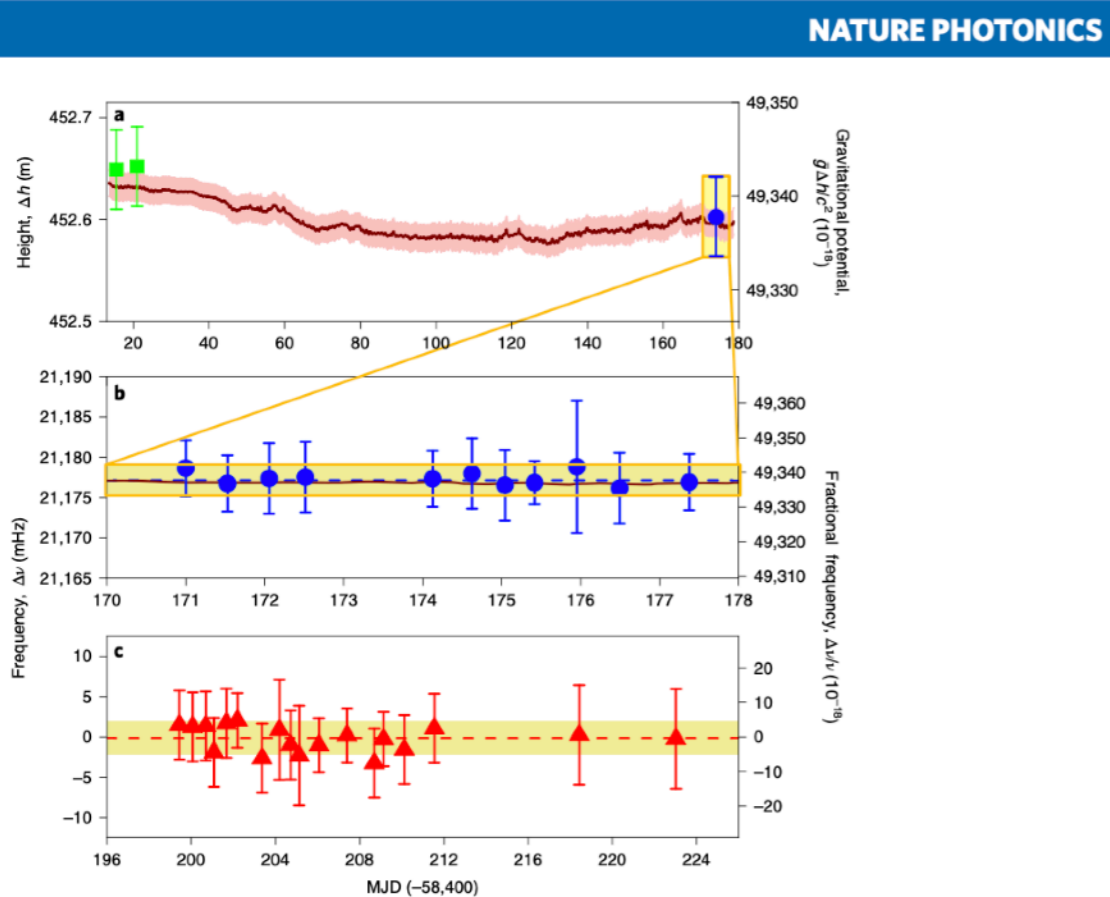
レーザー測距では

$$\frac{g\Delta h}{c^2} = (49337.1 \pm 1.4) \times 10^{-18}$$

相対性理論の正しさを

$$(1.4 \pm 9.1) \times 10^{-5}$$

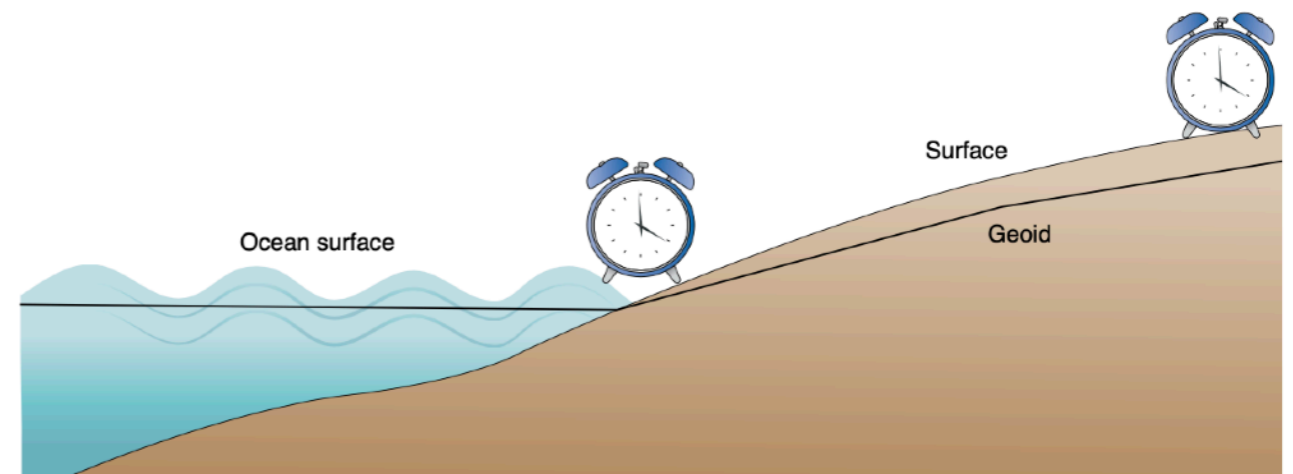
の精度で検証したことになる



# もっとも精密な時計＝光格子時計

冷蔵庫サイズの時計で、高度差450mを±数cmで測定できる。

光格子時計の社会実装に向けた大きな一歩。今後、地殻変動や火山活動の監視など、相対論的測地技術の実用化が期待される。



**Fig. 1 | Illustration of how in the future relativistic geodesy might be done with clocks.** The geoid is an equipotential surface of the Earth's gravitational potential, indicated by the black line. While the mean ocean surface is closely aligned with the geoid, the surface of land can significantly differ. Placing one clock at sea level and one at an inland location allows to determine the geoid height via a frequency comparison between the clocks.

K.Bongs & Y.Singh, Nature Photonics 14 (2020) 408

### 課題 3.5. 【地球の重力 1】

地球上の重力は、地球中心方向を向く万有引力と、地球の自転による遠心力との合力である。地球は完全な球であるとして、半径を  $R$ 、質量を  $M$ 、万有引力定数を  $G$ 、自転の角速度を  $\omega$  とする。

北緯  $\theta$  の地表のある点を  $A$  とする。点  $A$  は、地球の自転軸から距離  だけ離れているので、この半径で円運動をしている。この面を点  $A$  が動く「自転面」と呼ぶことにしよう。点  $A$  において、質量  $m$  の物体にはたらく遠心力の大きさは  であり、その向きは自転面上で自転軸から外向きである。

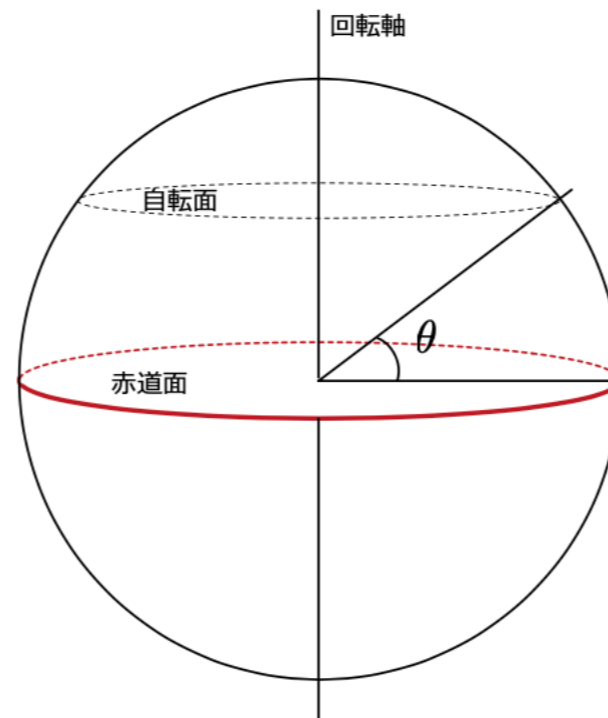
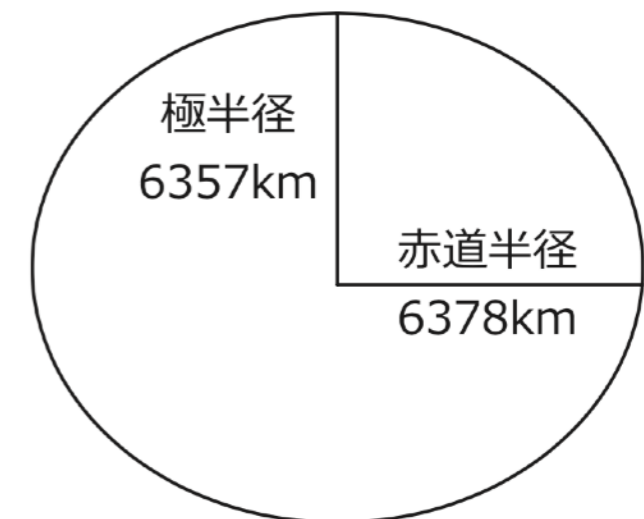


図 3

## 球対称

一方で地球が物体におよぼす万有引力は、地球の形状が球で密度分布が球対称のときは全質量が中心の一点に集中していると考えて良い。したがって、この物体にはたらく万有引力の大きさは  であり、その向きは地球の中心方向内向きである。

- (1) 自転軸上の北極点で体重計で  $m$  [kg] と表示された人がいる。(体重計の表示は重力の大きさを示しているので  $m$  [kgf] と示しているのが正しい)。この人が赤道面で体重計に載るとどう表示されるか。
- (2) 地球の半径として極半径  $R_p = 6356.752$  km を用い、地球質量を  $5.972 \times 10^{24}$  kg、万有引力定数を  $6.67428 \times 10^{-11}$  [N · m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>]、1 日を 87600s とする。北極点で 100 kg と表示された人は、赤道面ではどう表示されるか。
- (3) 地球の半径として赤道半径  $R_E = 6378.137$  km を用い、他の数値は (2) と同じとする。北極点で 100 kg と表示された人は、赤道面ではどう表示されるか。

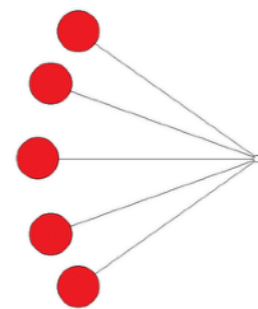
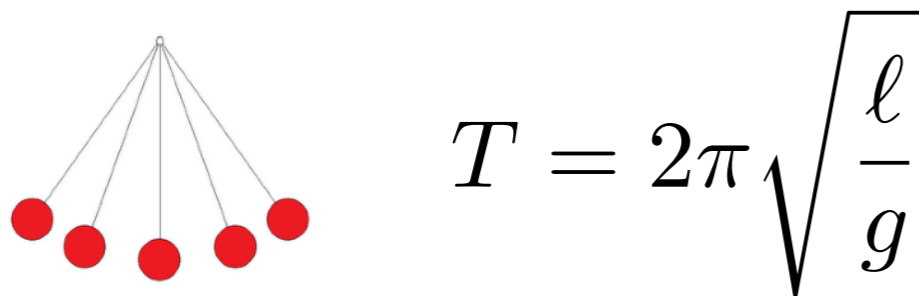


