

卒業論文
重力レンズ効果を想定した回転ブラックホールの周りの
粒子の軌道

大阪工業大学
情報科学部 情報科学科
学生番号 A05-011
入江 庄一

2009年2月9日

目次

1	序論	3
1.1	背景	3
1.2	本研究の目的・概要	3
1.3	本研究の構成	3
2	ブラックホール時空での粒子の運動と光の軌跡	4
2.1	ニュートン力学での運動	4
2.2	シュバルツシルト計量	4
2.3	シュバルツシルト時空での粒子の運動	4
2.4	重力による光線の折れ曲がり	6
2.5	光の曲がる角度	7
2.6	カー計量	8
3	シュバルツシルト計量での重力レンズ効果	10
3.1	Runge-Kutta 法	10
3.2	ニュートン力学での粒子の軌道	11
3.3	粒子の曲がる角度の計算	11
3.4	シュバルツシルト計量での粒子の軌道の計算	12
3.5	シュバルツシルト・ブラックホールでの重力レンズ効果	12
4	カー計量での重力レンズ効果	14
4.1	カー計量での粒子の軌道の計算	14
4.2	カー・ブラックホールでの重力レンズ効果	14
5	まとめ・結論	16
A	ニュートン力学での粒子の軌道を求めるプログラム	17
B	カー計量での粒子の軌道を求めるプログラム	20

1 序論

1.1 背景

重力レンズとは、重力によって光の進路が曲げられる現象である。1916年にアインシュタインが一般相対性理論で予言した。エディントンによって1919年の日食時に初めて観測されて、その結果がアインシュタインが予言した理論とほぼ一致した。これは一般相対性理論の予言が正しいことを示した初めての観測であった。

1.2 本研究の目的・概要

本研究の目的は、ニュートンの運動方程式、シュバルツシルト計量での粒子の軌道を求める方程式、カー計量での粒子の軌道を求める方程式を、それぞれ解き、ブラックホールの周りの粒子の軌道を図示することである。シュバルツシルト計量とは、回転しないブラックホールを表わす計量であり、カー計量とは、回転するブラックホールを表わす計量である。

ブラックホールの近くを通る粒子の軌道を、ニュートン方程式をRunge-Kutta法を解くことによって求める。粒子がブラックホールに最も近づいた時から計算を始め、その時の距離を変化させた時に軌道がどのように変化するかを確認する。また、粒子の出発点を固定し、粒子の飛び出す角度を変えて、粒子がブラックホールに吸収されない最小の角度と、粒子が飛び出す角度とその時の曲がった角度を求め、一般相対性理論の光がブラックホールの重力で曲がる角度を求める公式に代入して、ニュートン方程式での計算が一般相対性理論の公式でどの程度正確に計算できるかを確認する。

シュバルツシルト計量での粒子の軌道を求める方程式を解く。そして、光が曲がる角度を求め、光がブラックホールの重力で曲がる角度を求める公式と等しくなるかを確認する。

カー計量の方程式を解き、ブラックホールが回転している場合と回転していない場合の軌道の違いを確認する。また、ブラックホールが光と同じ方向に回転している場合と逆方向に回転している場合の軌道の違いを確認する。

1.3 本研究の構成

本論文の構成は以下の通りである。第2章では、球対称な重力場での粒子の運動について説明する。第3章では、シュバルツシルトブラックホールでの重力レンズ効果のシミュレーションの方法を説明し、シミュレーションの結果と考察を述べる。第4章では、カーブラックホールでの重力レンズ効果のシミュレーションの方法を説明し、シミュレーションの結果と考察を述べる。

2 ブラックホール時空中での粒子の運動と光の軌跡

本章では、研究のテーマとするブラックホール時空中について、粒子の運動や光の運動を記述する基本方程式について述べる。

2.1 ニュートン力学での運動

万有引力によって生ずる運動は、ニュートンの運動方程式によって表わされる。原点の物体の質量を M 、運動する物体の質量を m 、2つの物体の重心間の距離を r とすると、

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{Mm}{r^2} \quad (2.1)$$

と表わされる。球対称時空中でニュートン力学は、原点の物体に近づく軌道と原点の物体から離れていく軌道が対称である。日常の生活圏ではこの式を解くことで十分正しいが、強い重力の働く世界では、一般相対性理論を考える必要がある。

2.2 シュバルツシルト計量

シュバルツシルト計量とは、球対称真空解の重力場の方程式

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) (cdt)^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.2)$$

