

卒業論文  
宇宙論パラメータによる  
宇宙膨張則の比較ツールの作成

大阪工業大学  
情報科学部 情報メディア学科  
C10-075 東田有記

平成26年2月12日

# 目次

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>4</b>
1.1	宇宙のはじまり	4
1.2	宇宙の現在と未来	5
1.3	目的	5
<b>2</b>	<b>宇宙論の歴史</b>	<b>6</b>
2.1	膨張宇宙論の確立	6
2.2	膨張宇宙の観測的発見	6
2.3	標準ビッグバン宇宙モデルの確立	7
2.4	加速膨張の発見	7
<b>3</b>	<b>標準ビッグバン宇宙モデル</b>	<b>8</b>
3.1	一般相対性理論	8
3.2	フリードマン宇宙モデル	8
3.2.1	宇宙原理	9
3.2.2	三つの空間	9
3.2.3	ロバートソン・ウォーカー計量	11
3.2.4	エネルギー運動量テンソル	11
3.2.5	宇宙モデルを表す方程式	11
<b>4</b>	<b>フリードマン方程式の解</b>	<b>13</b>
4.1	Runge-Kutta 法	13
4.2	宇宙膨張の3つの形	14
4.3	状態方程式パラメータ $\gamma$ の依存性	15
4.4	宇宙年齢を考慮した宇宙膨張の可視化	18
4.4.1	ハッブルの法則	18
4.4.2	宇宙年齢を考慮した宇宙膨張	19
<b>5</b>	<b>宇宙論パラメータ</b>	<b>21</b>
5.1	密度パラメータ	21
5.2	宇宙項パラメータ	21
5.3	曲率パラメータ	22
5.4	パラメータで表すフリードマン方程式	22
<b>6</b>	<b>宇宙膨張アプリケーションの解説</b>	<b>23</b>
6.1	開発環境	23
6.2	フローチャート	23
6.3	画面構成	24

6.4	使用例と考察 . . . . .	30
6.4.1	学習 I の場合 . . . . .	30
6.4.2	学習 II の場合 . . . . .	31
6.4.3	学習 III の場合 . . . . .	32
<b>7</b>	<b>結論</b>	<b>33</b>

# 1 序論

## 1.1 宇宙のはじまり

現在の宇宙論では、宇宙は137~138億年ほど前に始まったといわれている。宇宙は「無」から誕生した。その直後、「プランク時間」と呼ばれるきわめて短い時間の頃、指数関数的膨張である急激な「インフレーション」が起こった。その時に真空が状態変化を起こし、陽子や電子などの通常物質が誕生した。インフレーション直後の高温高密度状態の宇宙はそのエネルギーによって、「ビッグバン」という緩やかな膨張を続け、宇宙の温度は下がっていく。そうして宇宙の初期状態が形成された。その後数十万年は宇宙全体が火の玉状態であり、徐々に温度が下がり始めて、誕生から約38万年後に宇宙は晴れ上がったとされている。晴れ上がり後は比較的ゆっくりと膨張を続け、4億年ほどたった時、最初の天体が形成、数十億年ぐらいいから銀河などが次々と誕生していった。そして誕生から約90億年後に、太陽と地球が誕生したとされている。宇宙の歴史の様子を以下に示す。

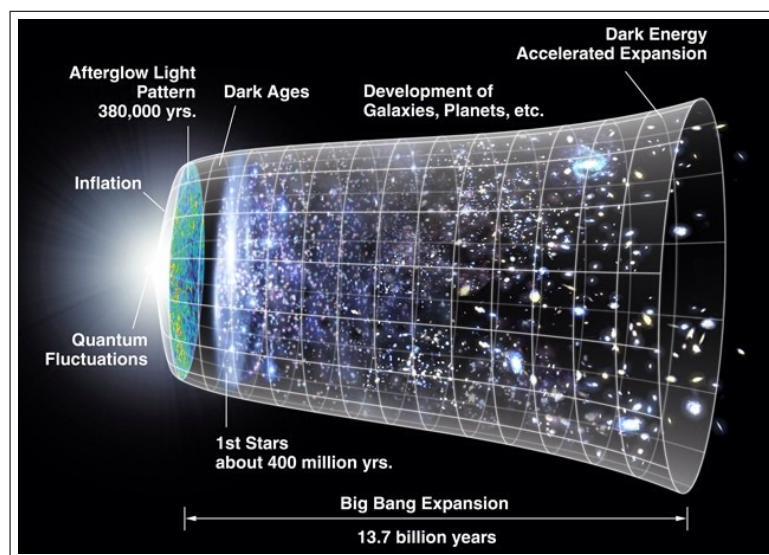


図 1: 宇宙の歴史のタイムライン ([6] 参照)