### 課題 3.6. 【地球の重力 2】

地球の形状は、完全な球であるとする。

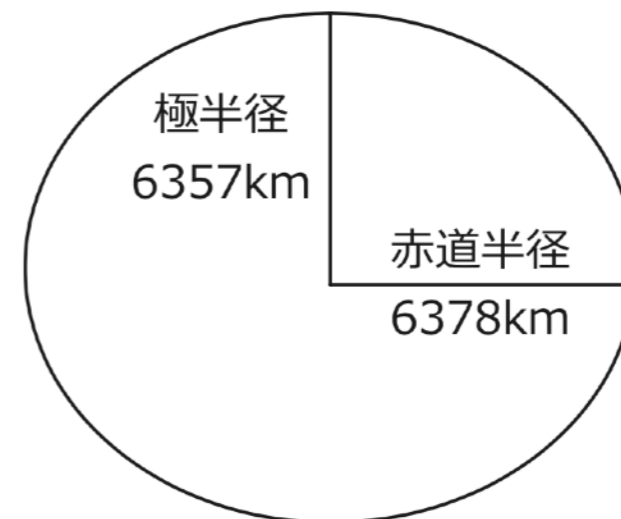
- (4) 赤道面で周期が 1s の振りこ時計を製作する。ひもの支点からおもりの重心までの長さはいくらか。
- (5) この振りこ時計を北極点で計測すると、周期は何秒か。

赤道付近では振りこの周期が長い



地球の自転で、遠心力あり。  
重力加速度  $g$  は少し小さくなる。

しかし、計算が合わない...



1735/36年、子午線の長さの測量実施。  
地球が扁平であることが確かめられる。

### 課題 3.7. 【地球の重力 3】

地球を楕円体と考えよう．つまり，極半径  $R_P$  と赤道半径  $R_E$  をそれぞれ短半径・長半径とする楕円

$$\frac{x^2}{R_E^2} + \frac{z^2}{R_P^2} = 1$$

を  $z$  軸のまわりに回転してできる立体であるとする．

- (6) 地心緯度が  $\theta$  であるような地表面上の点 A での，地球自転の回転半径  $R_\theta$  はどう表されるか．
- (7) また，この位置での地球中心からの距離  $R_0$  を求めよ．

地心北緯  $\theta$  の地表面 A における重力の大きさを求めよう．地球の中心を O とし，地球は楕円体であり，地心北緯  $\theta$  での自転半径を  $R_\theta$ ，地球中心からの距離を  $R_0$  とする．

- (8) 万有引力と遠心力の合力の大きさと地理緯度  $\theta_g$  (図 23) を求めよ．

東京スカイツリーの位置は地心北緯は 35.7 度である．

- (9)  $R_\theta$ ,  $R_0$ , 重力加速度の大きさ  $g$  を求めよ．また， $\theta_g$  と  $\theta$  のちがいはいくらか．
- (10) 建築物は鉛直方向に造られているとする．東京スカイツリーの展望台（鉛直方向で地表から 450 m）の，地表面からの距離を求めよ．

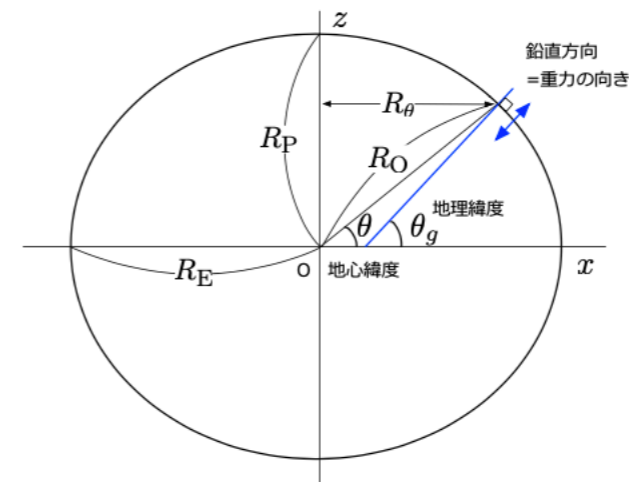


図 4

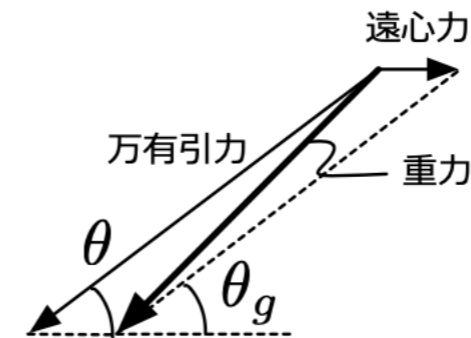


図 5

# 重力ポテンシャルを測定する

- ★ Newton 力学では重力ポテンシャルは「概念」  
一般相対性理論では固有時の進み方の違いをもたらす「計測対象」
- ★ 重力に関する3つの量（重力勾配, 重力の大きさ, 重力ポテンシャル）のうち重力ポテンシャルそのものを測定する計器はない。光格子時計のような精密な時計があれば可能になる。
- ★ 「固有時比較による方法」と「振動数比較による方法」
- ★ 応用：重力ポテンシャル測量, ポテンシャル差の多点同時測定

## ★ 「固有時比較による方法」

## ★ 「振動数比較による方法」

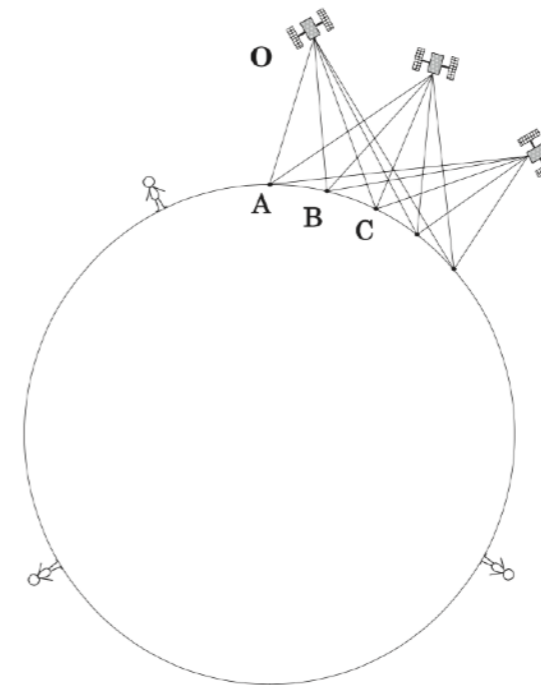
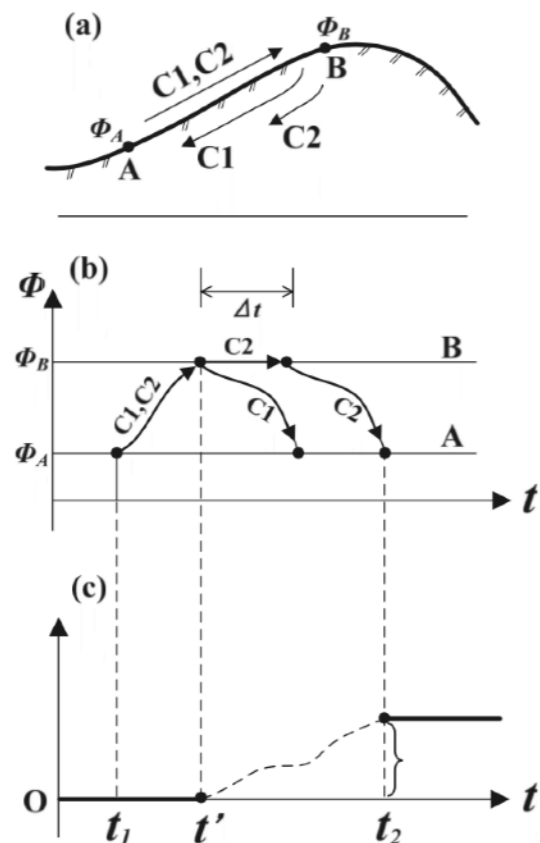


図-4 固有時遅延の多点同時観測模式図（振動数比較による方法）

## 2 人工衛星の時計と地上の時計

HSメモ 2016/10

これまでは、時計の議論は、1次のPN項で十分だとされてきた。理由は、2次の補正が $10^{-16}$ 程度にしかないから。

- 地球  $M_{\oplus} = 6 \times 10^{24}\text{kg}$ ,  $r_{\oplus} = 6.4 \times 10^6\text{m}$  に対して,  $U/c^2 = 6.94 \times 10^{-10}$ .
- 太陽  $M_{\odot} = 2 \times 10^{30}\text{kg}$ ,  $r_{\oplus\odot} = 1.5 \times 10^{11}\text{m}$  に対して,  $U/c^2 \sim 10^{-8}$ .

地球中心の非回転の座標系では、計量は<sup>1</sup>

$$ds^2 = - \left[ 1 - \frac{2}{c^2}U - \frac{2}{c^4}(\Psi - U^2) + O(c^{-5}) \right] d(ct)^2 + \left[ -\frac{4}{c^3}U_j + O(c^{-5}) \right] d(ct)dx^j + \left[ 1 + \frac{2}{c^2}U + O(c^{-4}) \right] (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (14)$$

固有時間を  $d\tau$  とすれば,  $ds^2 = c^2d\tau^2$ . また,  $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$  より,

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= - \left[ 1 - \frac{2}{c^2}U - \frac{2}{c^4}(\Psi - U^2) \right] dt^2 - \frac{4}{c^4}U_jv^j dt^2 + \frac{1}{c^2} \left[ 1 + \frac{2}{c^2}U \right] v^2 dt^2 \\ &= - \left[ 1 - \frac{2}{c^2} \left( \frac{1}{2}v^2 + U \right) - \frac{2}{c^4}(Uv^2 - U^2 + \Psi - 2U_jv^j) \right] dt^2 \end{aligned} \quad (15)$$

したがって,

$$d\tau = \left[ 1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{1}{2}v^2 + U \right) - \frac{1}{c^4}(Uv^2 - U^2 + \Psi - 2U_jv^j) \right] dt. \quad (16)$$

この式が衛星での時計の刻み  $d\tau$  と基準座標系の座標時間  $dt$  との比を決める。厳密には、衛星と地球上を比較するのなら、両者の固有時間の差になる。

$$\frac{U}{c^2} \sim \frac{mg\Delta h}{c^2} \sim m[\text{kg}]\Delta h[\text{m}] \times 10^{-16}$$



## 2 人工衛星の時計と地上の時計

HSメモ 2016/10

これまでは、時計の議論は、1次のPN項で十分だとされてきた。理由は、2次の補正が $10^{-16}$ 程度にしかないから。

- 地球  $M_{\oplus} = 6 \times 10^{24}\text{kg}$ ,  $r_{\oplus} = 6.4 \times 10^6\text{m}$  に対して,  $U/c^2 = 6.94 \times 10^{-10}$ .
- 太陽  $M_{\odot} = 2 \times 10^{30}\text{kg}$ ,  $r_{\oplus\odot} = 1.5 \times 10^{11}\text{m}$  に対して,  $U/c^2 \sim 10^{-8}$ .