の計量である。シュバルツシルト計量は十分遠方ではニュートンの万有引力と一致するが、半径が

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.3)$$

で発散する。 G は万有引力定数、 M はブラックホールの質量、 c は光の速度である。この半径をシュバルツシルト半径という。ブラックホールは重力崩壊により、この半径より小さく収縮した天体である。(2.2) は回転のない球対称のブラックホールを表わす。

2.3 シュバルツシルト時空中での粒子の運動

(2.1) に対応して、(2.2) の時空中での運動方程式を導出する。文献 [1] を参考にした。重力場の粒子のラグランジアン¹は、固有時間を τ とすると

$$L = -mc \left\{ -g_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} \right\}^{1/2} \quad (2.4)$$

である。 $g_{ij}(x^i)$ は計量テンソルといい、リーマン空間の距離を定義する。

形式的にラグランジアンを L としたまま、作用最小の条件²からオイラー方程式を求めると

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial u^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \quad (2.5)$$

¹運動エネルギーからポテンシャルエネルギーを引いた値

²経路に沿った固有時間が極大になる

が得られる。ここで $u^i \equiv dx^i/d\tau$ は 4 元速度である。運動量は

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial u^i} = m g_{ij} u^j \quad (2.6)$$

である。ラグランジアン (2.4) は座標 x^i を含まないので、オイラー方程式の第 2 項 $\partial L/\partial x^i$ はゼロである。したがって、オイラー方程式の第 0 成分は

$$\frac{dp_0}{d\tau} = 0 \quad (2.7)$$

である。積分すると

$$p_0 = \text{積分定数} = m c \epsilon \quad (2.8)$$

である。ここで積分定数を $m c \epsilon$ とし、無次元の量 ϵ を導入しておく。具体的に (2.6) に g_{00} 成分の式を代入し、 p_0 を求めると

$$\begin{aligned} p_0 c &= -m c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \\ &= m c^2 \epsilon \end{aligned} \quad (2.9)$$

となる。一方、第 3 成分 (ϕ 成分) は

$$\frac{dp_3}{d\tau} = 0 \quad (2.10)$$

で、同様に積分すると、 $p_3 = m c r_g l$ である。ここでは積分定数を $m c r_g l$ とし、無次元の量 l を導入した。具体的に (2.6) に g_{33} 成分の式を代入すると

$$p_3 = m r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} = m r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = m c r_g l \quad (2.11)$$

となる。ここで、後の計算が簡単になるように、粒子の軌道面を $\theta = \pi/2$ ($\sin \theta = 1$) とした。明らかに、 ϵ は粒子のエネルギー E を静止質量エネルギーで規格化した無次元エネルギー、 l は角運動量 L を $m c r_g$ で規格化した無次元角運動量である。

$$\epsilon = \frac{E}{m c^2}, \quad l = \frac{L}{m c r_g} \quad (2.12)$$

r 方向の運動を決めるために、オイラー方程式の第 2 成分 (r 成分) を用いてもよいが、運動量ベクトルの長さが

$$p^i p_i = g^{ij} p_i p_j = -m^2 c^2 \quad (2.13)$$

であることを用いると、後の計算に便利な

$$-c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = -c^2 \quad (2.14)$$

が得られる。(2.9),(2.11) を代入し整理する。

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = (\epsilon^2 - 1) + \frac{r_g}{r} - \frac{r_g^2}{r^2} l^2 + \frac{r_g^3}{r^3} l^2 \quad (2.15)$$

さらに、固有時間での微分を (2.11) を用いて ϕ の微分に置き換える。

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{r^4}{r_g^2 l^2} \left\{ (\epsilon^2 - 1) + \frac{r_g}{r} - \frac{r_g^2}{r^2} l^2 + \frac{r_g^3}{r^3} l^2 \right\} \quad (2.16)$$

これが求める粒子の軌道の方程式である。取り扱いを簡単にするために

$$u \equiv \frac{r_g}{r} \quad (2.17)$$

を定義すると、軌道運動の式は

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{l^2} (\epsilon^2 - 1) + \frac{1}{l^2} u - u^2 + u^3 \quad (2.18)$$

となる。一方、ニュートン力学でのケプラー運動の式は

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{l^2} (\epsilon^2 - 1) + \frac{1}{l^2} u - u^2 \frac{d^2 u}{d\phi^2} = \frac{1}{2l^2} - u \quad (2.19)$$

であり、相対論的な式 (2.18) はこれらの式にそれぞれ補正項、 u^3 や $-u^2$ がつけ加わったという形式になっている。

2.4 重力による光線の折れ曲がり

球対称な重力場での光の伝播は、粒子の運動と同様に計算することができる。ただし、運動のパラメータとして固有時間を用いることはできない。ここでは簡単に粒子の質量 m をゼロとした極限として、光線の軌道の式を求める。無次元エネルギー ϵ や無次元角運動量 l [(2.12)] は $m \rightarrow 0$ の極限では発散してしまうが、軌道の式 (2.18) では発散せず