## 1.2 宇宙の現在と未来

現在の宇宙には 1000 億以上の銀河があり, 100 億光年以上の広さがあるという. また, 現在宇宙は加速膨張をし続けていることが発見でわかっている. では, この膨張の先には何が待っているのか. また, 138 億年という歴史の中で宇宙はどのような姿だったのか. 宇宙の過去や現在や未来について, 宇宙の進化の様子やその構造を考える宇宙論から導き出される宇宙の膨張の様子をシミュレーションする.

## 1.3 目的

宇宙にはその存在を定義するいくつかのパラメータが存在する. (詳しい説明は後述する.) そのパラメータの影響で宇宙がどのような姿を現すかを視覚的に学習するアプリケーションの作成を行うことが本研究の目的である. 宇宙の過去や未来に興味がある者を対象とし, 宇宙膨張の変化の様子について, 多数のパラメータの値による同時比較ができ, 分かりやすく理解できるアプリケーションの作成を行う.

## 2 宇宙論の歴史

宇宙論とは、宇宙全体の構造や進化を研究する学問である。一般相対性理論の完成によって宇宙論の研究が目まぐるしく発展した。

この章では、宇宙の最も基本的な宇宙モデルおよび宇宙の加速膨張が発見された過程を説明する。

### 2.1 膨張宇宙論の確立

アルベルト・アインシュタイン (Albert Einstein) は、1915年に、重力場の理論である一般相対性理論を発表した。その後、アインシュタインは、この理論で宇宙モデルが作れるのではないかと考え、その当時信じられていた宇宙は静止しているという定常宇宙モデルを導こうと、アインシュタイン方程式を解いた。しかし、アインシュタイン方程式において、万有引力は全ての物質に引力として働くため、初めは静止していても宇宙の物質は、お互いの重力が作用して動的にふるまい、結果、宇宙は膨張や収縮をしてしまうのである。この問題を解決するために、アインシュタインは、宇宙の空間が互いに反発し押し広げる働きをする「宇宙定数」を導入した新たなアインシュタイン方程式を発表し、静的な宇宙モデルを導いた。

1922年、アレクサンドル・フリードマン (Aleksandr Friedmann) は宇宙定数を含まない元来のアインシュタイン方程式を解き、最も簡単な物質分布を仮定しても宇宙が膨張や収縮をしていることを導き出した。彼は、宇宙の半径が時間とともに広がっていく宇宙を表す解を、アインシュタイン方程式から導き出すことに成功した。

ジョルジュ・ルメートル (Georges Lemaitre) もまた、1927年に、独立にアインシュタイン方程式を解き、膨張宇宙モデルを発表した。

### 2.2 膨張宇宙の観測的発見

宇宙の膨張を実際に観測において発見したのがエドウィン・ハッブル (Edwin Hubble) である。

ハッブルは1929年に、遠方の銀河ほど速い速度で私たちの銀河系から遠ざかっていることを発見した。近くの銀河が高速度で私たちの銀河から遠ざかっていることは既に観測によって発見されていたが、それら銀河のスペクトルを測定すると赤方偏移が見られたのである。その度合いから、銀河がどのくらいのスピードで遠ざかっているのかが分かるようになった。後退速度と銀河間の距離が比例していることの発見により、宇宙全体が実際に膨張していることが示された。

フリードマンがアインシュタイン方程式を解き、膨張宇宙の解を発見した当初、アインシュタインは宇宙膨張に対しては懐疑的だった。しかし、ハッブルの宇宙膨

張の発見により、宇宙定数を導入して導いた自らの静的宇宙モデルを放棄し、フリードマンの膨張宇宙を受け入れた。当時アインシュタインは、「宇宙定数の導入は人生最大の不覚だった」と語ったという。この過程で、宇宙項が不要な膨張宇宙が発見されたが、後述するように、現在では宇宙定数は復活している。