地球中心の非回転の座標系では、計量は<sup>1</sup>

$$ds^2 = - \left[ 1 - \frac{2}{c^2}U - \frac{2}{c^4}(\Psi - U^2) + O(c^{-5}) \right] d(ct)^2 + \left[ -\frac{4}{c^3}U_j + O(c^{-5}) \right] d(ct)dx^j + \left[ 1 + \frac{2}{c^2}U + O(c^{-4}) \right] (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (14)$$

固有時間を  $d\tau$  とすれば,  $ds^2 = c^2d\tau^2$ . また,  $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$  より,

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= - \left[ 1 - \frac{2}{c^2}U - \frac{2}{c^4}(\Psi - U^2) \right] dt^2 - \frac{4}{c^4}U_jv^j dt^2 + \frac{1}{c^2} \left[ 1 + \frac{2}{c^2}U \right] v^2 dt^2 \\ &= - \left[ 1 - \frac{2}{c^2} \left( \frac{1}{2}v^2 + U \right) - \frac{2}{c^4}(Uv^2 - U^2 + \Psi - 2U_jv^j) \right] dt^2 \end{aligned} \quad (15)$$

したがって,

$$d\tau = \left[ 1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{1}{2}v^2 + U \right) - \frac{1}{c^4}(Uv^2 - U^2 + \Psi - 2U_jv^j) \right] dt. \quad (16)$$

この式が衛星での時計の刻み  $d\tau$  と基準座標系の座標時間  $dt$  との比を決める。厳密には、衛星と地球上を比較するのなら、両者の固有時間の差になる。

2nd order Post-Newtonian term

### 3 Poisson 方程式の解

任意の質量分布  $\rho(\mathbf{r}')$  によって生じる重力ポテンシャル  $U(\mathbf{r})$  は, Poisson 方程式

$$\Delta U = -4\pi G\rho(\mathbf{r}') \quad (17)$$

によって決定され,

$$U = G \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (18)$$

となる.  $r$  と  $r'$  のなす角を  $\Theta$  とすれば,

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \Theta). \quad (19)$$

$$U(\mathbf{r}) = \frac{GM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n (C_{nm} \cos m\varphi + S_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta) \right\} \quad (24)$$

# The Development and Analysis of Geopotential Coefficient Models to Spherical Harmonic Degree 360

RICHARD H. RAPP AND NIKOLAOS K. PAVLIS

*Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus*

The GEM-T2 potential coefficient model (incomplete to degree 50) has been combined, in a least squares sense, with 30 arc min mean anomalies, to obtain an adjusted set of coefficients and gravity anomalies. The adjusted anomalies were then harmonically analyzed to yield a set of potential coefficients to degree 360. The 30 arc min mean anomalies were estimated from terrestrial gravity data, from altimeter-derived anomalies, and from  $1^\circ \times 1^\circ$  terrestrial anomalies where such data were available. For areas devoid of gravity information, the anomalies were computed in two ways: (1) from the GEM-T2 coefficients and (2) from the GEM-T2 coefficients to degree 36 plus coefficients implied by a topographic/isostatic model. These "fill-in" anomalies led to two potential coefficient models: OSU89A and OSU89B. The new models were checked in several ways including satellite orbit residual analysis, Geosat undulation comparisons, and Global Positioning System (GPS)/leveling undulation differences. The orbit fits (carried out by NASA) showed improvement over GEM-T2. After correction for sea surface topography, orbit error, and permanent tidal effects, the geoid undulations from the OSU89B model have an RMS discrepancy with the Geosat-implied undulation of  $\pm 59$  cm over a complete 17-day exact repeat cycle. The comparisons with GPS information indicate the accuracy of the computation of a relative undulation is of the order of 3-4 ppm of the distance between stations. The new models represent a substantial improvement over previous high-degree expansions.

1度x1度の精度でmapするために、  
36位の展開係数を決めた

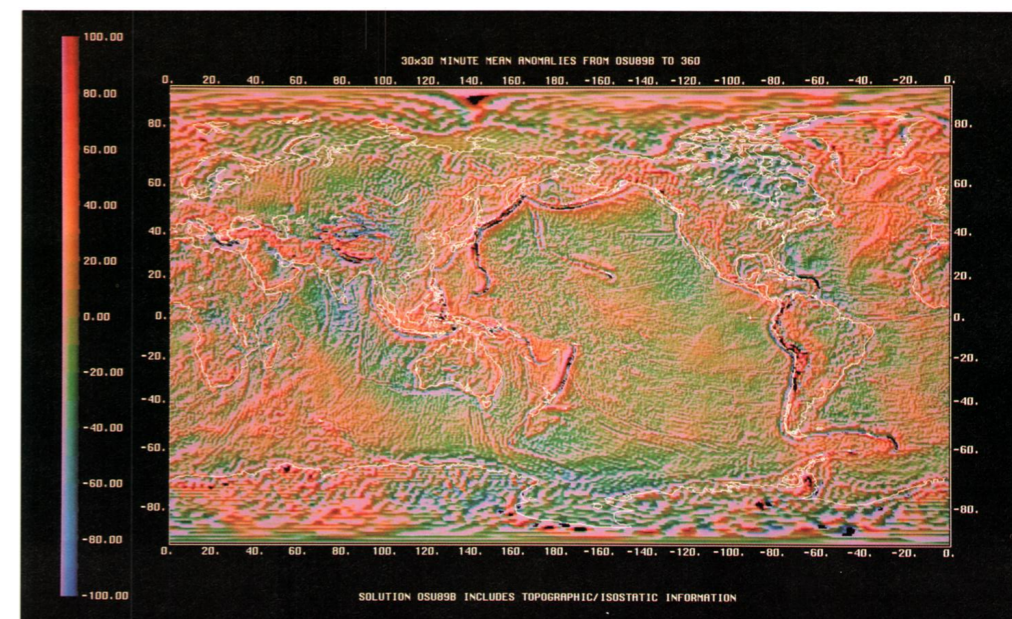


Plate 1. Display of 30 arc min gravity anomalies from OSU89B using light shining from the northwest.

$$U(\mathbf{r}) = \frac{GM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n \left( \frac{R}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\varphi + S_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta) \right\} \quad (24)$$

## A geopotential model from satellite tracking, altimeter, and surface gravity data: GEM-T3

F. J. Lerch, R. S. Nerem, B. H. Putney, T. L. Felsentreger, B. V. Sanchez, and J. A. Marshall

Space Geodesy Branch, NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland

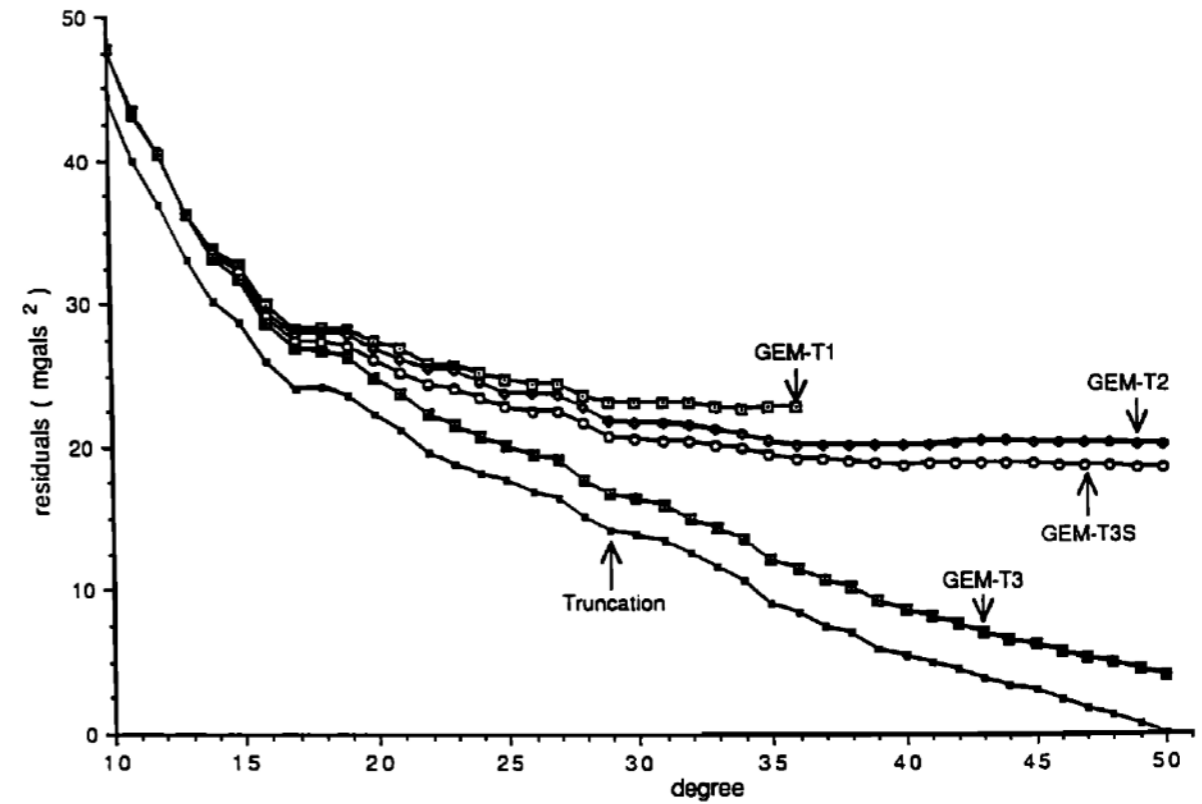
S. M. Klosko, G. B. Patel, R. G. Williamson, D. S. Chinn, J. C. Chan, K. E. Rachlin, N. L. Chandler, J. J. McCarthy, S. B. Luthcke, N. K. Pavlis, D. E. Pavlis, J. W. Robbins, and S. Kapoor

Hughes STX Corporation, Lanham, Maryland

E. C. Pavlis

Department of Astronomy, University of Maryland, Greenbelt, Maryland

**Abstract.** An improved model of Earth's gravitational field, GEM-T3, has been developed from a combination of satellite tracking, satellite altimeter, and surface gravimetric data. GEM-T3 provides a significant improvement in the modeling of the gravity field at half wavelengths of 400 km and longer. This model, complete to degree and order 50, yields more accurate satellite orbits and an improved geoid representation than previous Goddard Earth Models. GEM-T3 uses altimeter data from GEOS 3 (1975-1976), Seasat (1978) and Geosat (1986-1987). Tracking information used in the solution includes more than 1300 arcs of data encompassing 31 different satellites. The recovery of the long-wavelength components of the solution relies mostly on highly precise satellite laser ranging (SLR) data, but also includes TRANET Doppler, optical, and satellite-to-satellite tracking acquired between the ATS 6 and GEOS 3 satellites. The main advances over GEM-T2 (beyond the inclusion of altimeter and surface gravity information which is essential for the resolution of the shorter wavelength geoid) are some improved tracking data analysis approaches and additional SLR data. Although the use of altimeter data has greatly enhanced the modeling of the ocean geoid between 65°N and 60°S latitudes in GEM-T3, the lack of accurate detailed surface gravimetry leaves poor geoid resolution over many continental regions of great tectonic interest (e.g., Himalayas, Andes). Estimates of polar motion, tracking station coordinates, and long-wavelength ocean tidal terms were also made (accounting for 6330 parameters). GEM-T3 has undergone error calibration using a technique based on subset solutions to produce reliable error estimates. The calibration is based on the condition that the expected mean square deviation of a subset gravity solution from the full set values is predicted by the solutions' error covariances. Data weights are iteratively adjusted until this condition for the error calibration is satisfied. In addition, gravity field tests were performed on strong satellite data sets withheld from the solution (thereby ensuring their independence). In these tests, the performance of the subset models on the withheld observations is compared to error projections based on their calibrated error covariances. These results demonstrate that orbit accuracy projections are reliable for new satellites which were not included in GEM-T3.



