

## 付録 A 特殊相対性理論 (追加資料)

### A.1 電磁気学をめぐる混乱

電磁気学については、第 4 回の講義テキスト (p34) にて説明したが、マクスウェルがまとめた電磁気学の方程式は次のようになる。

#### 電磁気学の基礎方程式

次の 4 本の方程式から成り立つ。  $\mathbf{E}$  は電場ベクトル、  $\mathbf{B}$  は磁場ベクトル、  $\rho$  は電荷密度、  $\mathbf{j}$  は電流ベクトル、  $c$  は光速とする。また、  $\nabla$  は微分演算子とする。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (\text{付録 A.1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{付録 A.2})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (\text{付録 A.3})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (\text{付録 A.4})$$

電磁気学の基礎方程式  
(Maxwell 方程式)

大学で理工系に進むと  
習う式。

具体的には、各ベクトルは

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}, \quad \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{付録 A.5})$$

などと書け、  $\cdot$  と  $\times$  はベクトルの内積と外積を表す。したがって、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y \\ \frac{\partial}{\partial z} E_x - \frac{\partial}{\partial x} E_z \\ \frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x \end{pmatrix} \quad (\text{付録 A.6})$$

などとなる。

このマクスウェル方程式が登場すると、なぜ光速  $c$  が陽に登場するのか、という点が問題となった。(付録 A.3) を時間微分して (付録 A.4) を用いると、(同様に (付録 A.4) を時間微分して (付録 A.3) を用いると)

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \mathbf{E} = 0, \quad \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \mathbf{B} = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{付録 A.7})$$

となって、これは速度  $c$  で伝わる電磁波の存在を表している。真空中で波が伝わる理由も不明となった。これらがエーテル説を誕生させた。

**(特殊) 相対性理論(1905年)**

- 発端：  
電磁気学の式に出てくる「光速 $c$ 」は誰から測った速さなのか、光は真空中でも伝わるのか。
- 当時の考え：  
光はエーテル中を伝わる。「光速 $c$ 」は座標系によって変化するはずだ。ただし、エーテルは未発見。...
- アインシュタインの考え：  
光速度は誰から見ても一定、光は真空中でも伝わり、物理法則は座標系によらず不変のものでなければならない。

$$E = mc^2$$

- 発端：  
相対性理論の考えにより、運動法則をどの座標から見ても同じ形になるように書き換えると登場した。
- 意味するもの：  
質量とエネルギーは同じ。原子核反応により、世の中から質量がわずかでもなくなれば、莫大なエネルギーが得られる。
- 応用：  
核融合反応：星の輝く原理、水素爆弾  
核分裂反応：原子爆弾、原子力発電

**A.5 最も有名な物理の公式・・・ $E = mc^2$** 

質量とエネルギーの等価性を説明する

$$E = mc^2$$

の導出のところで、テキスト p106 では、

$$E = mc^2 \frac{dt}{d\tau} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \dots$$

という式展開を書いた。最後の等式の部分は、テーラー展開 (級数展開) を用いている。

テーラー展開とは、関数  $f(x)$  の  $x = x_1$  での値  $f(x_1)$  とその微分値をもとにして、 $x = x_2$  での値  $f(x_2)$  を求める公式で、 $\Delta x = x_2 - x_1$  として、

$$f(x_2) = f(x_1) + \frac{d}{dx}f(x_1) (x_2 - x_1) + \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dx^2}f(x_1) (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3}{dx^3}f(x_1) (x_2 - x_1)^3 + \dots \quad (\text{付録 A.8})$$

という式である。  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  に対して、  $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$  であり、  $x_1 = 0, x_2 = x$  としてこの式を使うと、

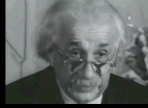
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \dots \quad (\text{付録 A.9})$$

となる。

テーラー展開  
(級数展開)

### 特殊相対性理論は正しいか？

- 光速度一定  
疑う余地なし
- 時間の遅れ  
宇宙線による素粒子の寿命  
原子時計を用いた飛行機実験  
GPS衛星からの電波
- $E=mc^2$   
原子核実験, 原子力発電に応用
- 素粒子理論は特殊相対性理論をベースにして構築されており, この前提が崩れればたいへんなことになる。



Einstein 自身による  $E = mc^2$  の説明

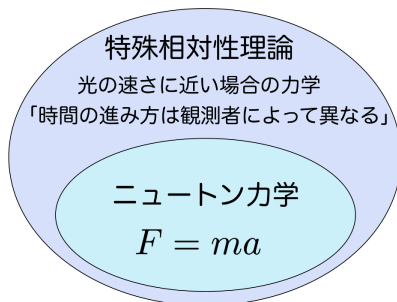
It followed from the special theory of relativity that mass and energy are both but different manifestations of the same thing — a somewhat unfamiliar conception for the average mind.

Furthermore, the equation  $E = mc^2$ , in which energy is put equal to mass, multiplied by the square of the velocity of light, showed that very small amounts of mass may be converted into a very large amount of energy and vice versa.

