

相対性理論におけるパラドックス

真貝寿明 (大阪工業大学, 武庫川女子大学)

<http://www.oit.ac.jp/is/shinkai/>

アインシュタインが生み出した2つの相対性理論を紹介します。時間と空間が伸び縮みすることを明らかにした理論から、双子のパラドックスやタイムマシンの可能性など、時間にまつわる話が物理の課題になりました。「時間」を軸にして、最近の話題を紹介します。

1 はじめに

1.1 パラドックスとは？

正しそうに見える前提と妥当に見える推論から、受け入れがたい結論が得られることをパラドックス (paradox) という。逆説, 背理, 逆理とも言われる。よく知られた例としては、次のようなものがある。

アキレスと亀のパラドックス

足の速いアキレスと亀が徒競走をすることになった。駿足のアキレスに対して亀の方が明らかに足が遅いため、アキレスは亀の後方からスタートすることになった。スタート後、アキレスは亀のいた場所 (A 地点) に達するが、その時すでに亀は前方の B 地点にいる。アキレスが B 地点にたどり着いたときは、亀はその先の C 地点に進んでいる。この考えは、いくらでも続けることができるので、アキレスはいつまでたっても亀に追いつけないことになる。

さて、この話のどこがおかしいのだろうか？ アキレスが秒速 10m, 亀が秒速 1m だとして、アキレスが亀より 100m 後方からスタートした、と仮定しよう。アキレスのスタート位置を原点 ($x = 0$) とすれば、アキレスは t 秒後には $x_A = 10t$ の位置に、亀は t 秒後には $x_K = 100 + t$ の位置にいる。 $x_A = x_K$ となる時刻は、 $t = 100/9 = 11.11\dots$ 秒後であり、その位置は $x = 111.11\dots$ 。確かに確かにアキレスは亀に追いつくことができる。

上記の文章の説明は、追いつくまでの各ステップを延々と説明しているのにすぎない。つまり、ステップ数の無限性と実時間の無限性を混同させているからパラドックスになっているのである。

今日の講義では、相対性理論の紹介と、相対性理論に登場するパラドックスを紹介する。

1.2 今年はアインシュタインがノーベル賞を受賞して 100 年

Albert Einstein
(1879–1955)

2021 年はアインシュタインがノーベル物理学賞を受賞して 100 年の節目ということで、各地で催しが行われた。1921 年度のノーベル賞の発表は、1 年遅れで行われ、アインシュタインが受賞の知らせを受けたのは、日本に来る途中の船上だった。1922 年 11 月 17 日に上海から神戸港にやってきたアインシュタインは、11 月 19 日の慶應義塾大学の大講堂での講演を皮切りに全国各地で講演し、12 月 29 日（門司港から上海へ）に離日した。

アインシュタインは、このときすでに、特殊相対性理論 (1905)・一般相対性理論 (1915) を発表していて、それらの理論が正しいことも確認されて、世界的に有名になっていた。日本での講演は、どこも満席で、人々はアインシュタインが自分の理論を説明する姿に酔いしれたという。

ノーベル賞の受賞対象となったのは、「理論物理への貢献、特に光電効果の法則の発見」であって、相対性理論ではなかった。これは贈賞選考委員がまだ相対性理論を理解していなかったため、とも言われている。

相対性理論は時間と空間に関する物理で、特殊相対性理論と一般相対性理論の 2 つがある。どちらもアインシュタインが独力で完成させた。

2 特殊相対性理論・・・光速に近いときの力学

2.1 電磁気学をめぐる混乱

導線に電気を流すとまわりの磁石が動いたり、磁石の間で導線のループを回転させると電気が発生する。このような電磁誘導現象は、ファラデーによって発見された。電気と磁気との密接な関係をまとめて電磁気学として基礎方程式を完成させたのがマクスウェルである。

Michael Faraday
(1791–1867)

マクスウェルの方程式は、たとえ真空中であっても、電場と磁場が互いに作用しあって波として伝わることを示していた。電磁波（略して電波）である。後にヘルツによって無線機が発明されて以降、ラジオやテレビから現在では携帯電話や無線 LAN に至るまで電磁波は日常生活に溶け込んでいる。光も電磁波の 1 種である。

James C. Maxwell
(1831–1879)

Heinrich R. Hertz
(1857–94)

■電磁波の方程式

マクスウェル方程式は、電磁波が「真空を」「光速で」伝わることを表すが、発表直後から不思議に思われていた。

1 つめの疑問は、電磁波を伝える物質は何か、という疑問だった。真空中でも波が伝わる理由がわからないのだ。波として伝わるならば、波を伝える物質（媒質）が存在するはずである。そこで物理学者は電磁波を伝える物質の存在を期待してエーテル (ether) と命名した。そして、エーテルを見つけ出そうとする実験が始まった。

エーテルは古代ギリシア語の「天空を満たす物質」を表す言葉由来する。

もう1つの疑問は、マクスウェル方程式の中に「光速」を表す文字が登場したことだ。この「光速」は誰から見た速さなのか、という疑問である。物体の速度の測定は、観測する人の速度によって変わってくる。速度は、誰から観測した速度かを始めに定義しないと意味がないのである。

2.2 アインシュタインの登場

■大胆な2つの原理の導入

エーテルは、発見されなかった。アインシュタインは、「光は真空中でも伝わるもの」として、さらに「マクスウェル方程式は、誰から見ても正しい式である」ことを出発点にすると、どのような理論になるのか、を考えた。つまり、次の2つの「原理」からスタートすると、どのような物理になるのかを考察した。

- (a) 相対性原理：物理法則は、どのように運動をする人からみても（どのような座標系から見ても）同じ形にならなくてはいけない。
- (b) 光速一定の原理：真空中の光の速度は、どのような座標系から見ても同じである。