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \alpha^{-2} - u^2 + u^3 \quad (2.20)$$

となる。ただし

$$\alpha^{-2} \equiv \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\epsilon^2 - 1}{l^2} = \left(\frac{Er_g}{Lc}\right)^2 \quad (2.21)$$

である。 α^{-1} の値は弱い重力場を光が伝播するときにはきわめて小さい値である。太陽表面近くをすれすれに通過する光線の角運動量 L はおよそ $(E/c)r_0$ である。 r_0 は太陽の中心から光線におろした垂線の長さである。 r_0 は太陽半径 R_\odot より大きいので $\alpha^{-1} \ll r_g/R_\odot \approx 4 \times 10^{-6}$ である。同様に $u \equiv r_g/r \ll r_g/R_\odot \approx 4 \times 10^{-6}$ である。したがって、一般相対論的效果を表わす最後の u^3 を無視すれば、この方程式の解は直線運動の式

$$u = \alpha^{-1} \cos \phi \quad \left(\text{あるいは } r = \frac{ar_g}{\cos \phi} \right) \quad (2.22)$$

である。光線が直線からずれる効果を摂動計算で求めるために、近似解として

$$u = \alpha^{-1} \cos \phi + \alpha^{-2} f(\phi) \quad (2.23)$$

とおく。これを光線の伝播の式 (2.20) に代入する。 α^{-3} のオーダー項の比較から

$$f(\phi) = \frac{1}{2}(1 + \sin^2 \phi) \quad (2.24)$$

が得られる。極座標から直交座標系、 $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$ へと軌道の方程式を書き換えると

$$x = ar_g - \frac{1}{2\alpha} \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2.25)$$

が得られる。光が太陽にまだ近づいていない十分遠方の極限、 $y \ll 0$ 、もしくは十分遠方に遠ざかった極限、 $y \gg 0$ の極限で、この式は

$$y = \begin{cases} +\alpha(x - \alpha r_g) & (y \ll 0) \\ -\alpha(x - \alpha r_g) & (y \gg 0) \end{cases} \quad (2.26)$$

となる。

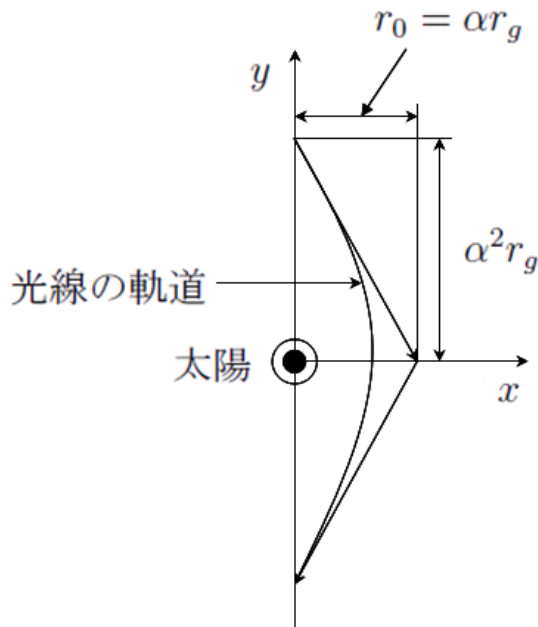


図 1: 太陽の重力による光線の折れ曲がり

2.5 光の曲がる角度

文献 [2] より、光源から出た光がブラックホールの重力で曲がり、観測者に向かう光の角度 α は一般相対性理論の公式

$$\alpha = -a \log \left(\frac{\theta}{\theta_m} + 1 \right) + b \quad (2.27)$$

で表される。 a , b は定数で、ブラックホールの特性によって決まる。 θ_m はブラックホールに吸収されない粒子が飛び出す最小の角度である。第 3 章でこの式を用いて計算の比較を行う。

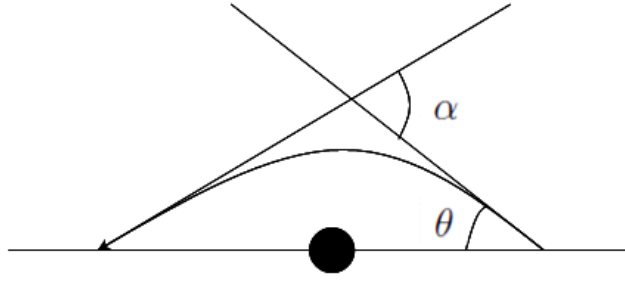


図 2: 光の曲がる角度

2.6 カー計量

カー計量とは、回転するブラックホールでの球対称真空解の重力場の方程式の計量である。文献 [3] より、Boyer-Lindquist でのカー計量は、

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi \\
 & + \sin^2 \theta \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) d\phi^2 \\
 & + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