## 2.3 標準ビッグバン宇宙モデルの確立

宇宙が膨張しているのならば、それは永遠不変ではなく始まりがあったはずだと考えたジョージ・ガモフ (George Gamow) は、1948年、導き出した宇宙初期の構成元素から、宇宙は火の玉のような高温で始まり、爆発的に膨張したというビッグバン理論を提唱した。

ガモフの提唱したビッグバン理論の元、宇宙が熱い火の玉で始まったとするならば、そこには熱放射が満ちていたはずである。その放射が現在の宇宙でもマイクロ波の背景放射として残っているのではと考えられ、その後、1965年にアーノ・ペンジアス (Arno Penzias) とロバート・ウィルソン (Robert Wilson) が、実際にビッグバンの名残とされる宇宙背景放射を発見した。これによって、宇宙はかつて高温だったことが裏付けられた。

このような過程で生まれた現在の宇宙モデルは、今日、標準ビッグバン宇宙モデルと呼ばれている。

## 2.4 加速膨張の発見

遠い宇宙から地球に光が届くには時間を要するため、遠方の宇宙を観察することは昔の宇宙の姿を見ることに該当する。ソール・パールムッター (Seul Perlmutter) とブライアン・シュミット (Brian Schmidt) たちは、遠方の超新星爆発の観測を行い、宇宙が加速膨張していることを発見した。

この加速膨張を引き起こすために、宇宙には通常物質とは全く異なる性質を持つエネルギーが満ちていると考えられている。これが「ダークエネルギー」である。このダークエネルギーが時間変化しないのであれば、それは宇宙定数と解釈することができる。これによって、アインシュタイン方程式に宇宙項が復活することになった。

現在、WMAP衛星の観測などにより、宇宙全体におけるそれぞれのエネルギー密度の量を詳しく測定することができ、ダークエネルギーが約73%、次にダークマターが約23%、その他の原子などの目に見える物質が約4%であることがわかっている。このことから、今日、フリードマン・ロバートソン・ウォーカー・ルメートルのモデルに宇宙項を復活させた宇宙モデルは、現在の宇宙の姿を最も的確に表したモデルといえる。

### 3 標準ビッグバン宇宙モデル

一般相対性理論は、宇宙論を考えるに当たって必要不可欠な理論である。アインシュタインによって一般相対性理論が構築されて初めて、宇宙全体の構造や進化の歴史を物理学的に考察できるようになった。

本章では、一般相対性理論とは何か、そして現在の宇宙モデルである標準ビッグバン宇宙モデルを形作る方程式について述べる。

#### 3.1 一般相対性理論

一般相対性理論は、質量が非常に大きい物体があると仮定したとき、その物体は周囲の時空を歪ませることを帰結する。重力を時空の幾何学として、その時空の歪みとエネルギーの関係を表したのがアインシュタイン方程式であり、重力場を記述する方程式である。式 (1) にアインシュタイン方程式を示す。

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1)$$

ここで、 $G_{\mu\nu}$  は、時空の曲率を表すリーマンテンソルからつくられるリッチテンソル  $R_{\mu\nu}$  とリッチスカラー  $R$  から作られたアインシュタインテンソルであり、 $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$  である。 $\Lambda$  は宇宙定数、 $g_{\mu\nu}$  は時空の計量テンソル、 $G$  は重力定数、 $c$  は光速、 $T_{\mu\nu}$  は宇宙を占める物質や放射エネルギー・運動量・圧力の分布を表すエネルギー運動量テンソルを表す。また、宇宙定数  $\Lambda$  を含む項は宇宙項と呼ばれる。

左辺は、時空の曲率及び計量テンソルによって、時空の幾何学的な「性質」を、右辺はエネルギー運動量テンソル  $T_{\mu\nu}$  によって、その場に存在する物質の「分布」を示している。この式によって、「性質」と「分布」という二つの概念が密接に関わりあっていることが分かった。つまり、宇宙のエネルギーの総量が分かれば、結果的に時空の歪みなどの宇宙の性質が判明するということである。

#### 3.2 フリードマン宇宙モデル

現在の宇宙は標準ビッグバン宇宙モデルと言われているが、その基となったモデルをフリードマン宇宙モデルという。フリードマンはアインシュタイン方程式を解き、その当時信じられていた静的宇宙理論とは異なる、宇宙が膨張したり収縮したりする解を発見した。この解をフリードマンの解といい、その解に基づいた宇宙モデルがフリードマン宇宙モデルである。