■光速+光速=光速

ニュートンの力学では、 v_1 の速度で動く電車の中で、 v_2 の速度でボールを投げた場合、ボールの速度を地上から見ると $v_1 + v_2$ になる。これは我々が日常的に正しいと思っている速度の足し算である。光の速度 c で飛ぶロケットが進行方向に光を出したら、 $2c$ の速度の光になりそうである。

しかし、特殊相対性理論では、速度の足し算は $v_1 + v_2$ ではなく、

$$\frac{v_1 + v_2}{1 + (v_1 v_2 / c^2)} \quad (1)$$

となる。我々が日常に感じる $v_1 + v_2$ という足し算は、光速よりずっと遅い速度を考えているので「近似的に」正しい式になっている、というのが相対性理論の結論である。

(5) 式で $v_1 = v_2 = c$ として計算してみよう。

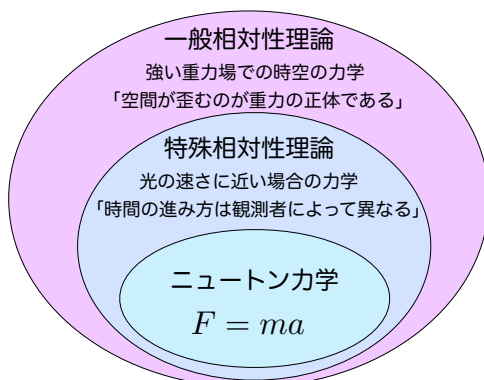


図 1: 相対性理論はニュートン力学を含み、光速の世界へ、強い重力の世界へと物理の法則をマクロの方向へ拡張した。

2.3 時間の進み方が相対的になる

■光時計を使った思考実験

光速度一定の原理を使うと、光を使って正確な時刻が測れるはずだ。下図のように、光を往復させる装置をつくり、光の往復回数で時間を測る光時計を考えよう。

光時計をロケットに載せたでしょう。ロケットが飛ぶと、光時計の筒を1往復するために光が進まなければならない距離が増える。地球上で止まって見ている人の光時計が1秒刻んだときでも、ロケット内の光時計の光はまだ1往復できていない。しかし、ロケットの中の人にとっては、光時計が1秒を刻む時刻が正確のはずだ。

どちらも矛盾無く考えようとするならば、地球上の1秒とロケット内の1秒の刻み方がずれていると考えれば良い。つまり、時間の進み方は、観測する人によって変わることになる。ロケットの速度が速いほど、地球の1秒にくらべてロケットの1秒は遅くなる。

ニュートン力学では、時間はどこでも一定に流れてゆくと考えた。絶対時間があると人々は思っていた。しかし、アインシュタインは時間座標も空間座標と同じであり、どちらも変化し得るものと考えたのだ。

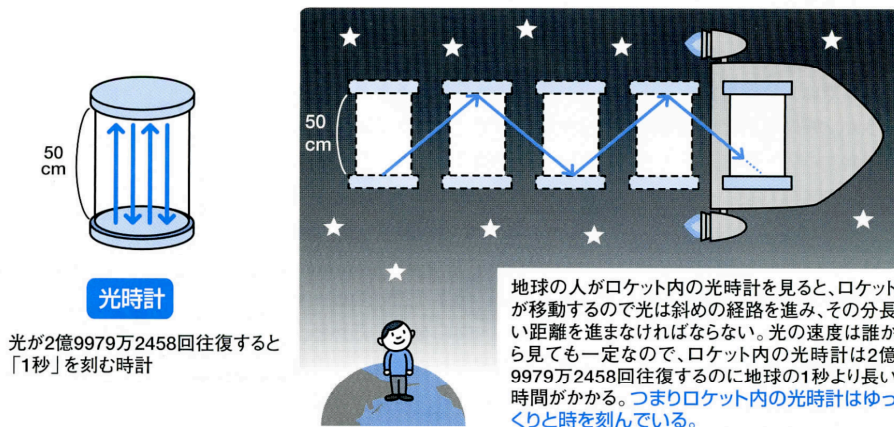


図 2: 光時計をロケットに載せて時間を測ると、地上のときより1秒の刻みは遅くなる。ロケット内では、光を基準に1秒を測るので、地上よりもロケット内の時間の進みは遅くなる。

■浦島効果：未来へ行くタイムトラベルは可能！

特殊相対性理論によれば、高速で動いている人ほど1秒の間隔は開いてくる。計算式で表すと、速度 v で移動している人の時間 T' は、静止している人の時間 T と同じではなく、

$$T' = \sqrt{1 - (v/c)^2} T \quad (2)$$

となる。この式にいくつか数字を入れると、時間の進み方は、 v が光の速さ c に近づくほど極端に遅くなっていくことがわかる。

地球を周回している国際宇宙ステーション (ISS) は、秒速 7.8 km ほどの速度だが、この速度は光速の 10 万分の 2.6 でしかないため、たとえ 1 年間 ISS に乗っていたとしても、残念ながら地球上との時間差は、わずかに 0.01 秒程度でしかない。しかし、光速の 80% で飛ぶロケットならば、ロケット内の 1 年は地球上の 1 年 8 ヶ月になる。もし光速に近い速さで飛ぶロケットが開発されたならば、ロケットに乗った人はなかなか歳をとらないことになる。

だから、この意味で、未来へ行くタイムトラベルは可能！と言える。光速に近いロケットが実現すれば、そのロケットで旅行して帰ってくるだけでタイムマシンになるのだ。

実際に、素粒子の実験では、光速近くで飛ぶ粒子の寿命が、通常の場合よりも長生きであることが確認されている。

v	$\sqrt{1 - (v/c)^2}$
0.1 c	0.99499
0.5 c	0.86603
0.9 c	0.43589
0.99 c	0.14107

2.4 時間の遅れとパラドックス

光速に近い速さで運動する人は、時間の進み方が遅くなる。そして、素粒子実験でそれが事実であることは確認されている。—しかし、少し考えてみると奇妙なことが起こりそうだ。ここでは 2 つのパラドックスを考えてみよう。