である。 M はブラックホールの質量、 a はスピンパラメータであり、

$$\Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta \tag{2.29}$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 \tag{2.30}$$

である。粒子の運動方程式は 2 階の微分方程式であるが、運動の定数が 4 つ存在するために積分することができ、4 つの 1 階の微分方程式

$$\Sigma \frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{R} \tag{2.31}$$

$$\Sigma \frac{d\theta}{d\tau} = \pm \sqrt{\Theta} \tag{2.32}$$

$$\Sigma \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{a}{\Delta} (2rE - aL_z) + \frac{L_z}{\sin^2 \theta} \tag{2.33}$$

$$\Sigma \frac{dt}{d\tau} = \frac{(r^2 + a^2)^2 E - 2arL_z}{\Delta} - a^2 E \sin^2 \theta \tag{2.34}$$

を解けば良い。ここで、

$$\Theta(\theta) = Q - \cos^2 \theta \left\{ a^2 (1 - E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right\} \quad (2.35)$$

$$R(r) = - (1 - E^2) r^4 + 2r^3 - [a^2 (1 - E^2) + L_z^2] r^2 + 2(aE - L_z)^2 r - Q\Delta \quad (2.36)$$

である。 E はエネルギー、 L_z は角運動量、 Q は Carter 定数である。 $c = G = 1, M = 1$ とする。座標 r, t 、固有時間 τ 、 a, E, L_z, Q は全て無次元として、以降扱うことにする。第3章、第4章でこの式を解いて粒子の軌道を求める。

3 シュバルツシルト計量での重力レンズ効果

この章では、まず Runge-Kutta 法について説明し、シュバルツシルトブラックホールでの重力レンズ効果のシミュレーションの説明をして、その結果と考察を述べる。

3.1 Runge-Kutta 法

1 階の微分方程式をコンピュータで解く手法に Runge-Kutta 法がある。微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3.1)$$

において、 x が x_0 から h だけ増加した点 $x_1 = x_0 + h$ における値 y_1 の計算を

$$k_1 = hf(x_0, y_0) \quad (3.2)$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) \quad (3.3)$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) \quad (3.4)$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) \quad (3.5)$$

$$k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3.6)$$

$$y_1 = y_0 + k \quad (3.7)$$

の公式に基づいて行う。図 3 に示すように、 x_0 から $x_0 + h$ の値を予想するプロセスに k_1, k_2, k_3, k_4 の過重平均を用いる方法である。このようにして求めた y_1 を新たに y_0 と置き直して、 x がまた h だけ増加したときの値を求めるという操作を繰り返す。

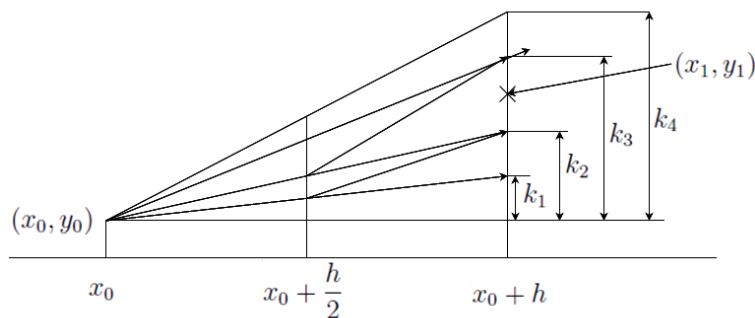


図 3: Runge-Kutta 法

Runge-Kutta 法は、1 階の微分方程式に対する解法であるが、例えば 2 階の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y \quad (3.8)$$

を Runge-Kutta 法で解くためには、

$$\frac{dv}{dt} = -k^2 y \quad (3.9)$$

$$\frac{dy}{dt} = v \quad (3.10)$$

のように2階の微分方程式を2本の1階微分方程式の連立の組にして同時に Runge-Kutta 法で解けば良い。

3.2 ニュートン力学での粒子の軌道

まず、ブラックホールの周りの粒子の運動がニュートン力学で表わされると考え、(2.1) 式を解くことにした。ニュートンの運動方程式 (2.1) を Runge-Kutta 法で計算して粒子の軌道を求め、粒子がブラックホールに最も近づいた時の距離が変化した時の軌道の変化を確認する。 $v = c = 1$ とし、さらに単位系を $M = 1$ 、 $G = 1$ とする。ブラックホールは原点で固定されていて動かないものとした。ブラックホールに最も近づく点を x 軸上の点とするために計算の初期座標を x 軸上に設定する。