### 3.2.1 宇宙原理

フリードマン宇宙モデルを解いていく前に、宇宙原理について説明する。

宇宙論は一般相対性理論に基づいている。前述したように、一般相対性理論により、エネルギーや物質の分布は時空の歪みと密接な関係があることが分かっている。例えば、エネルギー分布に偏りがあれば、それは時空の歪みに繋がり、同じ空間で時間の流れが遅くなるという奇妙なことが生じる。我々は宇宙を論じる際に、最も自然な仮定として「人類は特別な存在ではない」「宇宙の中心にいるわけではない」と考える。物理的には以下のような2つの大きな仮定を置く。

- 宇宙は全体として一様である

宇宙には星やその集まりである銀河があちこちに散らばっている。小さい規模で見れば、銀河の集まった領域と銀河があまりない領域の分布や、時空の歪みであるブラックホールなどが存在し、一様とは言えないだろう。しかし、100億光年程度の大きな範囲では、それらすべてが均一に見えることができる。よって、宇宙に存在する物質やエネルギーのすべてが偏りがなく分布していると考えることができる。この仮定が宇宙の「一様性」の仮定である。

- 宇宙はどの方向を眺めても等方的に見える

宇宙に存在する物質やエネルギーが、特別な方向に運動していることは観測上発見されていない。ならば、宇宙は一様だけでなく、宇宙にある物質やエネルギーは特別な方向を持たず等方に分布していると考えることができる。この仮定が宇宙の「等方性」である。

この二つを宇宙原理と呼ぶ。宇宙原理を仮定することにより、宇宙の姿は、後述する「ロバートソン・ウォーカー計量」によって記述することができるようになり、結果、複雑なアインシュタイン方程式が比較的簡単な方程式に還元される。これによって、宇宙論が比較的簡単に展開することができる。

この「一様性」と「等方性」を仮定した宇宙原理は、現在の宇宙論展開においても最も基本的な仮定とされている。この宇宙原理は実際に成り立っているという確証はなく一つの仮定に過ぎないが、今のところ第0近似として宇宙原理に反した観測結果は見つかっていない。今日、アインシュタインの直感したこの宇宙原理は実際の宇宙においても正しいのだと信じられている。

### 3.2.2 三つの空間

宇宙原理に基づいた一様等方な空間では、空間の曲がり具合が一定である。このような空間では、曲率  $K$  が正、0、負の3種類しかないことが知られている。これらの曲率は、図2のように、それぞれ、3次元球面、3次元平面、3次元双曲

面に対応している。正曲率の場合は、空間が有限であるので「閉じた宇宙」と呼ばれている。0曲率の場合は「平坦な宇宙」、双曲線のように無限に広がっている負曲率の場合は「開いた宇宙」と呼ばれている。

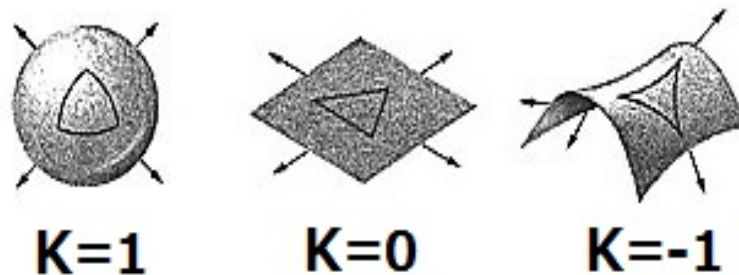


図 2: 3つの曲率

このような一様等方な三次元空間の計量には主に以下の表現が用いられる。一様等方な空間での微小距離間隔の二乗  $ds^2$  の式を球座標  $(r, \theta, \phi)$  を用いて式 (2) に示す。

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2)$$

$K$  は曲率,  $r$  は動径座標である。  $r = \text{一定}$  とすれば, 円周が  $2\pi r$ , 面積が  $4\pi r^2$  で与えられる球面であると考えることができる。上式における  $r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$  は球面 (2次元面) の極座標を表しており,  $\theta$  は半径から  $z$  座標軸までの角度,  $\phi$  は半径から  $x$  座標軸への角度を表している。球座標を図解したものを以下の図 3 に示す。