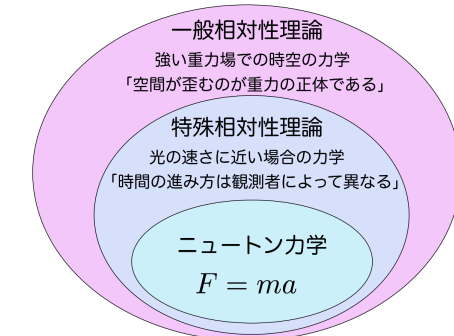
The mass and energy were in fact equivalent, according to the formula mentioned before. This was demonstrated by Cockcroft and Walton in 1932, experimentally.

アインシュタインの言葉：「特殊相対性理論より、質量とエネルギーはどちらも同じものを違う形で表現していることが導かれます。これは、これまでの考えにはなかった概念です。さらに、 $E = mc^2$  の式、これはエネルギーは質量に光速の 2 乗を乗じたものだという式ですが、ほんの少しの質量が、とても大きなエネルギーに変換される、あるいはその逆も起こり得る、ということを示しています。この公式によって、質量とエネルギーの等価性がいえるのです。そして、コックロフトとウォルトンによる 1932 年の実験で、このことが正しいことが示されました」

#### ニュートン力学から特殊相対性理論へ



#### 特殊相対性理論から一般相対性理論へ

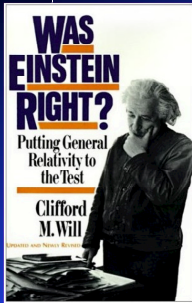


## 付録 B 一般相対性理論 (追加資料)

### 一般相対性理論(1915年)

- 発端：  
1905年の相対性理論では、加速度を扱えなかった。  
加速度の正体は何だろうか？  
加速度を生じさせる重力とは何だろうか？
- ブレークスルー：  
エレベータの自由落下で重力が消える！  
だけど、地球の大きさのエレベータでは消せない。
- アインシュタインの結論：  
重力の正体は時空の歪みである。

### アインシュタインは正しかったか？



- ✓ 水星の近日点移動
- ✓ 重力レンズ効果の観測
- ✓ 連星中性子星の軌道の変化の観測
- ✓ GPS
- ✓ レーダーエコーの遅れのテスト
- ✓ 等価原理のテスト

一般相対性理論は、  
**99.9999%**  
正しい。

## 2つの相対性理論の比較

	特殊相対性理論	一般相対性理論
提案者と年代	アインシュタイン (1905 年)	アインシュタイン (1915 年)
理論の骨子	光速に近い状態の運動を記述する	強い重力場での運動を記述する
理論の動機	エーテルの存在は必要か？ マクスウェル方程式に登場する $c$ の意味は？	加速度を含めた相対性理論は？
動機への回答	エーテルは不要。光速度は一定。	重力加速度は局所的には消せるが大域的には消せない。
理論の予言	時間の進み方は観測者によって異なる。 質量とエネルギーは等価である ( $E = mc^2$ )	重力の正体は時空の歪みである。 時空の歪みは重力波として光速で伝わる。
実験的証拠	宇宙飛来のミュオン中間子の寿命, GPS 衛星の時計の遅れ, 原子時計を用いた飛行機実験 原子核実験, 原子力発電に応用	水星の近日点移動を説明できる 皆既日食時に太陽の近くで光が湾曲して進む
応用	星の燃焼理論・素粒子理論 GPS 衛星の速度補正	ブラックホール・宇宙論・重力波 GPS 衛星の重力補正
現状	疑う余地なし	他の重力理論は棄却

## 練習問題

- A.1 特殊相対性理論によると、速度  $v$  で移動している物体中での時間  $T'$  は、静止している人  $T$  に比べて  $T' = \sqrt{1 - (v/c)^2} T$  となる。ここで  $c$  は光速度である。
- 時速 900 km の旅客機に 10000 時間乗務した乗務員は、地上の人に比べて何秒未来の世界にたどりついたといえるか。
  - 光速の 60% の速さで飛ぶロケットがある。地球で 100 年に相当する時間が経過したとき、ロケット内では何年経過したか。光の速度は  $c = 3.0 \times 10^8$  [m/s] とする。
- A.2 核分裂と核融合の違いは何か。何故、2つの反応が存在するのか。
- B.1 ブラックホールの半径 (重力半径)  $R$  は、シュワルツシルドによって、 $R = \frac{2GM}{c^2}$  で与えられる。ここで  $G$  は万有引力定数で  $G = 6.67 \times 10^{-11}$  [(m/s)<sup>2</sup> · m/kg]、 $c$  は光速度で  $c = 3.0 \times 10^8$  [m/s] であり、 $M$  [kg] は考える質量である。次の天体がブラックホールになった場合の大きさを求めよ。(テキスト p18 に数値あり)
- 地球,
  - 太陽,
  - 天の川銀河の銀河中心核 (太陽質量の 400 万倍)