また、初速度を一定にすると、ブラックホールと粒子の初期座標の距離を大きくした場合に、粒子が最も近づいた時の距離より短くなってしまいうので、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和が一定になるように初速度を設定した。また、ブラックホールに吸収されたときを考えて、ブラックホールと粒子の距離がシュバルツシルト半径以下になると、計算を終了した。

(2.1) 式を解くと、ブラックホールの近くを通る粒子の軌道は図4のようになった。ブラックホールに最も近づいたときの距離は3~50と設定した。実際は $y = 0$ の x 軸上より解いているが、時間反転対称なので反転させ、図はブラックホールの近くを通過する粒子の軌道を表わす。図4より、ブラックホールに粒子が近くなるほど曲がる角度が大きくなることがわかった。

3.3 粒子の曲がる角度の計算

次に、ニュートン力学での粒子の軌道から粒子の曲がる角度を計算した。図5の α_1 はニュートン力学での粒子の曲がる角度の計算結果であり、 α_2 は式 (2.27) の定数 a 、 b と、 θ_m を求めて代入した式の値である。 a 、 b は定数で、ブラックホールの特性によって決まる。 θ_m はブラックホールに吸収されない軌道で、粒子が飛び出す角度が最小の時の値である。

θ_m は粒子の座標が $(3, 0)$ で、粒子の x 軸方向の初速度を1から減少させていき、初めて計算が途中で終了しなかった時の値を設定した。 a と b は、一般相対性理論はブラックホールから遠くなるほどニュートン力学と近くなるので、 $\theta = 80 \sim 90^\circ$ の範囲で求める。 a は θ ごとに曲がる角度の差 $\alpha_1 - \alpha_2$ を求め、角度の差の最大値と最小値の差が最小になった時の値に設定した。 b は a を求めた時の $\theta_1 - \theta_2$ の平均値に設定した。この方法で求めた θ_m 、 a 、 b の値はそれぞれ、

$$\theta_m = 47.9233144606127$$

$$a = 13.4844394467873$$

$$b = 49.3473357294472$$

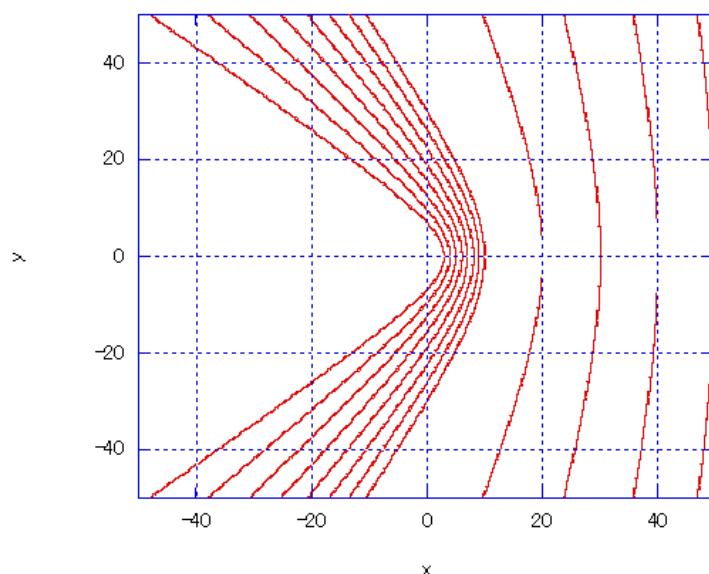


図 4: ブラックホールに最も近づいた時の距離を変化させた時の粒子の軌道の変化を図示した。ブラックホールは原点にあり、シュバルツシルト半径は2である。この図から、ブラックホールに近くなるほど曲がる角度が大きくなることが分かる。

である。

$\theta = 48 \sim 90^\circ$ のときの粒子の曲がる角度と (2.27) 式の関係は図 5 のようになった。図 5 より、ブラックホールに近くなるほど、ニュートン力学で粒子が曲がる角度 α_1 は、一般相対性理論で粒子が曲がる角度 α_2 より小さくなることが分かった。

3.4 シュバルツシルト計量での粒子の軌道の計算

カー計量の式 (2.31) ~ (2.34) を、回転パラメータ $a = 0$ と設定し、Runge-Kutta 法で計算して、回転しないブラックホールでの粒子の軌道を求めた。

