宇宙物理・数理科学研究室　Astrophysics & Mathematical Sciences

宇宙の膨張シミュレーション

卒業研究中間報告　C10-075　東田有記

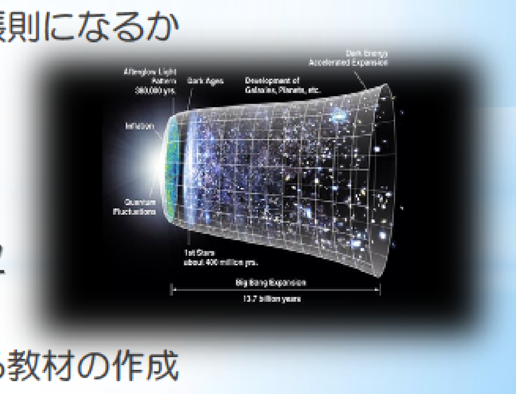
*動機・目的

□ 動機

宇宙の未来に興味

- 宇宙の広がり方、今後どのような姿になっていくか

➡ 宇宙を構成する物質の割合が異なると どのような宇宙の膨張則になるか



□ 目的

宇宙膨張の様子のシミュレーション

対象：宇宙に興味のある学生

- 宇宙の膨張の法則を学習できる教材の作成

Illustration: 「NASA/WMAP Science Team」

*宇宙モデルとは（1）

□ フリードマン宇宙モデル

1．FRW計量（フリードマン-ロバートソン-ワーカー）

- 宇宙を表現する計量

微小距離の二乗

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)\right]$$

2．エネルギー運動量テンソル

- 宇宙を満たしている物質は完全流体であると仮定

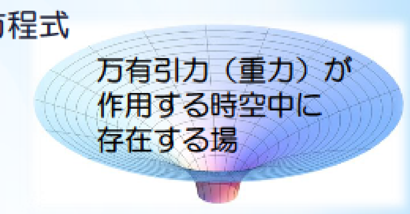
$$T^i_j = \frac{(\rho c^2 + p)u^i u_j}{c^2} + p\delta^i_j = \begin{pmatrix} -\rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

*宇宙モデルとは（2）

3．アインシュタイン方程式・・・重力場の方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

FRW計量、エネルギー運動量を代入



＜フリードマン方程式＞

① (0,0)成分　$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}c^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}c^2$　(1)

② 空間成分　$2\frac{\ddot a}{a} + \left\{\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}c^2\right\} = -8\pi G\frac{p}{c^2} + \Lambda c^2$　(2)

③ 状態方程式　$p = f(\rho)$　(3)

宇宙の大きさ$a(t)$を計ることができる!

Illustration: http://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%87%8D%E5%8A%9B%E5%A0%B4

*宇宙膨張の未来

*曲率（空間の曲がり具合）の違いにおける3つの空間のあり方

1．開いた宇宙

曲率k＝-1

永遠に膨張を続ける

2．平坦な宇宙

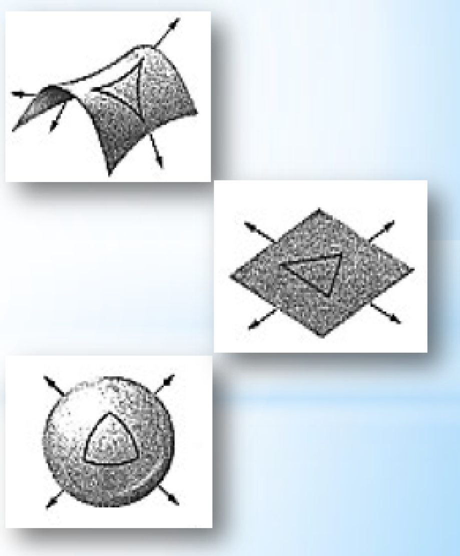
曲率k＝0

遠い未来に静止する可能性

3．閉じた宇宙

曲率k＝+1

膨張が止まり収縮が始まる



*プログラム

*環境　開発言語　C言語

開発ソフト　Microsoft visual studio 2010

*使用解法

ルンゲ=クッタ法

- 常微分方程式の近似解を求める解法，より高精度な計算を簡単に行う

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\begin{cases} k_1 = \Delta x f(x_n, y_n) \\ k_2 = \Delta x f\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 = \Delta x f\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 = \Delta x f(x_n + \Delta x, y_n + k_3) \end{cases}$$