互いに「相手の時計が遅れている」というパラドックス

- a 速度は相対的なものだ。地球からロケットを見れば速度は v でも、ロケットから地球を見れば地球は速度 $-v$ で動いていることになる。
- b だから、地球の人はロケットの時計が自分より遅く進むと観測し、ロケットの人は地球の時計が自分より遅く進むと観測する。
- c だから、お互いどちらも「相手の時計が遅れている」と主張する。

さて、どこかに間違いはあるだろうか。

いずれも正しく、間違いはない。お互いどちらも「相手の時計が遅れている」と主張する。……しかし、こんな矛盾した主張は両立するのだろうか。

両立するのである。図 3 に理由を解説した。基準とする時計が地球上とロケット内で互いに違うのに、我々がなんとなく「同じ 1 秒後を比較しているはずなのに…」と設定を錯覚してしまうところが落とし穴である。相対性理論では、「同時」という概念は捨てなければならない。

どちらも相手の時計の進み方が遅いと主張することを認めると、次の「双子のパラドックス」が生じる。

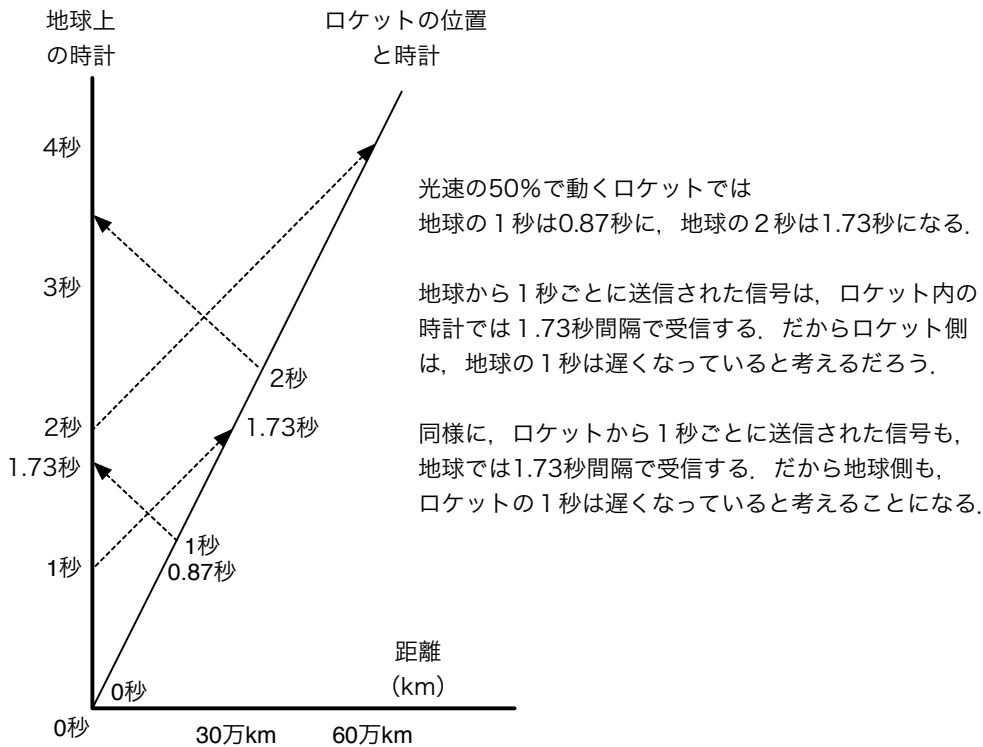


図 3: 「相手の時計の方が遅れている」という主張はどちらも正しい。

双子のパラドックス

- a 双子の兄と弟がいて、兄が光速の 80% のスピードで飛ぶロケットに乗って宇宙旅行に出た。目的地の星の近くまで一直線に飛び、すぐに引き返して戻ってきた。
- b ロケットで飛行中は、どちらも相手の時計の進み方が遅いと観測していた。
- c それでは、地球時間で 30 年経って戻ってきた兄と、地球に残っていた弟が再会するとき、どちらが若いのか。

この答えはロケットに乗っていた兄である。地球で 30 年経過していても、兄にとっては 18 年しか経過していない。

■ロケットの兄が若い理由

兄と弟の決定的な違いは、兄が地球に戻ってくるために途中で向きを変えることだ。向きを変える瞬間は、等速運動ではなく加速度運動になる*1。加速度運動をしている状況があると、ローレンツ変換を単純に適用するわけにはいかなくなる。

実際に 2 人の間で経過する時間が違うことを次のように示そう。兄は 12 光年離れた距離を光速の 80% のロケットで往復してくるものとす

*1 一回止まって逆向きに動き出すのも、円軌道を描きながら速度を落とさずに向きを変えるのも加速度運動である

る。ロケットが折り返す時刻は、地球上の時計で15年後だ。しかしロケット内の時計では時間の遅れの計算式から9年後になる。

さて、お互いに3年ごとに安否を気づかう信号を送ることにしよう。図4に示すように、互いの距離が離れば、光が伝わる時間もかかるので、受信するまでの時間差も生じる。兄が遠ざかるとき、兄の信号は弟には9年ごとに届く。弟の3年目の信号も兄には9年後に届く。（ここまではお互いの時計は遅くなっているなあ、と感じるはずだ）。ところが、兄が進路を変更すると、弟も兄もお互いの信号を毎年受信することになる。（これで兄が帰路についたことが確実にわかる。）兄が動いているために、光のドップラー効果が起こったのだ。