3.5 シュバルツシルト・ブラックホールでの重力レンズ効果

図 6 は $a = 0$ で、 $r = 3$, $L_z = 0 \sim 9$ と設定したときの粒子の軌道である。図は、原点にブラックホールがあり、粒子を (3,0) の位置より、エネルギー一定の条件の下で、19 方向に発射させたものである。図より、ブラックホールが鏡の役割を果たして、光が戻ってくる軌道があることが分かる。

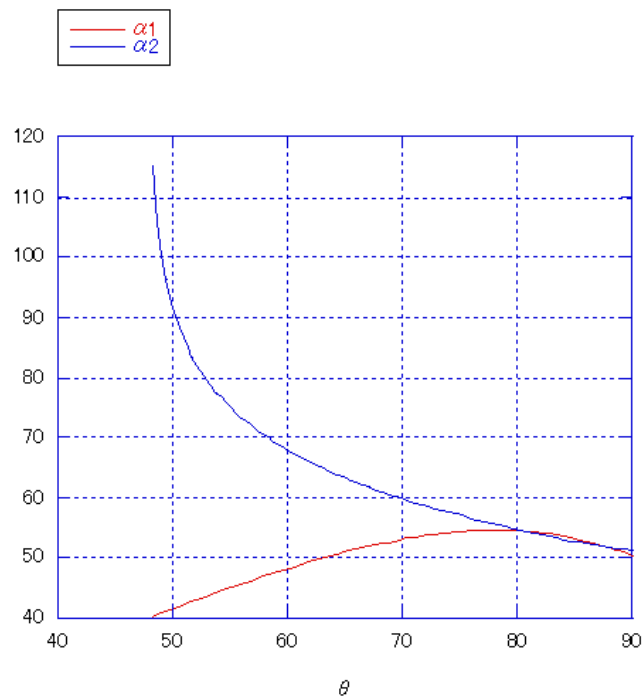


図 5: ニュートン力学 (α_1) と一般相対性理論の公式 (2.27) 式 (α_2) の曲がる角度を図示した。この図から、 θ が大きいとき (ブラックホールより遠い軌道を取るとき) 両者はよく一致するが、 θ が小さいときは違いが生じ、ニュートン力学のほうが、ブラックホールの近くなるほど曲がる角度が小さくなることが分かる。

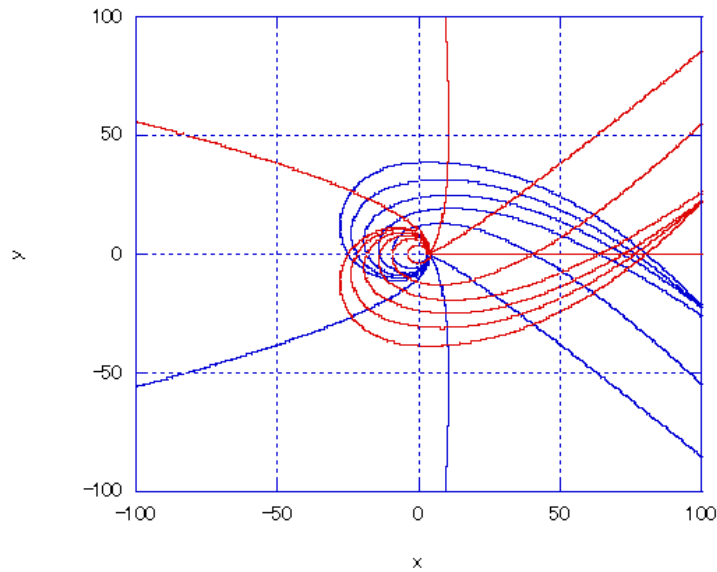


図 6: カー計量の方程式を $a = 0$ と設定して計算した粒子の軌道を図示した。図は、原点にブラックホールがあり、粒子を $(3,0)$ の位置より、エネルギー一定の条件の下で、 19 方向に発射させたものである。ブラックホールが回転していない場合は左右対称であることが分かる。

4 カー計量での重力レンズ効果

この章では、カーブラックホールでの重力レンズ効果のシミュレーションの説明をして、その結果と考察を述べる。

4.1 カー計量での粒子の軌道の計算

カー計量の式 (2.31) ~ (2.34) を、回転パラメータ $a = 1, a = -1$ と設定し、Runge-Kutta 法で計算して、回転するブラックホールでの粒子の軌道を求めた。時空の対称性より赤道面上だけを考え、さらに、回転の影響が最も大きくなるブラックホールの場合だけを考えるので、 $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{d\theta}{d\tau} = 0, Q = 0$ と設定して計算する。