**Figure 5.** Gravity model comparison with 1071 5° x 5° Seasat altimeter gravity anomalies. Anomalies are corrected for truncation error above degree 50 with high degree and order gravitational field of Rapp and Cruz (1986). The truncation error above degree 50 is 2.32 mGal.

50位の展開係数を決めた

$$U(\mathbf{r}) = \frac{GM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n \left( \frac{R}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\varphi + S_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta) \right\} \quad (24)$$

表 9.1 次数, 位数が (8,8) までの, 地球の重力ポテンシャルの球面調和展開係数. もととなった Lerch ら (1994) では, もっと多数の係数セットが決められている. それぞれの  $(l, m)$  について, 式 (9.6) や付録 C で定義された  $\bar{C}_l^m$  と, その下に  $\bar{S}_l^m$  を,  $10^{-6}$  を単位として与えている.

| $l \setminus m$ | 0        | 1      | 2     | 3      | 4      | 5      | 6      | 7     | 8     |
|-----------------|----------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|
| 2               | -484.165 | —      | 2.439 | —      | —      | —      | —      | —     | —     |
| 3               | 0.957    | 2.029  | 0.904 | 0.720  | —      | —      | —      | —     | —     |
| 4               | 0.539    | -0.536 | 0.349 | 0.991  | -0.188 | —      | —      | —     | —     |
| 5               | 0.069    | -0.061 | 0.655 | -0.452 | 0.296  | 0.175  | —      | —     | —     |
| 6               | -0.148   | -0.076 | 0.052 | 0.057  | -0.088 | -0.267 | 0.010  | —     | —     |
| 7               | 0.090    | 0.280  | 0.323 | 0.251  | -0.275 | 0.002  | -0.359 | 0.001 | —     |
| 8               | 0.047    | 0.023  | 0.073 | -0.018 | -0.244 | -0.025 | -0.065 | 0.069 | 0.123 |
|                 |          | 0.060  | 0.069 | -0.087 | 0.068  | 0.088  | 0.309  | 0.076 | 0.122 |

地球の物理学事典, 朝倉書店  
Stacy, Davis 著, 2008

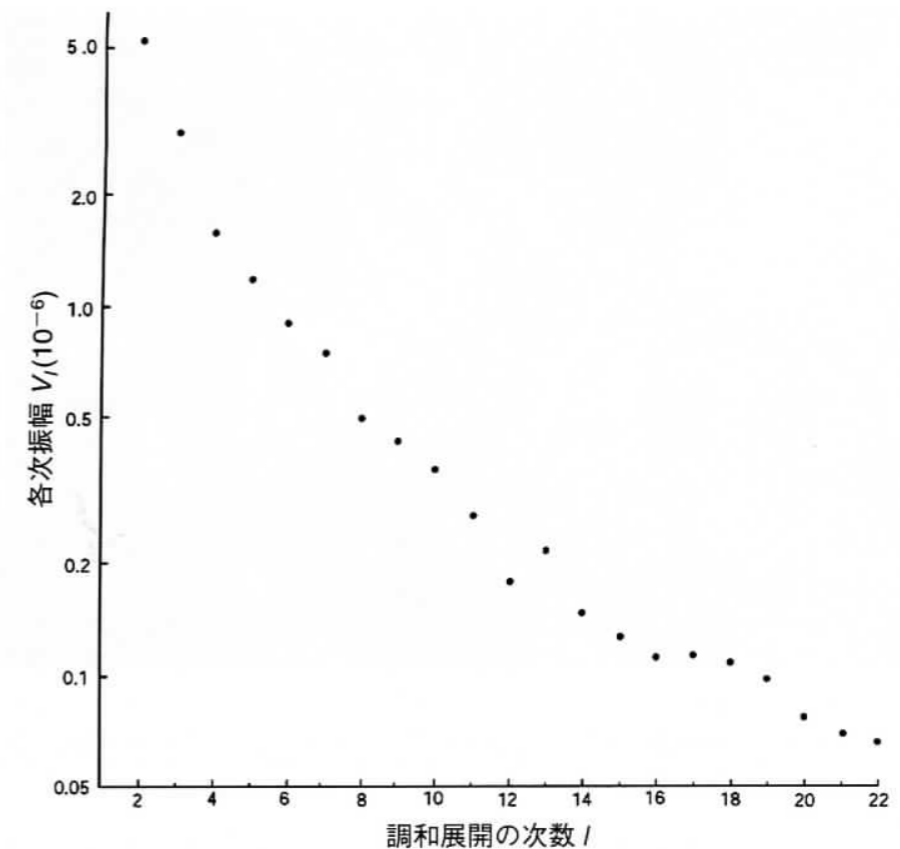


図 9.3 Lerch ら (1994) の表を用いて求めた, ジオイドの球面調和係数の各次数の振幅. 定義は式 (9.7) による.  $\bar{C}_2^0$  と,  $\bar{C}_4^0$  は, 平衡形の扁平率に対応する値をあらかじめ差し引いている.

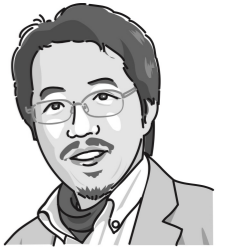
$$U(\mathbf{r}) = \frac{GM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n \left( \frac{R}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\varphi + S_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta) \right\} \quad (24)$$

# 光格子時計をISSへ，重力理論の検証へ

真貝寿明 (大阪工業大学)

Hisaaki Shinkai (Osaka Inst. Tech)

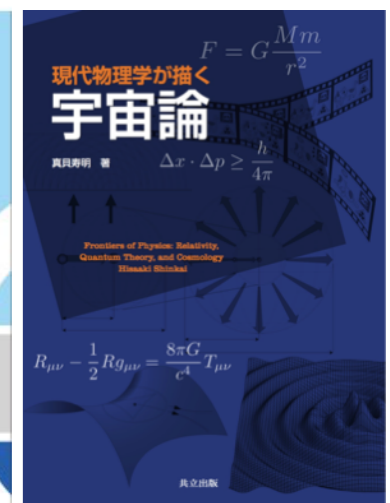
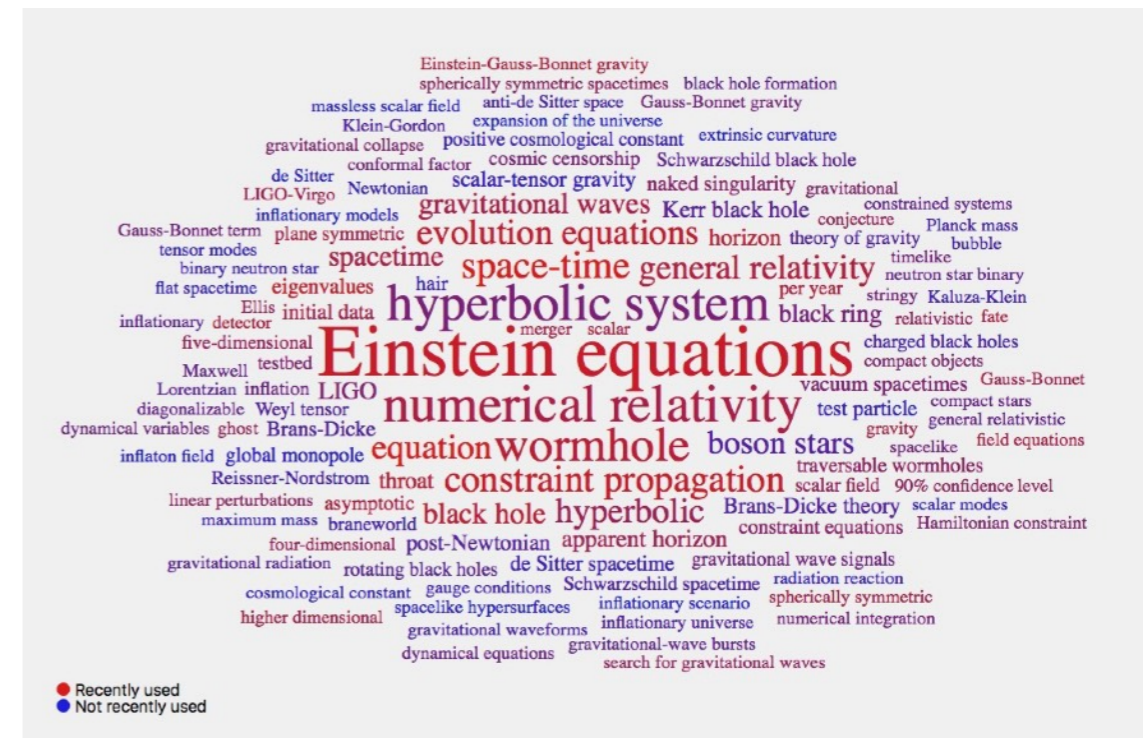
hisaaki.shinkai@oit.ac.jp



専門：一般相対性理論，宇宙論

経歴：早稲田大学理工学部物理，  
Washington Univ. (St. Louis)，  
Pennsylvania State Univ.，  
理化学研究所 戎崎計算宇宙物理研究室

現在：大阪工業大学情報科学部  
重力波干渉計KAGRA；科学部門会議長  
(spokesperson)