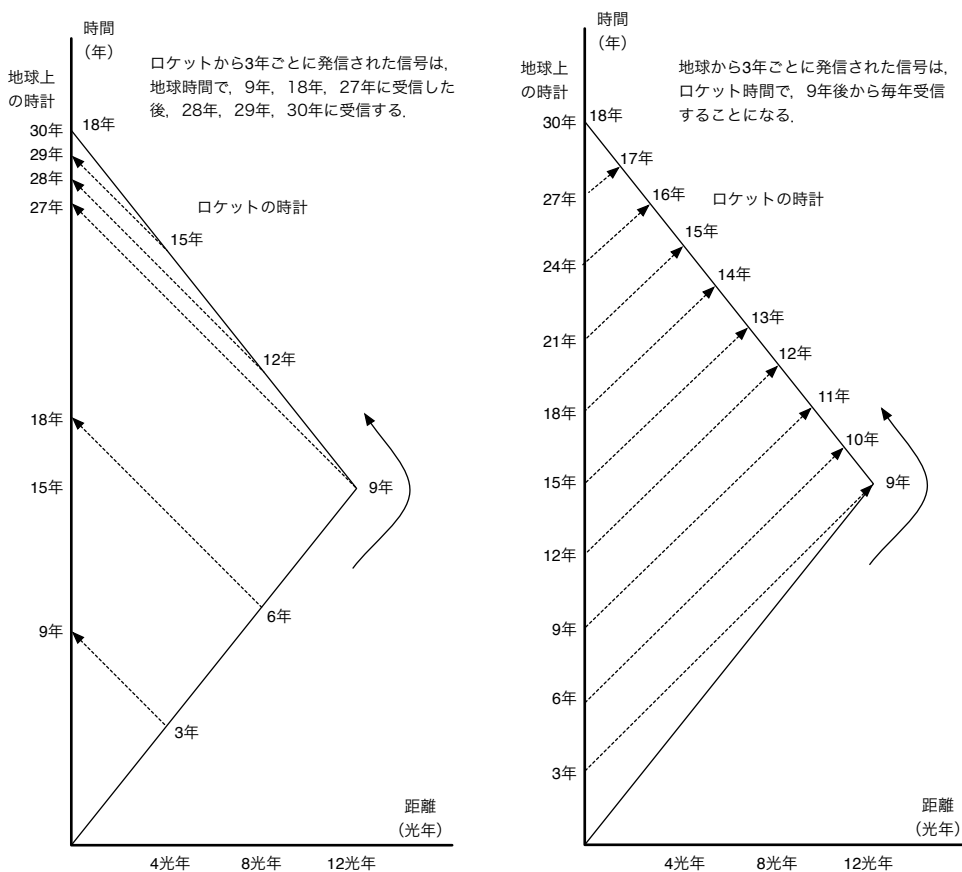


図 4: 双子のパラドックスの正しい理解

どちらも相対的に同じ間隔で信号を受信することになるが、結果として全行程の経過時間は兄の方が短い。地球では30年が経過しているが、戻ってきた兄にとって、地球は12年後の世界だ。このロケット旅行は、未来へ到達するタイムトラベルになったのである。

3 一般相対性理論・・・強い重力場の力学

3.1 重力の正体は時空のゆがみ

1905年にアインシュタインが発表した相対性理論には、弱点もあった。加速度運動が扱えなかったのである。そこで、アインシュタインは、相対性理論をもっと一般的なものに拡張しようと、研究に取り組んだ。

彼が追い求めたのは、どんな座標系から見ても物理法則は同じ形に書けるはずだ、という理想の運動方程式である。彼は出発点として、

- (A) 一般相対性原理：物理法則は、すべての局所慣性系で同一（一般座標変換に対して不変）である。
- (B) 光速一定の原理

という原理を想定した。

すぐに問題となったのは、加速度運動している人から見た運動方程式である。例えば動き始めた列車内では、後ろ向きに力を受けるように感じる。逆にブレーキをかけた列車内では、前向きに力を受けるように感じる。加速度運動をしている空間では、観測者は加速度と逆向きに慣性力を感じるからだ。しかし、慣性力は座標系に依存する「見かけの力」であって、物理的なものではない。アインシュタインは、慣性力を加えた運動方程式は醜いと考えた。このような「対処法」が嫌いだったのだ。上記の一般相対性原理を実現するためには、慣性力などあってはならないものだった。

■アインシュタイン生涯最大の発見

重力に引かれたロケット内では重力加速度があるために慣性力を考えなければならない。日々悩んでいたアインシュタインは、後に「人生で最も幸福なひらめき」と振り返るアイデアを得た。自由落下するエレベータの思考実験である。

加速度 (acceleration)
= 速度の時間変化率。
重力による自由落下は
加速度 $g = 9.8\text{m/s}^2$ の
等加速度運動である。



人生で最も幸福なひらめきを得た頃のアインシュタイン

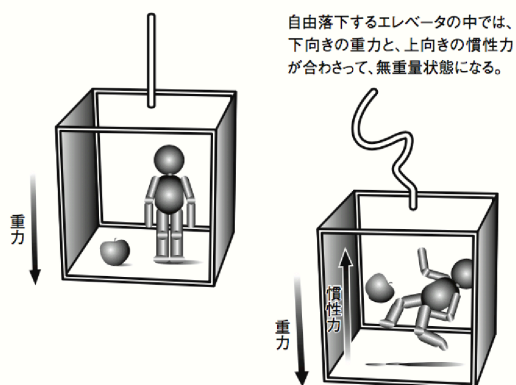


図 5: エレベータのワイヤが切れて自由落下すると、無重量状態になる。

ワイヤの切れたエレベータは、重力加速度で自由落下する。エレベータの中にいる人は、下向きの重力に加えて、同じ大きさの慣性力を上向きに受けるので無重力状態になる。つまり、観測者は重力の効果を感じず、特殊相対性理論が適用できる空間になる。重力の効果は局所的には消去可能になる。

アインシュタインのアイデアは、「加速によって生じた慣性力と重力は区別できない」という等価原理だった。

この考えを使えば、加速度運動の特殊性を取り去ることができる。アインシュタインは、重力の正体を「力」として捉えなくてよいこと、加速度系でも慣性系の概念を使えることに気がついたのだ。