4.2 カー・ブラックホールでの重力レンズ効果

図 7 は $a = 1, a = -1$ で、 $r = 3, L_z = 0 \sim 9$ と設定したときの粒子の軌道である。図は、原点にブラックホールがあり、粒子を $(3,0)$ の位置より、エネルギー一定の条件の下で、 19 方向に発射させたものである。図より、ブラックホールが回転している場合は粒子の軌道が左右対称にならないことが分かる。

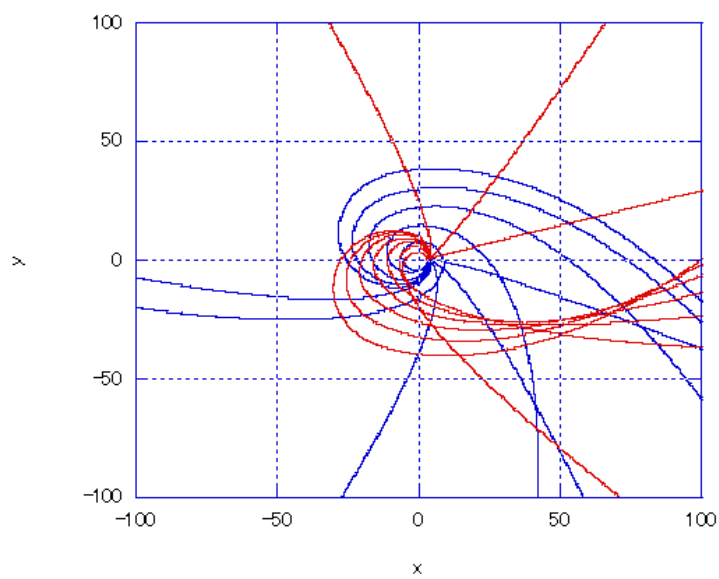


図 7: カー計量の方程式を $a = 1$, $a = -1$ と設定して計算した粒子の軌道を図示した。図は、原点にブラックホールがあり、粒子を $(3,0)$ の位置より、エネルギー一定の条件の下で、19 方向に発射させたものである。 $a = 0$ の軌道で、 x 軸上の軌道が反時計回りに回転しているため、ブラックホールは反時計回りに回転していると考えられる。ブラックホールが回転している場合は左右対称にならないことが分かる。

5 まとめ・結論

ブラックホールの遠くを通る光の軌道は、ニュートン力学と一般相対性理論でほぼ同じになるが、ブラックホールの近くでは、ニュートン力学での光の曲がる角度があまり変わらないのに対して、一般相対性理論での光の曲がる角度は大きくなる。ブラックホールでの重力レンズ効果には、少し曲げられて光源から遠ざかるように、レンズの役割を果たすだけでなく、大きく曲げられて光源の方に戻ってくるように、鏡のような役割を果たすことがある。光源と観測者の間に回転するブラックホールがある場合、光源から出た光を観測すると、左右対称にならない。

回転するブラックホールによる重力レンズ効果の研究によって、ブラックホールの位置や回転の大きさなどを知ることができると考えられる。

参考文献

- [1] 佐藤勝彦, 相対性理論, 岩波書店 (1996)
- [2] Bozza, Phys.Rev.D, 66, 103001 (2002)
- [3] arXiv:0811.3814v1 [gr-qc] 24 Nov 2008

A ニュートン力学での粒子の軌道を求めるプログラム

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double v1(double t, double v, double g, double m, double xy, double r) {
    return -g * m * xy / pow(r, 3.0);
}

double v2(double t, double v, double g, double m, double xy, double r,
           double h) {
    return h * v1(t, v, g, m, xy, r);
}

double v3(double t, double v, double g, double m, double xy, double r,
           double h, double k) {
    return h * v1(t + 0.5 * h, v + 0.5 * k, g, m, xy, r);
}

double v4(double t, double v, double g, double m, double xy, double r,
           double h) {
    double k1, k2, k3, k4;

    k1 = v2(t, v, g, m, xy, r, h);
    k2 = v3(t, v, g, m, xy, r, h, k1);
    k3 = v3(t, v, g, m, xy, r, h, k2);
    k4 = v2(t + h, v + k3, g, m, xy, r, h);

    return v + (k1 + 2.0 * k2 + 2.0 * k3 + k4) / 6.0;
}

double xy1(double t, double xy, double v) {
    return v;
}

double xy2(double t, double xy, double v, double h) {
    return h * xy1(t, xy, v);
}

double xy3(double t, double xy, double v, double h, double k) {
    return h * xy1(t + 0.5 * h, xy + 0.5 * k, v);
}
```