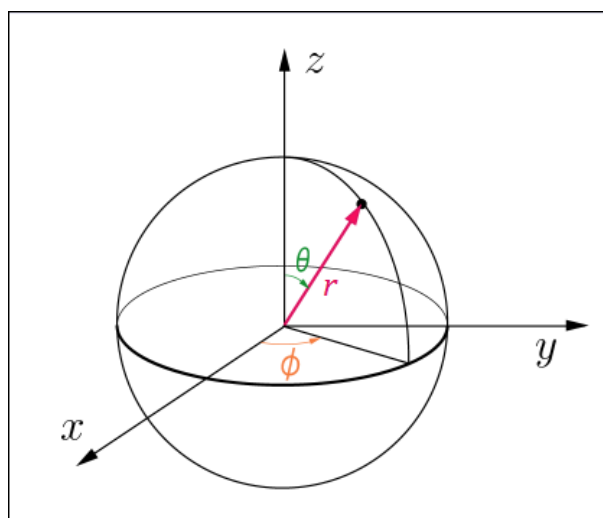


図 3: 三次元空間の球座標 ([8] 参照)

### 3.2.3 ロバートソン・ウォーカー計量

宇宙は時間と3次元空間を含めた4次元時空である。今までは3次元空間の計量について述べてきたが、宇宙空間における計量では、空間計量の式(2)に加え、時間の概念を考える必要がある。時間成分を加えた微小距離の二乗  $ds^2$  が次の式(3)である。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (3)$$

これはロバートソン・ウォーカー (Robertson-Walker) 計量といい、この4次元時空における計量での時間  $t$  は宇宙時刻を、 $c$  は光速度を表す。この計量における  $a(t)$  が本研究の目的である宇宙のスケール項であり、各宇宙時刻における空間の大きさを表す関数である。

### 3.2.4 エネルギー運動量テンソル

一般相対性理論の節でも述べたが、エネルギー運動量テンソル  $T_{\mu\nu}$  は、物質や放射エネルギー、運動量や圧力などの分布を表す。

一様等方な宇宙空間において、宇宙を満たしている物質は簡単化して、方向によって圧力が異なることのない完全流体だと仮定することができる。このような一様等方であり完全流体である宇宙空間において、エネルギー運動量テンソル  $T_{\mu\nu}$  は以下のように表すことができる。

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (4)$$

$\rho c^2$  は物質のエネルギー密度、 $p$  は圧力を表す。この式は、物質は目に見える運動はしていないが分子運動としてどの方向にも均等な圧力がかかっている状態を意味している。つまり、宇宙を満たしている完全流体を含む全物質は特有の速度を持っていないことを仮定している。

### 3.2.5 宇宙モデルを表す方程式

ロバートソン・ウォーカー計量を宇宙項があるときのアインシュタイン方程式の左辺に、エネルギー運動量テンソルをその右辺に代入して方程式を解くと、以下の(5)、(6)のような式が得られる。式(5)はテンソルの00成分における解であり、時間成分を表す。式(6)は空間成分における式になる。

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}c^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}c^2 \quad (5)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left\{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}c^2\right\} = -8\pi G\frac{p}{c^2} + \Lambda c^2 \quad (6)$$

(5)の式では、物質密度を決めればその宇宙のスケール項の時間発展が分かるようになっている。式(5)において $\Lambda = 0$ の時、この式を、宇宙項のないアインシュタイン方程式を解いたフリードマンにちなんで、フリードマン方程式という。

時空は一様等方であるという仮定の下では、局所的な運動やエネルギーの生成消滅は行われるはずがない。よってエネルギー運動量保存則は以下の式(7)のように示される。また、運動量保存は一様等方な空間において自動的に満たされるので、時間成分におけるエネルギー保存則は式(8)のようになる。

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0 \quad (7)$$

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \quad (8)$$

宇宙は完全流体で満たされているとしたが、圧力と密度の関係式を与えないと方程式系が閉じない。圧力を $p$ とし、密度を $\rho$ としたとき、圧力は密度の関数で表される。その式が式(9)である。本研究では、この完全流体の状態方程式を式(10)と仮定し、話を進める。

$$p = p(\rho) \quad (9)$$

$$p = (\gamma - 1)\rho \quad (10)$$

$\gamma$ は状態方程式のパラメータである。以上、アインシュタイン方程式やロバートソン・ウォーカー計量、エネルギー運動量テンソルによって様々な式が求められたが、このうち、式(5)、式(8)、式(10)の3つの方程式を解くことで、宇宙のスケール項 $a(t)$ の時間変化を求めることができる。この宇宙のスケール項の時間変化によって、どのような宇宙膨張の様子が見られるのかを可視化するのが本研究の目的である。