エレベータを使った思考実験では、自由落下することで重力の影響がない空間をつくることができた。しかし、重力そのものをこの手法で消し去ることは不可能である。

例えば、地球の重力に引かれて自由落下するエレベータを考えよう。普通のエレベータ一台が自由落下するならば、確かにその瞬間には等価原理により、重力の影響は相殺される。しかし、仮にエレベータがとてつもなく大きくて、地球の半径位だったとしよう（図 6）。エレベータの両端では重力の向きが異なるため、一つの慣性力で重力を相殺することは不可能だ。

つまり、すごく小さな領域で重力を消去できたとしても、より大きな空間・長い時間で運動を観測すれば、重力が働いていることがわかる。重力は小さな領域では相殺できても、大きな領域では消去できないのだ。アインシュタインは、重力の正体は時空のもつ特有の構造として説明できるのではないか、と考えた。

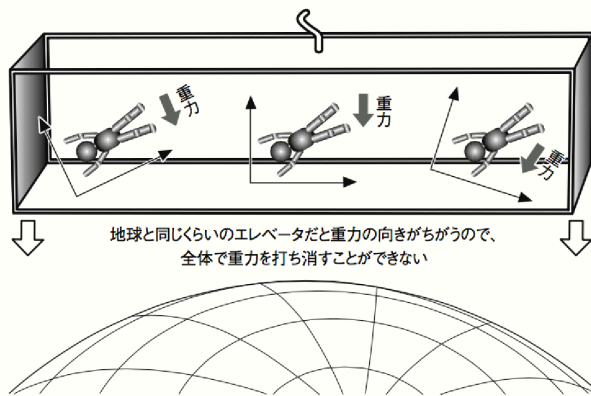


図 6: 小さな領域で重力を消去できたとしても、全体で重力を消すことはできない。地球の半径位大きなエレベータを考えれば、重力の方向が違うからだ。

33 歳のアインシュタインが、友人で数学者のグロスマン にこの考えを相談すると、グロスマンは当時完成していた「リーマン幾何学」の存在を教えた。平らな空間上での幾何学（ユークリッド幾何学）ではなく、曲がった時空の幾何学である。

等価原理
(equivalence principle)

Marcel Grossmann
(1878–1936)
Georg F.B. Riemann
(1826–66)

■曲がった空間とは何か

曲がった空間（3次元空間）のイメージは、地球儀の表面の曲がった平面（2次元面）を考えると理解しやすい。

図7に示すように、北極から赤道へ下りていき、赤道上を東へ進む。そして再び北極に行くルートの三角形を考えよう。赤道で2回直角に曲がっているのに、この三角形の内角の和は明らかに180度より大きくなっている。逆に馬の背につける鞍の上で三角形を描くと、三角形の内角の和は180度より小さくなる。机の上のような平らな平面（2次元面）では三角形の内角の和は常に180度であるが、世の中には曲がった空間が存在するのだ。曲がった空間では、ピタゴラスの定理（三平方の定理）を修正しなくてはいけなくなる。違う幾何学が必要になってくるのだ。

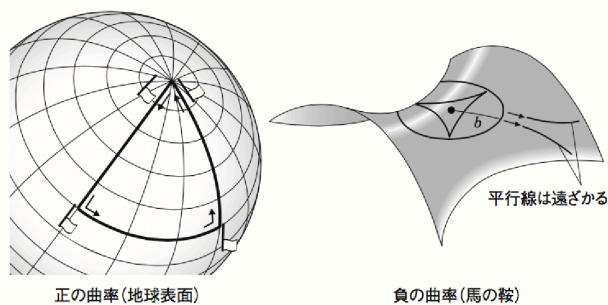


図7：地球儀の上で三角形を描くと、三角形の内角の和は180度より大きい。また、馬の背につける鞍の上で三角形を描くと、三角形の内角の和は180度より小さい。このような曲がった空間（平面）を扱う幾何学がリーマン幾何学である。旗を持ってこの三角形を一周するとき、旗を常に同じ向きに持っていたとしても、一周して戻れば旗は違う方向を向いている。これらのことから平面上の人は自分が曲がった平面にいることがわかる。

角度を測る代わりに、旗を常に同じ方向を向くように持ち歩いて一周してもよい。スタート位置に戻ってきたときに、旗が違う方向を向いていたら曲がった空間だった、ということになる。この考え方を一般化したのが、リーマン幾何学の曲率である。旗（正確にはベクトル）を持ってある点のまわりを一周したとき、旗（ベクトル）が元の向きと一致すれば、そこは平らな空間で曲率はゼロ。違う方向を向けば曲がった空間ということになる。

■重力場の方程式

アインシュタインはリーマン幾何学との格闘を数年にわたって続け、試行錯誤を重ねながら、ようやく「一般的な相対性理論」を完成させた。導いた式は、時空の計量関数 $g_{\mu\nu}$ （図8）に関する微分方程式で、次の「重力場の方程式」である。

重力場の方程式（アインシュタイン方程式）

重力の正体は、時空の歪みである。その関係は、次の式で表される。

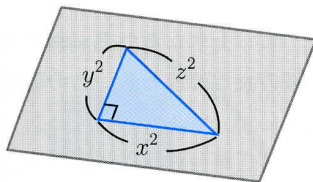
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (3)$$

左辺はリーマン幾何学に基づいて時空がどのように曲がっているのかを表す。右辺は物体がどのように分布しているのかを表す。

- μ, ν の添字は 4 次元の座標の成分 (t, x, y, z) を表していて、この式全体は具体的には 10 本の微分方程式である。
- 「物質が存在すれば時空が曲がる。時空が曲がると物質も（光も）それに添って動く」その作用を 1 つにまとめた美しい式である。