```

double xy4(double t, double xy, double v, double h) {
    double k1, k2, k3, k4;

    k1 = xy2(t, xy, v, h);
    k2 = xy3(t, xy, v, h, k1);
    k3 = xy3(t, xy, v, h, k2);
    k4 = xy2(t + h, xy + k3, v, h);

    return xy + (k1 + 2.0 * k2 + 2.0 * k3 + k4) / 6.0;
}

```

```

int main(void) {
    double c = 1.0;
    double e = 1.0;
    double g = 1.0;
    double h = 0.001;
    int i = 0;
    int j = 1000000;
    double m = 1.0;
    double r;
    double rg;
    double t = 0.0;
    double vx = 0.0;
    double vy;
    double x = 3.0;
    double y = 0.0;

    r = pow(pow(x, 2.0) + pow(y, 2.0), 0.5);
    rg = 2.0 * g * m / pow(c, 2.0);
    vy = pow(2.0 * (e + g * m / r), 0.5);

    while(i < j) {
        printf("%f\t%f\n", x, y);
        r = pow(pow(x, 2.0) + pow(y, 2.0), 0.5);
        i++;
        if(r <= rg) {
            i = j;
        }
        vx = v4(t, vx, g, m, x, r, h);
        vy = v4(t, vy, g, m, y, r, h);
    }
}

```

```
    x = xy4(t, x, vx, h);  
    y = xy4(t, y, vy, h);  
    t = t + h;  
}  
return 0;  
}
```

B カー計量での粒子の軌道を求めるプログラム

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double r1(double r, double tau, double R, double sigma) {
    return pow(R, 0.5) / sigma;
}

double r2(double r, double tau, double R, double sigma, double h) {
    return h * r1(r, tau, R, sigma);
}

double r3(double r, double tau, double R, double sigma, double h, double k) {
    return h * r1(r + 0.5 * k, tau + 0.5 * h, R, sigma);
}

double r4(double r, double tau, double R, double sigma, double h) {
    double k1, k2, k3, k4;

    k1 = r2(r, tau, R, sigma, h);
    k2 = r3(r, tau, R, sigma, h, k1);
    k3 = r3(r, tau, R, sigma, h, k2);
    k4 = r2(r + k3, tau + h, R, sigma, h);

    return r + (k1 + 2.0 * k2 + 2.0 * k3 + k4) / 6.0;
}

double phi1(double phi, double tau, double a, double delta, double r,
            double e, double lz, double sigma) {
    return (a / delta * (2.0 * r * e - a * lz) + lz) / sigma;
}

double phi2(double phi, double tau, double a, double delta, double r,
            double e, double lz, double sigma, double h) {
    return h * phi1(phi, tau, a, delta, r, e, lz, sigma);
}

double phi3(double phi, double tau, double a, double delta, double r,
            double e, double lz, double sigma, double h, double k) {
    return h * phi1(phi + 0.5 * k, tau + 0.5 * h, a, delta, r, e, lz, sigma);
}
```

```

double phi4(double phi, double tau, double a, double delta, double r,
            double e, double lz, double sigma, double h) {
    double k1, k2, k3, k4;

    k1 = phi2(phi, tau, a, delta, r, e, lz, sigma, h);
    k2 = phi3(phi, tau, a, delta, r, e, lz, sigma, h, k1);
    k3 = phi3(phi, tau, a, delta, r, e, lz, sigma, h, k2);
    k4 = phi2(phi + k3, tau + h, a, delta, r, e, lz, sigma, h);

    return phi + (k1 + 2.0 * k2 + 2.0 * k3 + k4) / 6.0;
}

```

```

int main(void) {
    double a = 0.0;
    double delta;
    double e = 1.0;
    double h = 0.001;
    int i = 0;
    int j = 1000000;
    double lz = 0.0;
    double m = 1.0;
    double phi = 0.0;
    double r = 3.0;
    double R;
    double rg;
    double sigma;
    double tau = 0.0;
    double x;
    double y;

    rg = 2.0 * m;

    while(i < j) {
        x = r * cos(phi);
        y = r * sin(phi);
        printf("%f\t%f\n", x, y);
        sigma = pow(r, 2.0);
        delta = pow(r, 2.0) - 2.0 * m * r + pow(a, 2.0);
        R = -(1.0 - pow(e, 2.0)) * pow(r, 4.0)
            + 2.0 * pow(r, 3.0)

```

```

        -(pow(a, 2.0) * (1.0 - pow(e, 2.0)) + pow(lz, 2.0)) * pow(r, 2.0)
        + 2.0 * pow((a * e - lz), 2.0) * r;
R = fabs(R);
i++;
if(r <= rg) {
    i = j;
}
phi = phi4(phi, tau, a, delta, r, e, lz, sigma, h);
r = r4(r, tau, R, sigma, h);
tau = tau + h;
}
return 0;
}

```