＜ 仮定 ＞

・状態方程式　：　$p = (\gamma - 1)\rho$　ただし、γ =4/3

→ある物質(流体)が宇宙を満たしている状態

・光速　：　C=1

・万有引力定数：　G=1

→「無次元」量として計算

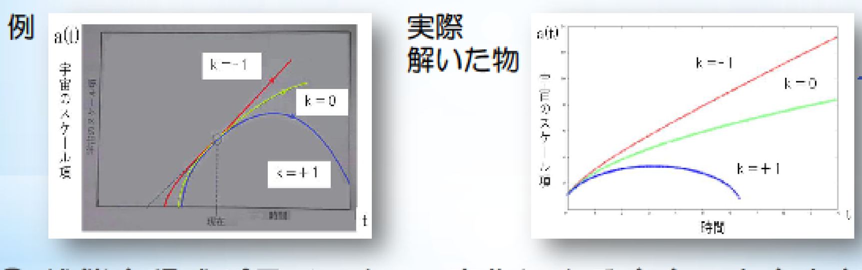
*プログラム ―宇宙の大きさ

① 宇宙の大きさ a(t) を測る

- 宇宙膨張の様子を時間経過 t で示す（現在は t ＝0）

- フリードマン方程式をルンゲ=クッタ法で解く

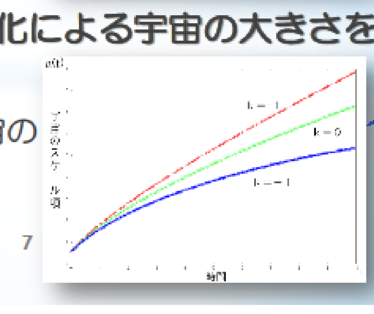
例　実際解いた物



② 状態方程式パラメータγの変化による宇宙の大きさを測る

＜γ=1の場合＞　$p = (\gamma - 1)\rho$

・宇宙に圧力pがない場合の宇宙の大きさをγ =4/3の場合と比較



*プログラム ―宇宙年齢（1）

③ 宇宙年齢を測る

・**ハッブルの法則**… 天体が遠ざかる速さ v とその距離 D が正比例

$$v = H_0 D$$

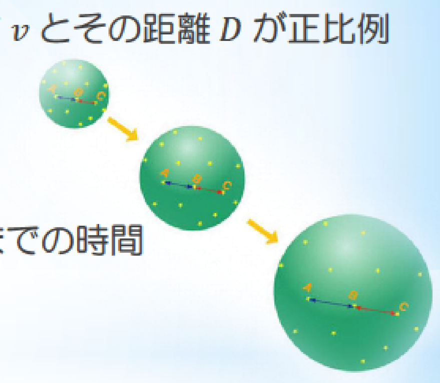
ハッブルパラメータ H …時間変化する

H_0($H(0)$)…現在のハッブル定数

・**宇宙年齢とは**… 宇宙の始まりから今までの時間

→ハッブル時間が宇宙年齢の目安！！

… ハッブル定数の逆数 H^{-1}で表す



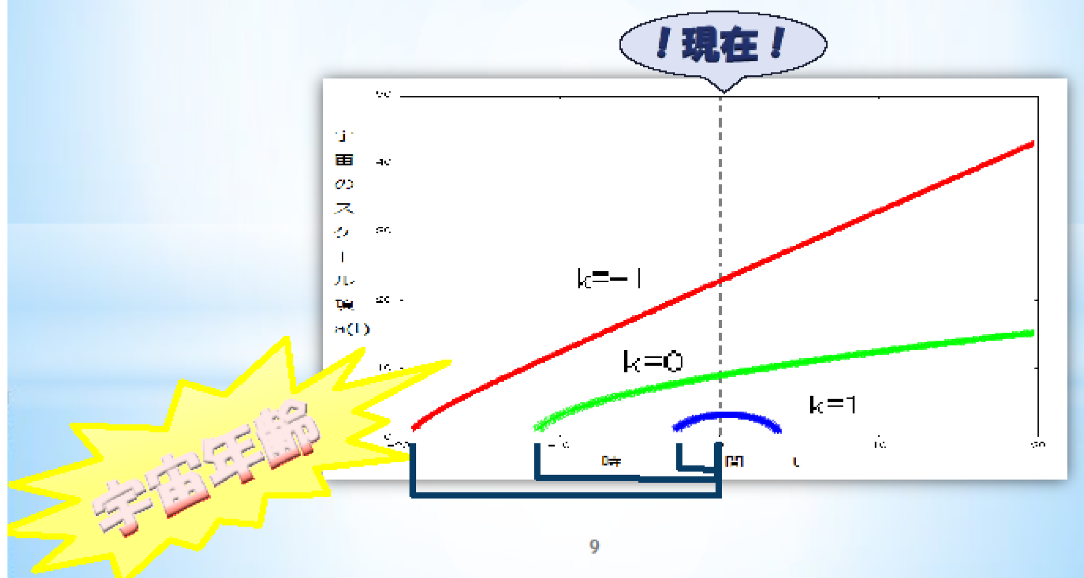
ハッブル定数H_0を決め、宇宙年齢を考慮した宇宙のスケール項$a(t)$の時間変化をグラフ化

Illustration: 「膨張する宇宙」http://astr.phys.saga-u.ac.jp/~funakubo/BAU/chapter1/chapter1-2.html

*プログラム ―宇宙年齢（2）

・現在のハッブル定数H_0を決め、

その宇宙年齢H^{-1}における宇宙の大きさの時間変化



*宇宙論パラメータとは

● 宇宙論パラメータ

- 宇宙を構成している要素

● パラメータを定義する

* ハッブルパラメータ　H=100h kms$^{-1}Mpc^{-1}$
* 曲率パラメータ　$\Omega_k = \frac{k}{aH}$
* 密度パラメータ　$\Omega_{tot} = \frac{\rho}{\rho_c}$

ρ　エネルギー密度

ρc　臨界密度(定数)

総和：　$\Omega_{tot} = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_v$

・圧力のない物質　Ω_m

・相対論的粒子　Ω_r

・真空における現在の密度パラメータ　Ω_v

以上のパラメータでフリードマン方程式を変換

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_v + \Omega_k = 1$$

パラメータの総和＝1になるように値を自由に設定

新たな宇宙の膨張の様子を知ることができる

*今後の目標

□ 宇宙論パラメータを考慮したツールの作成

・パラメータの割合に応じてハッブル定数や宇宙年齢を計算

・膨張の様子を学習できるツール

→ パラメータを画面上で自由に変更できるよう仕様変更

● 作成プログラムの変更イメージ

（データは適当）