## 4 フリードマン方程式の解

宇宙膨張を決めるパラメータの一つに曲率  $k$  がある。  $k$  とは空間の曲がり具合を表す量である。まず、  $k$  が  $+1$  ,  $0$  ,  $-1$  の場合の宇宙膨張の時間変化を実際にプログラムで計算し、グラフ化することを試みる。

### 4.1 Runge-Kutta 法

フリードマン方程式において、宇宙のスケール項  $a$  の時間変化における解を得るために、常微分方程式の近似解を求める Runge-Kutta 法を用いる。Runge-Kutta 法には 2 次精度と 4 次精度のものがあるが、今回はより精度の高い 4 次精度を採用する。この Runge-Kutta 法を用いることによって、比較的正確に近い近似解を得ることができる。

Runge-Kutta 法を用いて常微分方程式を解く際の、点  $(x_n, y_n)$  から次の  $x_{n+1} = x + h$  における点  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  を求める 4 次精度の Runge-Kutta 法の式を以下の式 (11)、式 (12) に示す。

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (11)$$

ただし、

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + k_3) \end{cases} \quad (12)$$

式 (11) における次の値  $y_{n+1}$  は、現在の値である  $y_n$  に、  $x$  の間隔である  $\Delta x$  を表す  $h$  と推測された傾きの積を加算することで求められる。その傾きは、4 回の推測値の重み付けの平均とする。式 (12) の 4 回の重み付けの意味は以下の通りである。

- $k_1$  は、  $x_n$  での勾配の推測値である
- $k_2$  は、推測の傾き  $k_1$  を用いて  $x_n + h$  の区間の半分の区間  $x_n + \frac{h}{2}$  における勾配を推測したのものである
- $k_3$  は、  $k_2$  での区間の勾配を再計算したものであり、  $k_2$  を重み付けした  $y$  の値を用いた勾配を推測したものである
- $k_4$  は、区間の最後の勾配を示しており、  $k_3$  を重み付けした  $y$  の値を用いる

上記を分かりやすく図解したものを以下の図4に示す。

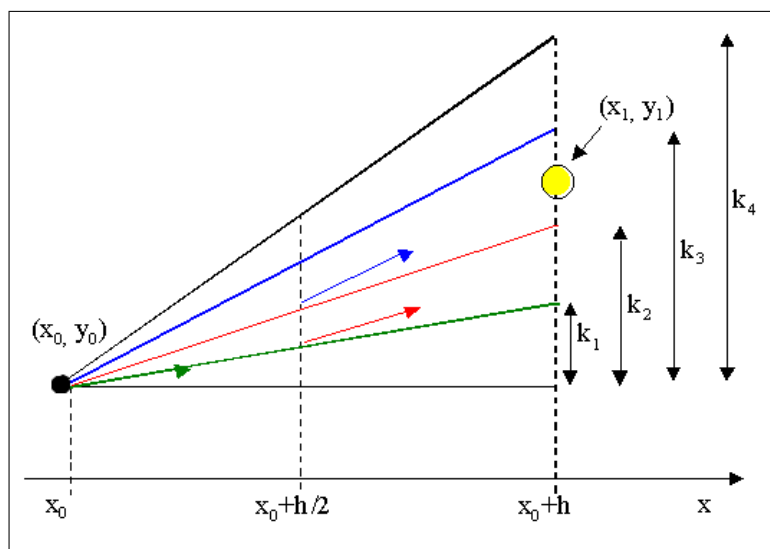


図 4: ルンゲクッタ法 (4次精度)([7] 参照)

## 4.2 宇宙膨張の3つの形

Runge-Kutta法を用いて、一様等方な宇宙空間での三つの宇宙の形の時間変化を表現する。既に記したように、一様等方な空間では曲率が正、0、負の3種類のみと考えられているので、方程式(5)の曲率 $k$ を $+1, 0, -1$ それぞれに変更し、(5), (8), (10)の方程式を計算する。また、一例として以下のことを仮定しておく。

- 宇宙が完全流体に満たされている状態式(10)におけるパラメータ $\gamma$ を $\gamma = 4/3$ に設定。これは物質が放射エネルギー優勢であることを仮定している。
- 宇宙項 $\Lambda = 0$
- 万有引力定数 $G = 1$ ，光速 $c = 1$ とし，単位のない空間として単純化する

