

卒業研究概要

提出年月日 2015年1月31日

卒業研究課題 4次元の Lotka-Volterra モデルにおけるカオス

学生番号 Q10-025

氏名 笠木 悠司

概要 (1000字程度)

指導教員 真貝 寿明

印

数理生物学と呼ばれる学問は近年飛躍的に発展しており、様々な数理モデルが構築・解析・検証されている。そこで本研究では、「Lotka-Volterra モデル」と呼ばれる生物の個体数に関連するモデルを解析して理解を深める。J. A. Vano ら [1] は、4次元 (即ち 4 種類の生物) の Lotka-Volterra モデルで特定の定数を与えると「カオス」と呼ばれる現象が発生し、1~3 次元においてはそれが発生しないと結論付けている。このモデルの一般性を研究した。

一般的に知られている Lotka-Volterra モデルは、2次元の個体数の増減関係を測るモデルであるが、本研究では [1] に準じて、以下の式を用いた。

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i x_i \left(1 - \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j \right)$$

ここで、 N は生物の種類 (N 次元) を、 x_i は生物 i の個体数を、 r_i は生物 i の成長率を、 a_{ij} は生物 j が生物 i に与える影響を表す。数値解析は 4 次精度の Runge-Kutta 法を用いた。

例として、4次元の Lotka-Volterra モデルにおける各生物の個体数を図 1、図 2 にそれぞれ示す。図 1 は [1] に記載されていたカオス解の定数を与えたとき (本研究では Vano モデルと呼ぶ)、図 2 は自分が用意した定数を与えたとき (本研究ではモデル 1 と呼ぶ) の個体数の変遷である。

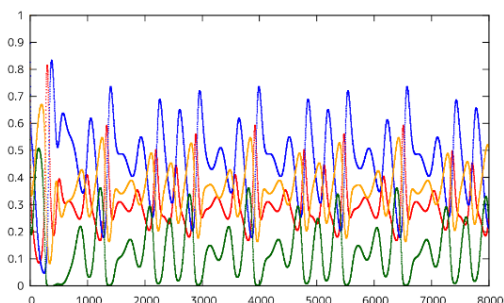


図 1 Vano モデルの個体数の変遷
横軸: n 縦軸: 各生物の個体数

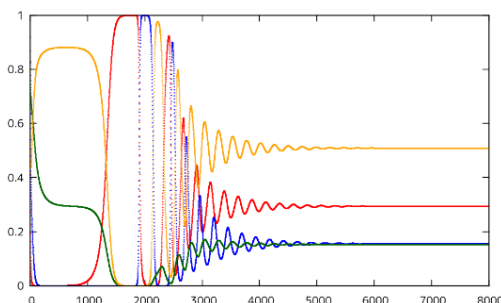


図 2 モデル 1 の個体数の変遷
横軸: n 縦軸: 各生物の個体数

ここで、赤線は生物 1、青線は生物 2、緑線は生物 3、橙線は生物 4 の個体数を表す。図 1 は収束せず解の増減が繰り返されているが、図 2 は全ての生物の個体数が収束し不変となった。

カオスが発生するかを調べる手法として、正の値になると初期値鋭敏性があると判断される指標となる Lyapunov 指数がある。Vano モデルで Lyapunov 指数を計算したところ、0 に近い負の値になり、初期値に鋭敏ではないという結果になった。しかし、Vano モデルの係数を数%変えると周期的な、あるいは収束点に落ち込む振る舞いになり、彼らのカオスは非常に限られた弱いものであることが分かった。

論文では上記の他に、カオスの基礎となる Logistic 写像や、4次元の同時プロットを実現することのできる正四面体座標系についても論じている。

[1] J.A.Vano, et al. 『Chaos in Low-Dimensional Lotka-Volterra Models of Competition』 Nonlinearity, 19 (2006) 2391.