# 光格子時計を用いた、重力理論の検証

## 重力の理論が検証できる。

(1) 等価原理の検証ができる。

微小重力でモノを長時間かけて落下させる

→ そもそもアインシュタインのスタートラインは正しかったのか。

(2) ポスト・ニュートン近似の2次のオーダーの検証ができる。

地球を長時間周回させることでニュートン理論からのズレを測る

→ アインシュタイン以外の重力理論が制限できる。

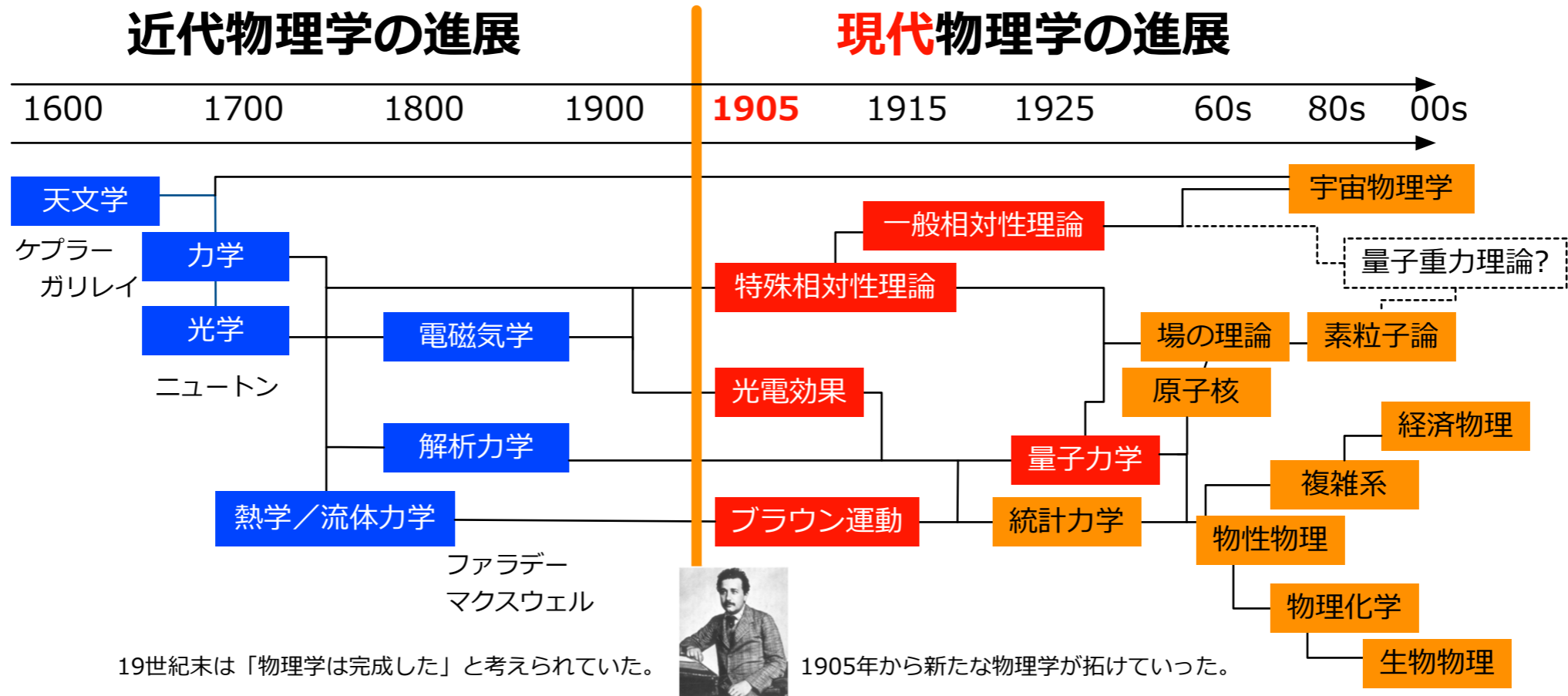
## 重力定数Gの精度を上げる or 重力の逆2乗則の検証ができる

(3) 物理定数Gの精度を上げるためのデータ蓄積になる。

重力の逆2乗則の検証と考えることも可能

# アインシュタインの一般相対性理論は、どこまで正しいのか。

アインシュタインの一般相対性理論(1915)は、量子論と並ぶ現代物理学の柱の一つ。



一般相対性理論は、提唱されてから、100年経った今も生き残っている。  
現在の重力理論が「絶対」正しいとは、物理学者は考えていない。



# アインシュタインの一般相対性理論は、どこまで正しいのか。

もっと正しい理論？

相対性理論

ニュートンの  
万有引力の法則

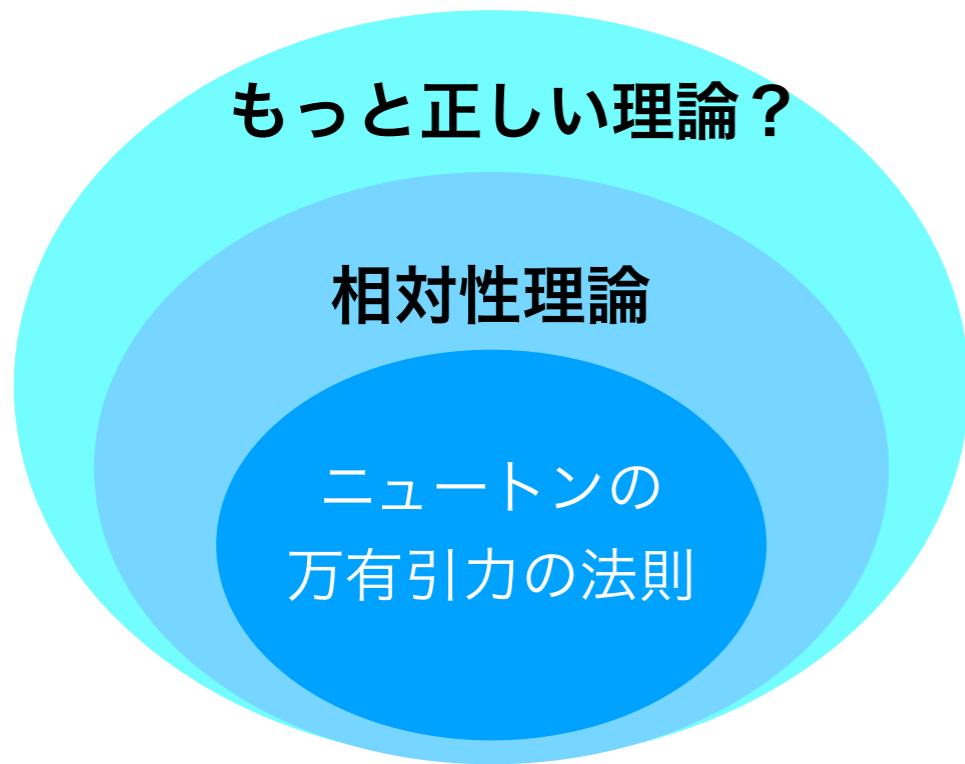
数多くの理論やモデルが検証待ち

宇宙の初期特異点問題が解決できていない。  
宇宙の加速膨張問題が解決できていない。  
量子論との融合ができていない。  
「なぜ我々のいる空間は4次元時空なのか」

基礎科学の問題としてだけでなく、  
宇宙について、人間の存在についての根源的な問いであり、  
多くの人々の興味を引くテーマでもある。

一般相対性理論は、提唱されてから、100年経った今も生き残っている。  
現在の重力理論が「絶対」正しいとは、物理学者は考えていない。

# ニュートンの万有引力, アインシュタインの相対性理論

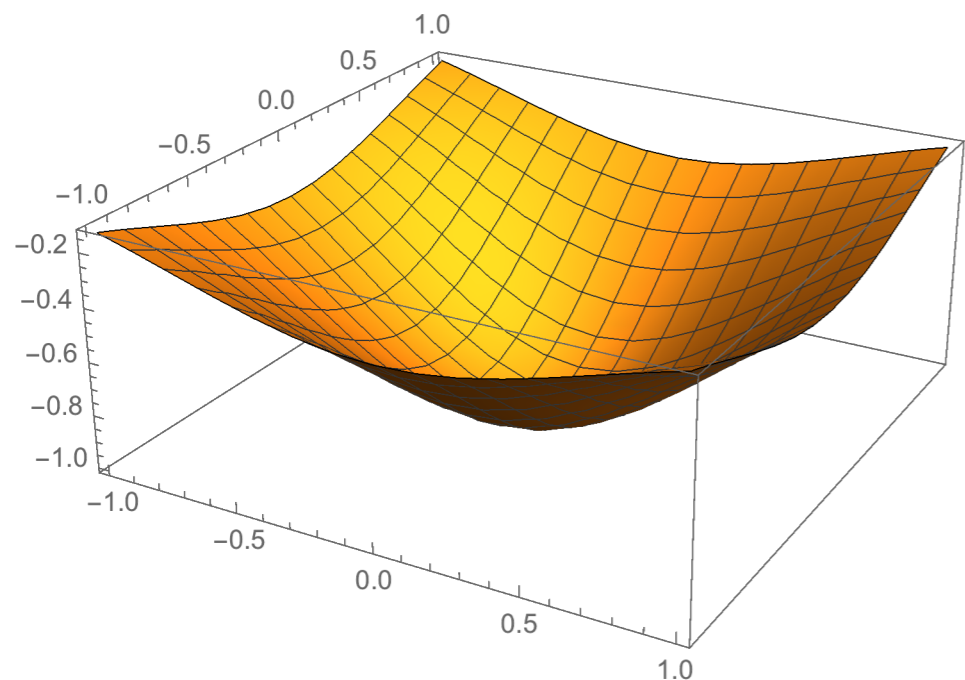


ニュートン：万有引力の存在を仮定すれば現実に合う

万有引力 ←————— ポテンシャル

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \equiv -m \frac{dU}{dr}, \quad U = -\frac{GM}{r}$$

アインシュタイン：物体は重力によってゆがみんだ時空を動く



測地線偏差の方程式

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = - \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau}$$

計量

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00} dt^2 + g_{0i} dt dx^i + g_{ij} dx^i dx^j \\ &= -(1 - 2U + 2\beta U^2) dt^2 + (1 + 2\gamma U) dx^i dx^j \end{aligned}$$