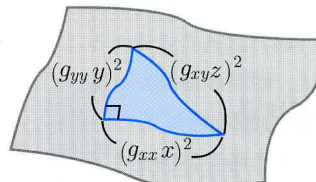
時空の曲がりを表す計量 $g_{\mu\nu}$

平らな面ではピタゴラスの定理が成り立つ。



$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

曲がった空間でも成立するために計量関数で調整する。



$$(g_{xx}x)^2 + (g_{yy}y)^2 - (g_{xy}z)^2 = 0$$

このように、曲がり具合は関数 $g_{\mu\nu}$ に押し付けて表すことができる。
アインシュタイン方程式は、3次元空間+時間の4次元の曲がり $g_{\mu\nu}$ を解く方程式である。

図 8: 空間の曲がり具合は、計量関数 $g_{\mu\nu}$ に押し付けて表すことができる。

3.2 一般相対性理論が予言する現象

3.2.1 水星の近日点移動：観測値を見事に説明

太陽系の惑星の運動は、海王星の発見の逸話に象徴されるように、ニュートンの運動方程式でほぼ正確に説明できることが知られている。

しかし、太陽に一番近い水星の軌道のズレは、1854 年から未解決として残されていた。水星は、他の惑星と違って、楕円運動とはならず、100 年で角度が 574 秒づつずれて、2250 世紀で完全な「ばら模様」を描くことが観測からわかっていた。このような運動を近日点移動という。水星は太陽の他からも重力を受けて動く。きちんと計算すると、一番近くにある金星の影響で 277 秒のずれがあり、一番重い惑星である木星の影響で 153 秒のずれ、地球の影響で 90 秒、その他の惑星で 10 秒分の説明が可能だった。しかし、これらを全部足しても、残りは 43 秒角あり、なかなか説明がつかなかった。

1915 年、アインシュタインが完成したばかりの一般相対性理論を太陽の

まわりの時空に適用すると、見事に水星が100年で「43秒の歳差運動をする」結果が出てきたのである。43秒角の分は、太陽の重力で時空がゆがみ、水星の運動がニュートンの運動方程式からずれた軌道を取ることが原因だったのだ。

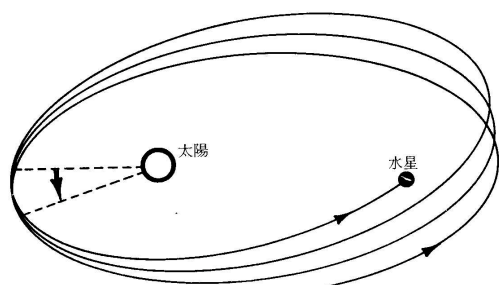


図9: 太陽にいちばん近い水星の軌道は、強い重力のため、きれいな楕円にならず、花びら模様を描くようにずれていく。太陽にもっとも近い点(近日点)がずれていくことから、近日点移動と呼ばれ、ニュートン力学では解決できない大きさだった。

3.2.2 重力レンズ

重力があれば、トランポリンの膜のように時空が歪む。この考えに従えば、光でさえも重い星の近くでは曲がることになる。重い星の近くを通る光は、星の方向に少しずつ曲がるので、星は凸レンズのような役割をすることになるだろう。この現象は、後に重力レンズ効果と呼ばれることになった。

重力レンズ (gravitational lens)

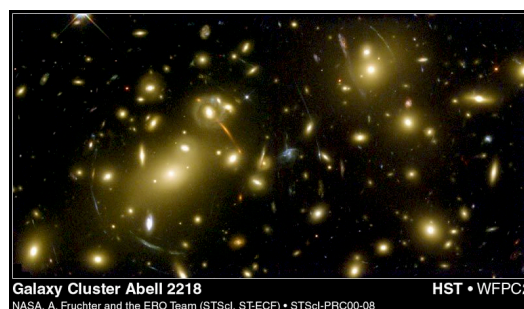
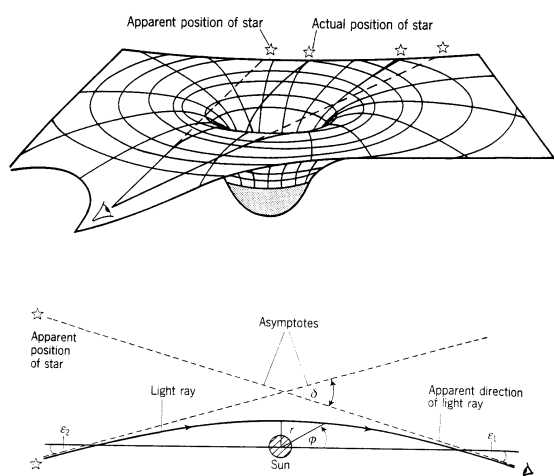


図10: [左] 強い重力源に近ければ、空間の歪みのため、光も直進できず曲がるはずである。重力レンズと呼ばれる現象で、太陽による重力レンズは1919年の皆既日食を利用して確認された。現在では、遠方の銀河が、手前の銀河(ブラックホール)によって、歪んだり複数に分離して見える重力レンズ現象が多数見つかっている。[右] アベル銀河団2218のまわりには、背後の銀河の光が重力レンズ効果で円周をつくるように見えている。

一般相対性理論の正しさを決定づけたのは、1919年にアフリカで見られた皆既日食である。一般相対性理論によれば、太陽の近くを通る光は、重力

レンズ効果で曲げられる。皆既日食の時に、太陽のすぐそばを通過した星の写真を撮って、通常の星の位置との違いを測れば、重力レンズ効果の有無がわかることになる。

天文学者のエディントン を隊長とする観測隊が組織され、観測は南大西洋にあるスペイン領赤道ギニアの海岸沖プリンシペ島で行われた。測定結果が発表されたのは、11月になってからだったが、エディントンの観測結果は、一般相対性理論の予想通りの光の曲がり具合を示していた。太陽に近い光ほど差が大きく、光の曲がり量は1.31秒角から2.28秒角で、相対性理論の予想値1.73秒に近いものだった。