# アインシュタインの相対性理論の帰結

高速で動く物体ほど時間の進み方は遅くなる。

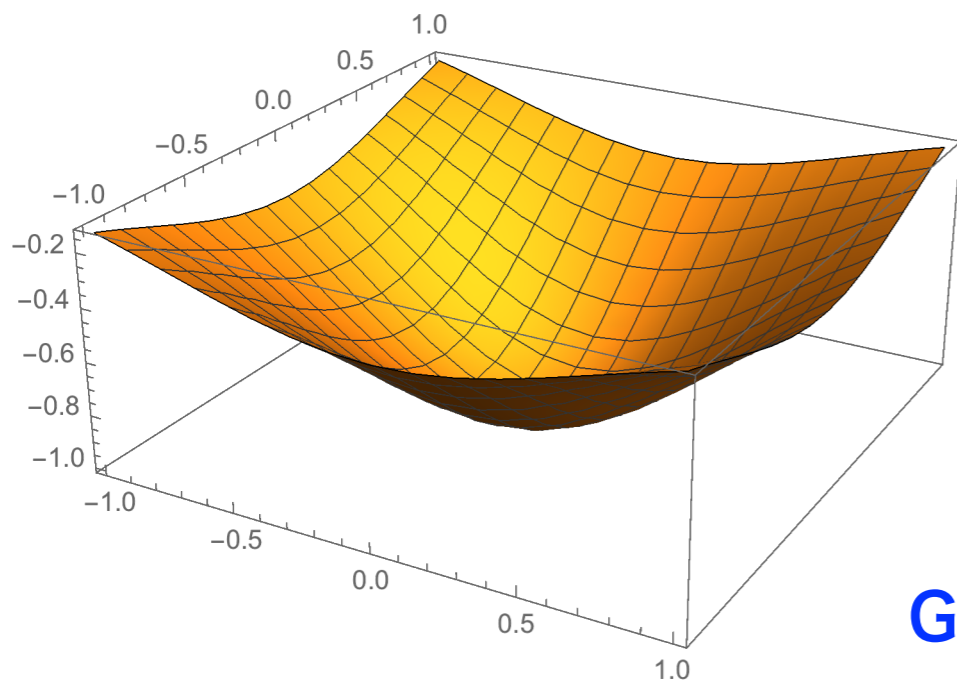
$$dt_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt_2$$



GPS衛星  $-7.214 \times 10^{-6}$  s per day  
ISS  $-28.256 \times 10^{-6}$  s per day

重力が大きいほど時空がゆがむ

重力が大きいほど時間の進み方が遅くなる



$$dt_1 = \sqrt{1 - 2U} dt_2 \simeq (1 - U) dt_2$$

重力源に近いところでの 1秒 < 平坦な場所での 1秒

GPS衛星  $+45.636 \times 10^{-6}$  s per day  
ISS  $+3.544 \times 10^{-6}$  s per day

GPS  $+38.42 \times 10^{-6}$  s per day  
ISS  $-24.71 \times 10^{-6}$  s per day

# 光格子時計

## “Optical Lattice Clock”

香取 (物理学会誌, 2002, p754)

原子をレーザーの定在波の腹に捕獲

多数原子の遷移周波数を読み取る

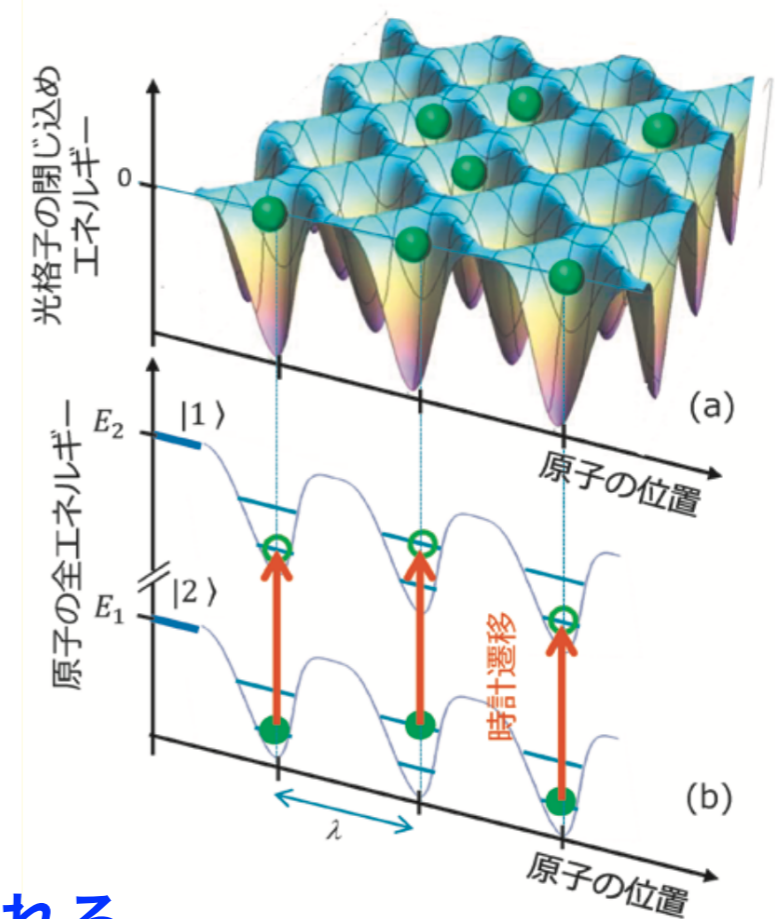
ドップラー効果 x

Cs原子時計  $\Delta t/t = 5 \times 10^{-16}$

光格子時計(2015)  $10^{-18}$

超分極と多重極効果を相殺する魔法周波数

光格子時計は  $\Delta t/t = 10^{-19}$  を視野に入れる



物理学会誌, 2017, p84

LETTERS

PUBLISHED ONLINE: 15 AUGUST 2016 | DOI: 10.1038/NPHOTON.2016.159

nature  
photonics

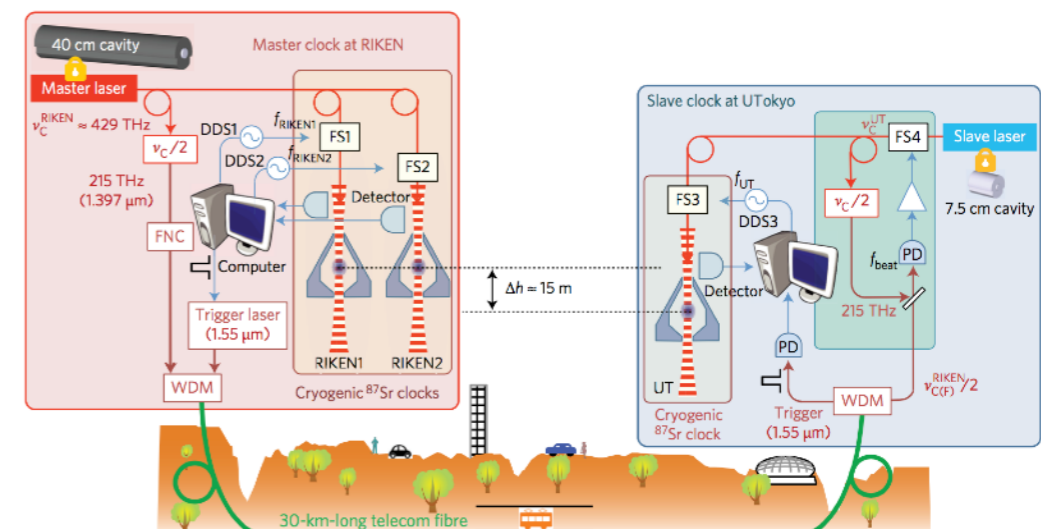
## Geopotential measurements with synchronously linked optical lattice clocks

Tetsushi Takano<sup>1,2</sup>, Masao Takamoto<sup>2,3,4</sup>, Ichiro Ushijima<sup>2,3,4</sup>, Noriaki Ohmae<sup>1,2,3</sup>, Tomoya Akatsuka<sup>2,3,4</sup>, Atsushi Yamaguchi<sup>2,3,4</sup>, Yuki Kuroishi<sup>5†</sup>, Hiroshi Munekane<sup>5</sup>, Basara Miyahara<sup>5</sup> and Hidetoshi Katori<sup>1,2,3,4\*</sup>

本郷と和光の高低差15mのポテンシャルによる

相対論的測地に成功 ± 5cm

(1 cm高い  $\Delta t/t = 1.1 \times 10^{-18}$ )



# アインシュタインの相対性理論の帰結

高速で動く物体ほど時間の進み方は遅くなる。

$$dt_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt_2$$

|       |                              |         |
|-------|------------------------------|---------|
| GPS衛星 | -7.214 x 10 <sup>-6</sup> s  | per day |
| ISS   | -28.256 x 10 <sup>-6</sup> s | per day |

重力が大きいほど時空がゆがむ

重力が大きいほど時間の進み方が遅くなる

$$dt_1 = \sqrt{1 - 2U} dt_2 \simeq (1 - U) dt_2$$

|       |                              |          |
|-------|------------------------------|----------|
| GPS衛星 | +45.636 x 10 <sup>-6</sup> s | per day  |
| ISS   | +3.544 x 10 <sup>-6</sup> s  | per day  |
| ISS   | +1.294 x 10 <sup>-3</sup> s  | per year |

本当はもっと高次のpostNewton補正項がある。

-> 重力理論の検証ができる

$$U = -\frac{GM}{r}$$

$$dt_1 = \sqrt{1 - 2U + 2\beta U^2} dt_2 \simeq (1 - U + \beta U^2) dt_2$$

# アインシュタインの相対性理論の帰結

高速で動く物体ほど時間の進み方は遅くなる.

$$dt_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt_2$$

GPS衛星  $\Delta t/t = -8.34925 \times 10^{-11}$

ISS  $\Delta t/t = -3.27042 \times 10^{-10}$

重力が大きいほど時空がゆがむ

重力が大きいほど時間の進み方が遅くなる

$$dt_1 = \sqrt{1 - 2U} dt_2 \simeq (1 - U) dt_2$$

GPS衛星  $\Delta t/t = + 5.282 \times 10^{-10}$

ISS  $\Delta t/t = + 4.102 \times 10^{-11}$

ISS  $(\Delta t/t)^2 = + 1.683 \times 10^{-20}$

$$dt_1 = \sqrt{1 - 2U + 2\beta U^2} dt_2 \simeq (1 - U + \beta U^2) dt_2$$

本当はもっと高次のpostNewton補正項がある.

-> 重力理論の検証ができる

$$U = -\frac{GM}{r}$$

2次補正項の寄与 ISS  $+1.454 \times 10^{-15} \text{ s per day}$

# Parametrized Post Newtonian 近似

$$\epsilon^{1/2} \sim \frac{v}{c} \sim \sqrt{\frac{|\phi_N|}{c^2}}$$

| Theory               | Arbitrary functions or constants | Cosmic matching parameters | PPN parameters                            |                                   |       |             |             |
|----------------------|----------------------------------|----------------------------|-------------------------------------------|-----------------------------------|-------|-------------|-------------|
|                      |                                  |                            | $\gamma$                                  | $\beta$                           | $\xi$ | $\alpha_1$  | $\alpha_2$  |
| General relativity   | none                             | none                       | 1                                         | 1                                 | 0     | 0           | 0           |
| Scalar-tensor        |                                  |                            |                                           |                                   |       |             |             |
| Brans-Dicke          | $\omega_{BD}$                    | $\phi_0$                   | $\frac{1 + \omega_{BD}}{2 + \omega_{BD}}$ | 1                                 | 0     | 0           | 0           |
| General, $f(R)$      | $A(\varphi), V(\varphi)$         | $\varphi_0$                | $\frac{1 + \omega}{2 + \omega}$           | $1 + \frac{\lambda}{4 + 2\omega}$ | 0     | 0           | 0           |
| Vector-tensor        |                                  |                            |                                           |                                   |       |             |             |
| Unconstrained        | $\omega, c_1, c_2, c_3, c_4$     | $u$                        | $\gamma'$                                 | $\beta'$                          | 0     | $\alpha'_1$ | $\alpha'_2$ |
| Einstein-Æther       | $c_1, c_2, c_3, c_4$             | none                       | 1                                         | 1                                 | 0     | $\alpha'_1$ | $\alpha'_2$ |
| Tensor-Vector-Scalar | $k, c_1, c_2, c_3, c_4$          | $\phi_0$                   | 1                                         | 1                                 | 0     | $\alpha'_1$ | $\alpha'_2$ |

$$g_{00} = -1 + 2U - 2\beta U^2 - 2\xi\Phi_W + (2\gamma + 2 + \alpha_3 + \zeta_1 - 2\xi)\Phi_1 + 2(3\gamma - 2\beta + 1 + \zeta_2 + \xi)\Phi_2 + 2(1 + \zeta_3)\Phi_3 + 2(3\gamma + 3\zeta_4 - 2\xi)\Phi_4 - (\zeta_1 - 2\xi)\mathcal{A} - (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)w^2U - \alpha_2 w^i w^j U_{ij} + (2\alpha_3 - \alpha_1)w^i V_i + \mathcal{O}(\epsilon^3),$$

$$g_{0i} = -\frac{1}{2}(4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \zeta_1 - 2\xi)V_i - \frac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \zeta_1 + 2\xi)W_i - \frac{1}{2}(\alpha_1 - 2\alpha_2)w^i U - \alpha_2 w^j U_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon^{5/2}),$$

$$g_{ij} = (1 + 2\gamma U)\delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

| PPN パラメータ    | 測定結果                            | 相対論的効果               |
|--------------|---------------------------------|----------------------|
| $\gamma - 1$ | $(2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}$  | Shapiro 遅延 (カッシーニ衛星) |
| $\gamma - 1$ | $(-1.7 \pm 4.5) \times 10^{-4}$ | 光の屈折 (VLBI)          |
| $\beta - 1$  | $< 3 \times 10^{-3}$            | 近日点移動                |
| $\beta - 1$  | $(1.1 \pm 1.1) \times 10^{-4}$  | Nordtvedt 効果         |
| $\zeta$      | $< 3 \times 10^{-3}$            | 地球の潮汐                |

ISSで1ヶ月以上測定を続ければ、  
 $\beta$ の制限がこれまで以上の精度になる

# Parametrized Post Newtonian 近似

| Theory                       | Arbitrary functions or constants | Cosmic matching parameters | PPN parameters                            |                                   |       |             |             |
|------------------------------|----------------------------------|----------------------------|-------------------------------------------|-----------------------------------|-------|-------------|-------------|
|                              |                                  |                            | $\gamma$                                  | $\beta$                           | $\xi$ | $\alpha_1$  | $\alpha_2$  |
| General relativity           | none                             | none                       | 1                                         | 1                                 | 0     | 0           | 0           |
| Scalar-tensor                |                                  |                            |                                           |                                   |       |             |             |
| Brans-Dicke                  | $\omega_{BD}$                    | $\phi_0$                   | $\frac{1 + \omega_{BD}}{2 + \omega_{BD}}$ | 1                                 | 0     | 0           | 0           |
| General, $f(R)$              | $A(\varphi), V(\varphi)$         | $\varphi_0$                | $\frac{1 + \omega}{2 + \omega}$           | $1 + \frac{\lambda}{4 + 2\omega}$ | 0     | 0           | 0           |
| Vector-tensor                |                                  |                            |                                           |                                   |       |             |             |
| Unconstrained Einstein-Æther | $\omega, c_1, c_2, c_3, c_4$     | $u$                        | $\gamma'$                                 | $\beta'$                          | 0     | $\alpha'_1$ | $\alpha'_2$ |
|                              | $c_1, c_2, c_3, c_4$             | none                       | 1                                         | 1                                 | 0     | $\alpha'_1$ | $\alpha'_2$ |
| Tensor-Vector-Scalar         | $k, c_1, c_2, c_3, c_4$          | $\phi_0$                   | 1                                         | 1                                 | 0     | $\alpha'_1$ | $\alpha'_2$ |

$$\mathcal{I} = \int \sqrt{-g} (R + R^2 + R_{ij}R^{ij} + R_{ijkl}R^{ijkl} + \dots) d^4x$$

$$= \int \sqrt{-g} f(R) d^4x$$

| PPN パラメータ    | 測定結果                            | 相対論的効果               |
|--------------|---------------------------------|----------------------|
| $\gamma - 1$ | $(2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}$  | Shapiro 遅延 (カッシーニ衛星) |
| $\gamma - 1$ | $(-1.7 \pm 4.5) \times 10^{-4}$ | 光の屈折 (VLBI)          |
| $\beta - 1$  | $< 3 \times 10^{-3}$            | 近日点移動                |
| $\beta - 1$  | $(1.1 \pm 1.1) \times 10^{-4}$  | Nordtvedt 効果         |
| $\zeta$      | $< 3 \times 10^{-3}$            | 地球の潮汐                |

宇宙初期や宇宙の加速膨張の説明として使われる重力理論

ISSで1ヶ月以上測定を続ければ、 $\beta$ の制限がこれまで以上の精度になる



# 万有引力定数Gの精度は4桁しかない

本当はもっと高次のpostNewton補正項がある.

-> 重力理論の検証ができる

$$dt_1 = \sqrt{1 - 2U} dt_2 \simeq (1 - U) dt_2$$
$$dt_1 = \sqrt{1 - 2U + 2\beta U^2} dt_2 \simeq (1 - U + \beta U^2) dt_2$$

$$U = -\frac{GM}{r}$$

$$c = 299792458 \quad [\text{m/s}]$$

$$G = 6.672 \times 10^{-11} \quad [\text{m}^3/\text{kg}/\text{s}^2]$$

$$h = 6.62607004 \times 10^{-34} \quad [\text{m}^2 \text{ kg}/\text{s}]$$

$$M_{\text{Earth}} = 5.972 \times 10^{24} \quad \text{Kg}$$

$$M_{\text{Sun}} = 1.9891 \times 10^{30} \quad \text{Kg}$$

Gだけ4桁精度しかない. ---> 星の質量は4桁でしか言えない

-> GMの組み合わせでしかわからない. ケプラーの第3法則の定数.

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \quad \Rightarrow \quad GM = r_1 v_1^2 = r_1 \left( \frac{2\pi r_1}{T_1} \right)^2$$

-> 月や太陽による軌道の影響を調べることができれば, この式は縮退しない.  
(1種類の測定では解けないが, 将来的なデータを蓄える意味では貴重)

# アインシュタインの一般相対性理論は、どこまで正しいのか。

重力理論に関するさまざまなテストの有効範囲。

それぞれのテストに合格する範囲を模式的に示すと、一般相対性理論は図の中心に位置する。



### 一般相対性理論のスタートラインである、**等価原理**をテストする

これが成り立たなければ、テンソル計算やリーマン幾何学を用いて一般相対性理論を記述することが意義を失う。

- 重力加速度の大きさが  $g$  である場において、物体が加速される運動を扱うとき、 $m_{\text{慣性}}$  と  $m_{\text{重力}}$  を区別して、運動方程式

$$m_{\text{慣性}}a = m_{\text{重力}}g \quad (1.1)$$

と書ける。Newton は、 $m_{\text{慣性}} = m_{\text{重力}}$  であれば、 $a = g$  であることが帰結することを明示した。

### 弱い等価原理 (WEP: weak equivalence principle)

#### 『自由落下の普遍性』

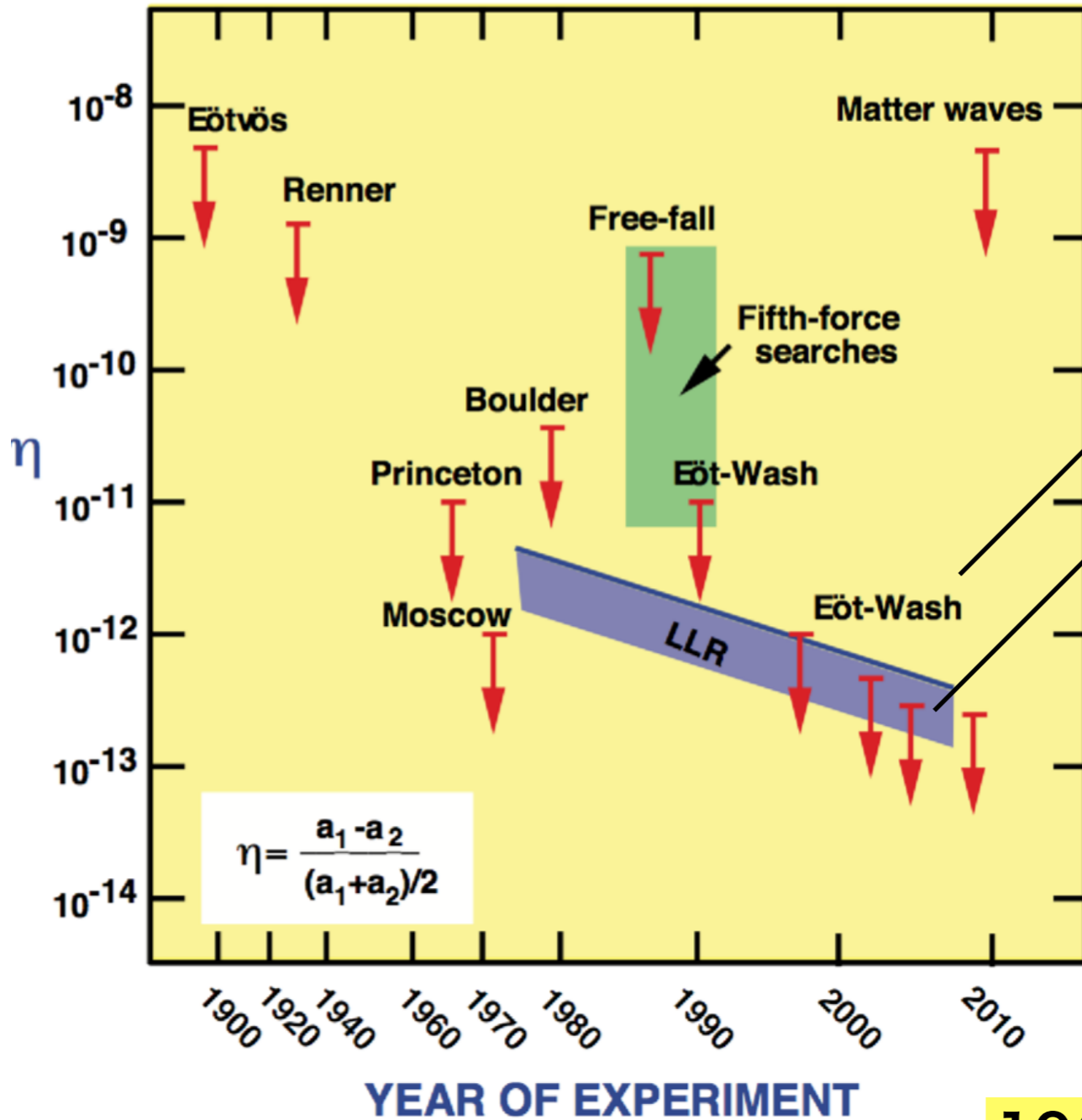
十分に小さな物体は、重力場の中で、その組成や質量によらず、同じ加速度で落下する。