この劇的な結果は、世界各地の新聞に「アインシュタインの勝利」「ニュートン理論をくつがえす」などと大々的に報道され、アインシュタインは一夜にして有名になった。

Sir Arthur S. Eddington
(1882–1944)

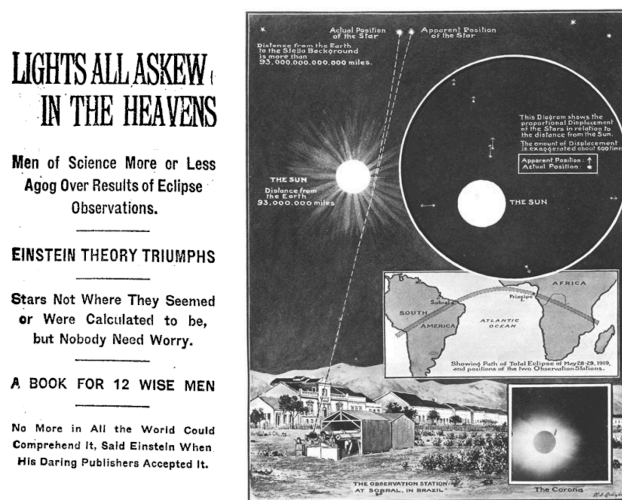


図 11: 1919年5月29日の皆既日食で、太陽の近くを通る星の光が、本来の位置よりずれて見えたことが確認された。「アインシュタインの勝利」と見出しで伝える Illustrated London News (1919年11月22日号)。

3.2.3 ブラックホール

アインシュタイン方程式(3)を、もっとも簡単な仮定(球対称・静的・真空のもと)で解いたのは、シュヴァルツシルトである(1916年)*2。この解は、シュヴァルツシルト解とも呼ばれ、今ではブラックホールを表すことが分かっている。この解には、無限大となってしまう半径が2つあり、その解釈にアインシュタインも苦しんだ。

Karl Schwarzschild
(1873–1916)

第1次世界大戦の従軍先で解を導出し、戦死。この解はアインシュタインの論文に引用されている。

*2 アインシュタイン方程式(3)を、球対称(計量は動径座標 r のみに依存)・静的(計量は時間に依存しない)・真空($T_{\mu\nu} = 0$)のもとで解くと

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4)$$

となり、これは、ブラックホール計量を表す。 r は原点からの動径座標である。

- $r_g \equiv 2GM/c^2$ より内側の領域からは、光の速さでもその外側に脱出することはできない。そのためブラックホールと呼ぶ。
- $r = r_g$ のところで計量が無限大になるが、この点は質量 M のブラックホールの半径に相当する。シュヴァルツシルト半径とも呼ばれる。ブラックホールの境界として、事象の地平面とも呼ぶ。

事象の地平面
(event horizon)

物理的に無限大はあってはならない点である。座標点 $r = r_g$ のところで計量が特異になるのが当初は不明であったが、現在では、座標の取り方を工夫すると、無限大にはならないことがわかっている。しかし、 $r = 0$ のところの無限大は除去できず、座標特異点と呼ばれる。つまり、一般相対性理論は、その解として、一般相対性理論が適用できない特異点を含んでしまうのだ。非常に奇妙なことである。

ブラックホールという言葉の誕生も、相当する天体の発見も、アインシュタインの死後のことだ。

3.3 ブラックホールに関するパラドックス

ブラックホールは、光が遠方へ脱出できない領域である。その境界である「事象の地平面」は、ひとたび中に入れば二度と外側には出てくることのできない。「事象の地平面」そのものは、普通の空間なので、特に実感なく通過できてしまう。

ブラックホールに落ち込むまでには無限の時間がかかる

ブラックホールに落下していくロケットが 10 秒ごとに SOS の信号を地球に向けて発信していたとする。地球では、だんだんと信号の間隔が伸びてきて、ロケットがブラックホールに落ち込むまでに無限の時間がかかる。

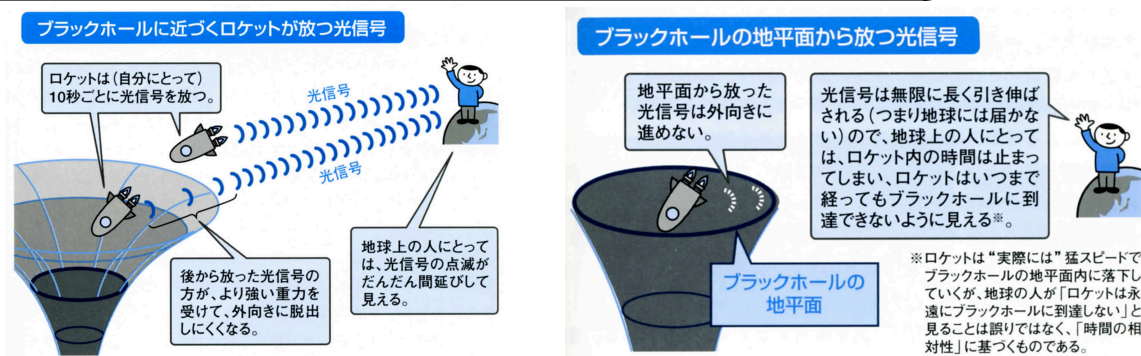


図 12: ブラックホールに落ち込むまでには無限の時間がかかるように見える。

ブラックホールに捕まってしまったロケットは、知らぬ間に「事象の地平面」を超え、重力で一瞬で引き裂かれてその運命を終える。しかし、ロケットから地球に向けて発信した電波は、ブラックホールの近くでは重力が強いためになかなか外側へ進めない。そのため、ロケットが「事象の地平面」に

近づくほど、信号の間隔は間延びして、「事象の地平面」では、その間隔は無限大になる。つまり、地球ではロケットがブラックホールに入る前にゆっくりと立ち往生しているように見えることになる（図 14）。パラドキシカルに聞こえるが、これも時間の相対性によって生じる事実である。