#### 『慣性質量と重力質量の等価性』

慣性質量と重力質量の比はすべての物体に対して一定である。

# 重力理論の検証実験の現状 【等価原理】

## TESTS OF THE WEAK EQUIVALENCE PRINCIPLE



$$\eta \equiv 2 \frac{|a_1 - a_2|}{a_1 + a_2}, \quad a_X = \frac{m_g}{m_i} \text{ for mass } X$$

ねじり秤の実験, 地上では限界

LLRは, lunar laser rangingの略

MICROSCOPE (衛星打ち上げ済み)

→ 10<sup>-15</sup> を狙う

STEP → 10<sup>-18</sup> を狙う

QTEST @ ISS 原子干渉計

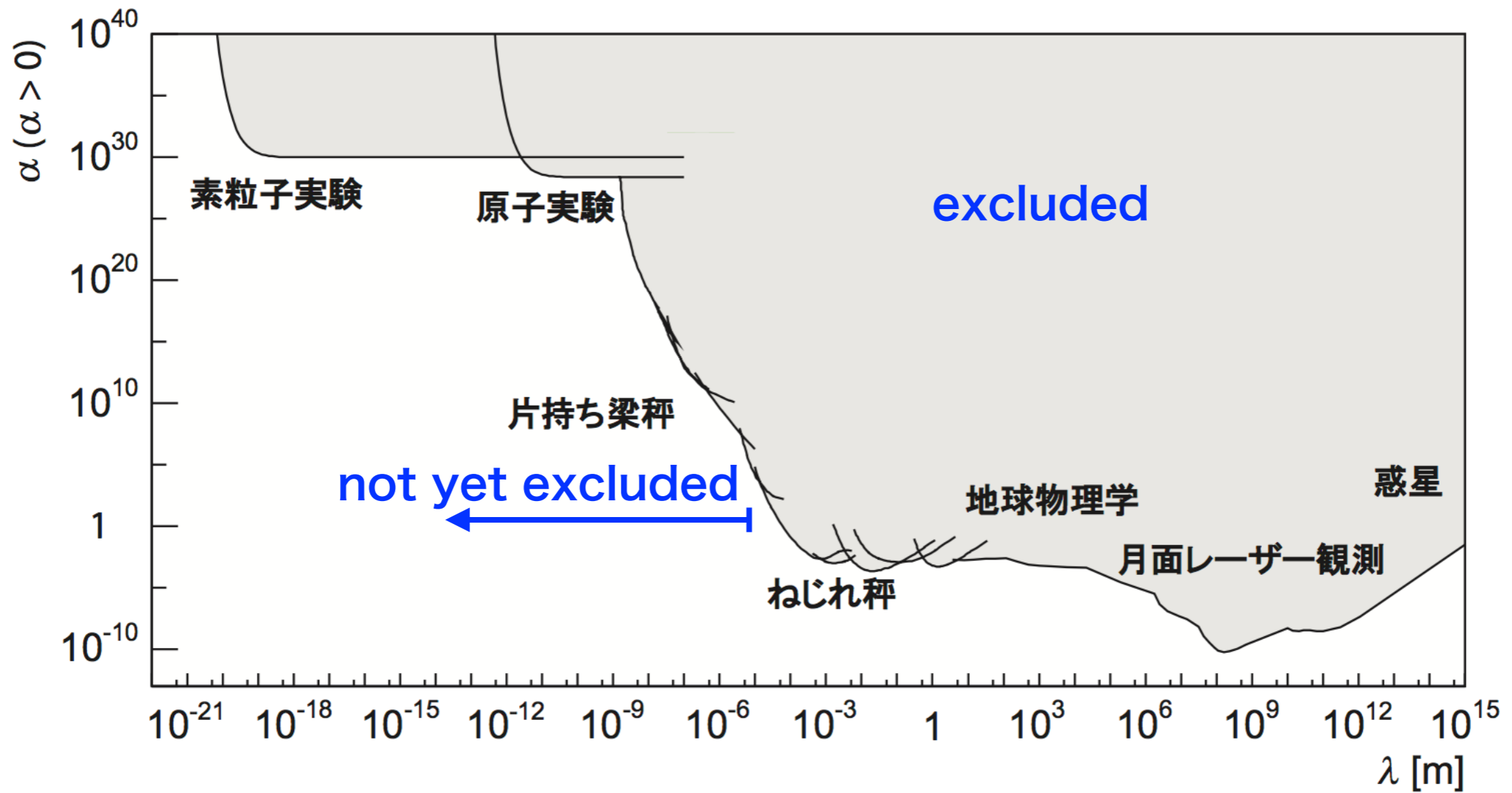
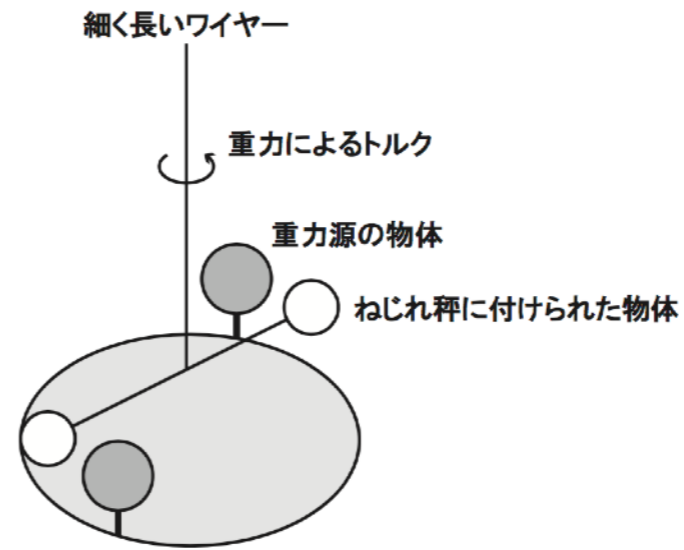
→ 10<sup>-16</sup> を狙う

Will, Living Rev. Rel.17 (2014) 4

10<sup>-18</sup>あたりまで検証できれば, 宇宙の加速膨張モデルやダークマターモデルに制限がつく

# 重力の逆二乗則に対する制限

$$V = -G \frac{m_1 m_2}{r} (1 + \alpha e^{-r/\lambda})$$



# 重力の逆二乗則は近距離では確かめられていない → 膜宇宙モデル

これは 0.1 mm以下に5次元以上の世界があるかもしれない, という話.

$$4 \text{次元では } F = G_4 \frac{Mm}{r^2}, \quad 5 \text{次元では } F = G_5 \frac{Mm}{r^3}$$

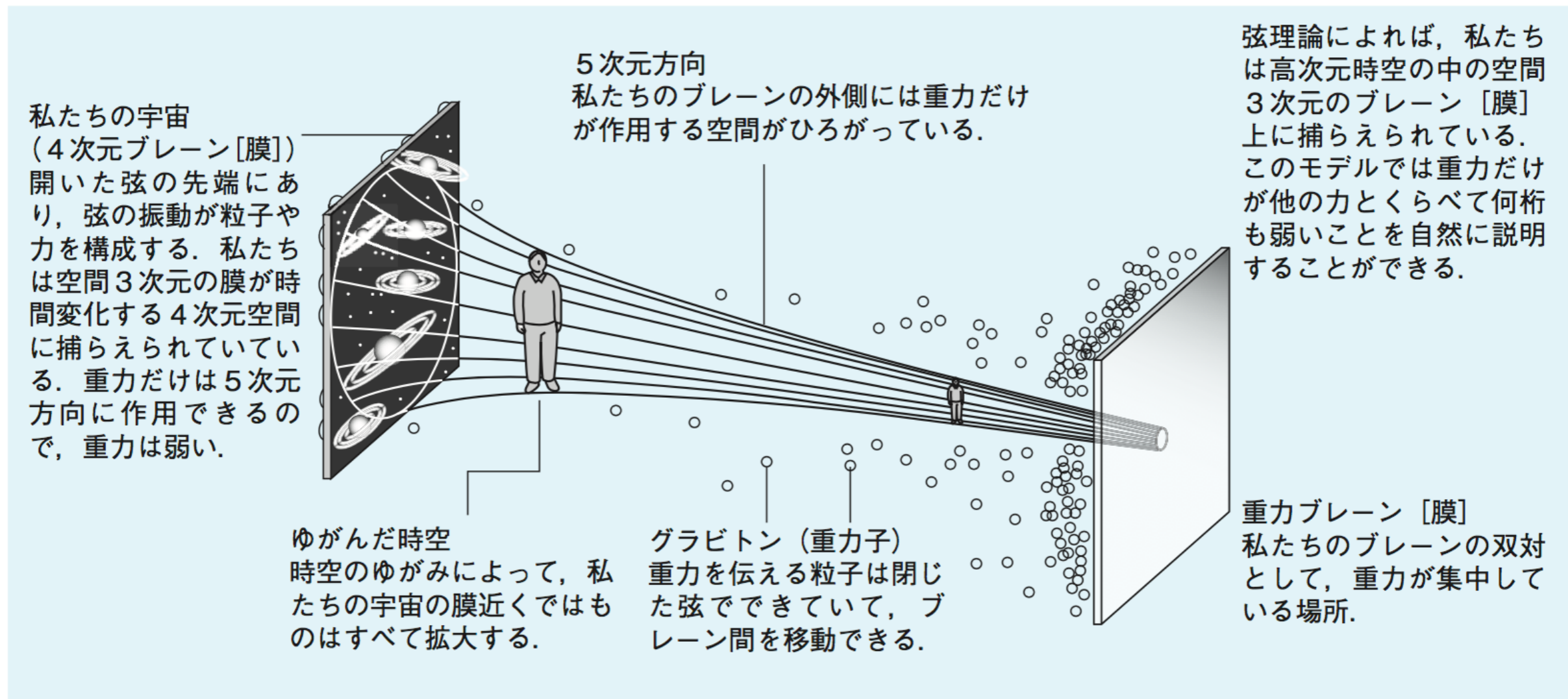


図 5.31 ランドールとサンドラムが提案したブレーンワールド・モデルの1つ. (膜宇宙モデル, 1999)

# 光格子時計を用いた、重力理論の検証

## 重力の理論が検証できる。

(1) 等価原理の検証ができる。

微小重力でモノを長時間かけて落下させる

→ そもそもアインシュタインのスタートラインは正しかったのか。

(2) ポスト・ニュートン近似の2次のオーダーの検証ができる。

地球を長時間周回させることでニュートン理論からのズレを測る

→ アインシュタイン以外の重力理論が制限できる。

## 重力定数Gの精度を上げる or 重力の逆2乗則の検証ができる

(3) 物理定数Gの精度を上げるためのデータ蓄積になる。

重力の逆2乗則の検証と考えることも可能