重力が強いところでは、時間の進み方は相対的に遅くなる。このことは、よく SF 映画などでも使われるネタでもある。また、GPS のシステムでは、人工衛星の高度と地表での時間の進み方の違いを考慮しないと、誤差が拡大して使い物にならないこともわかっている。最近、精密な時計（光格子時計^{*3}）を用いて、東京スカイツリーの展望台（高さ 450m）と地表での時間の進み方の違いが測定され、アインシュタインの式が予言する通りに地表の方が時間の進み方が遅くなることも確かめられた [4]。

■物理学者の考えるブラックホール，天文学者の考えるブラックホール

ここまでの説明は、物理学者の定義するブラックホールである。ブラックホールは、光さえも脱出できない領域であり、「事象の地平面」の内側で定義され、その内部には「時空特異点」が存在する。ところが、天文学者は次のように考える。

ブラックホールは明るい天体である

普通の天体では考えられないようなエネルギーを放出している天体は、ブラックホールである。

実は、初めてブラックホールの候補天体となったのは、はくちょう座で発見された激しく X 線を放出している天体 (Cyg-X1) だった。非常に小さな領域から、活発に変化する X 線が観測され、その原因として、ブラックホールに吸い込まれていく星のガスが光っていると考えられている。ガスの分子はブラックホールに巻き込まれながら高速で飲み込まれていく（降着円盤 accretion disk）。その過程でガスの分子が激しくぶつかり合って光を放つのだ。

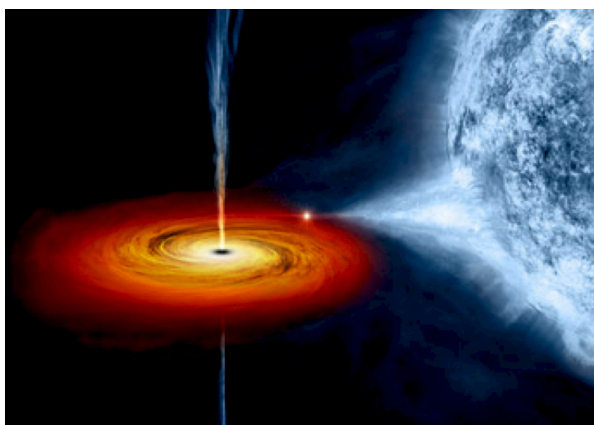


図 13: ブラックホールに落下していくガスの分子が激しくぶつかり合って、高い温度で輝く。(想像図)

^{*3} 現在の時刻の基準としている原子時計の 1000 倍の精度をもち、300 億年で 1 秒しかずれない精度を持つ時計で、東京大学・理化学研究所の香取秀俊氏が考案し開発している。

宇宙には銀河系が多数存在している。そして、それぞれの銀河系の中心には超巨大なブラックホールが存在していると考えられている。例えば、私たちのいる天の川銀河の中心には、太陽質量の 400 万倍のブラックホールがいることが、その周囲の天体の運動からわかっている。天の川銀河の中心には、すでに星間ガスがなくなっているが、もしガスがあったとしたら、大きな降着円盤が作られることになる。角運動量保存則により、中心部分では円盤は高速に回転している。ブラックホールは、そのガスを順に飲み込んでいくが、高速に回転しているガスの中には、ブラックホールへ捕らえられないものも発生する。そうすると、ブラックホールの回転軸に相当する上下2つの方向が抜け道として残されている。つまり、銀河面に垂直な方向へ、ガスがジェットのように吹き出すことになる。これは、誕生したばかりの若い銀河（遠方の銀河）に見られ、活動銀河核 (active galactic nuclei) とも呼ばれる現象で、理論的に予言されていたものだが、現実に存在している。

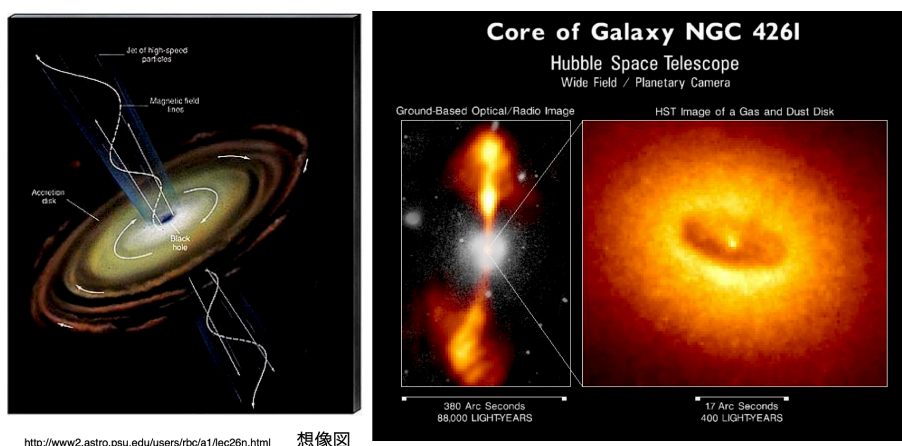


図 14: 銀河中心からジェットが吹き出す。(左は想像図, 右は実際にハッブル望遠鏡で観測されたもの)

参考文献

- [1] 真貝寿明, 「図解雑学 タイムマシンと時空の科学」(ナツメ社, 2011)
- [2] 真貝寿明, 「ブラックホール・膨張宇宙・重力波 一般相対性理論の 100 年と展開」(光文社新書, 2015)
- [3] 真貝寿明, 「現代物理学が描く宇宙論」(共立出版, 2018)
- [4] M. Takamoto, I. Ushijima, N. Ohmae, T. Yahagi, K. Kokado, H. Shinkai and H. Katori, "Test of general relativity by a pair of transportable optical lattice clocks", Nature Photonics 14, p 411–415 (2020)