これらの条件のもとで、宇宙のスケール項 $a(t)$ を計算した結果が、図5である。

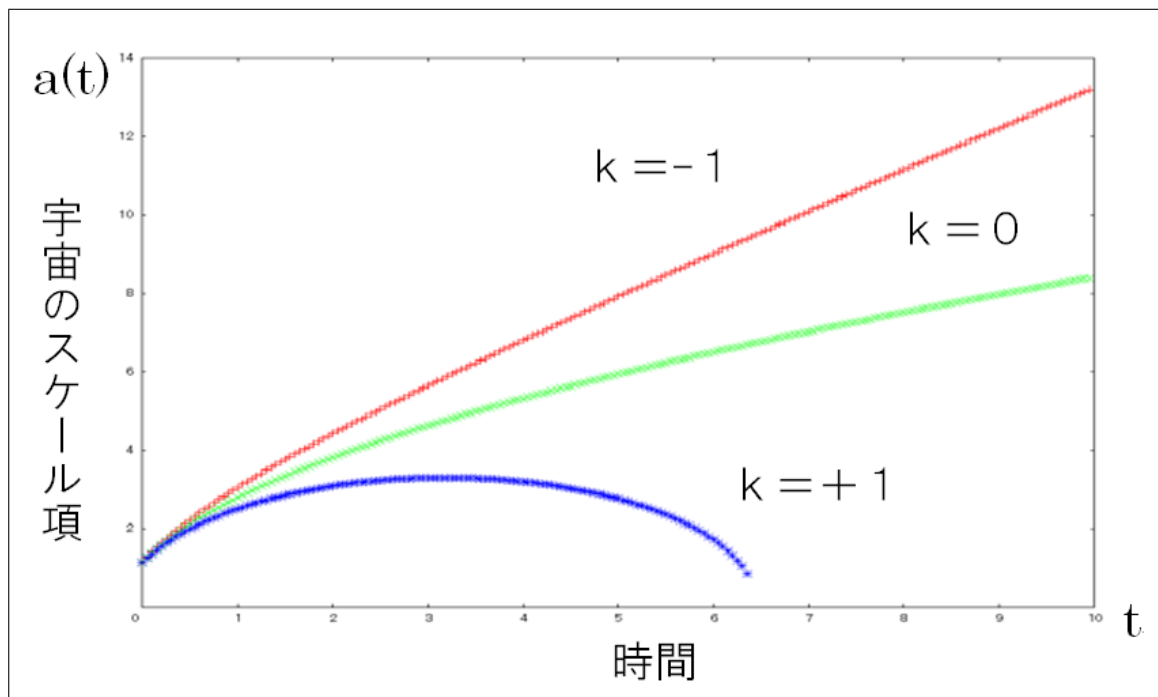


図 5: 宇宙膨張の様子

単位のない空間ではあるが，宇宙の始まりを  $t = 0$  とした時の宇宙のスケール項の時間変化を再現することができた．また，曲率  $k$  の状態によって，宇宙のスケール項  $a(t)$  が 3 種類の状態を持つことがわかり，それは図 2 における空間の定義と対応していることがわかる．  $k = -1$  の場合が，膨張を続ける開いた宇宙を表しており，  $k = 0$  の場合が平坦な宇宙，  $k = 1$  の場合が，膨張がいずれ収縮に転じる閉じた宇宙を表している．

### 4.3 状態方程式パラメータ $\gamma$ の依存性

宇宙膨張を決めるパラメータについて，状態方程式 (10) のパラメータ  $\gamma$  を変更するとどうなるかについて考えてみた．図 5 では，宇宙が完全流体を満たしていると仮定し，パラメータ  $\gamma = 4/3$  で置いた．ここでは宇宙が流体ではなく粒子で満たされている場合を考える．これは宇宙が冷えきることによって，宇宙を満たしていた流体が粒子として個体化した状態であり，物質同士が自身の圧力で他の圧力を打ち消しあうと考えられる．よって，状態方程式パラメータ  $\gamma = 1$ ，つまり圧力  $p = 0$  と置く．曲率パラメータが  $k = -1, 0, +1$  のそれぞれの場合における状態方程式パラメータの違いで，どのような違いが見受けられるかを計算した．その結果を，曲率ごとに，パラメータ  $\gamma = 4/3$  の場合の宇宙膨張と比較したものが図 6～図 8 である．

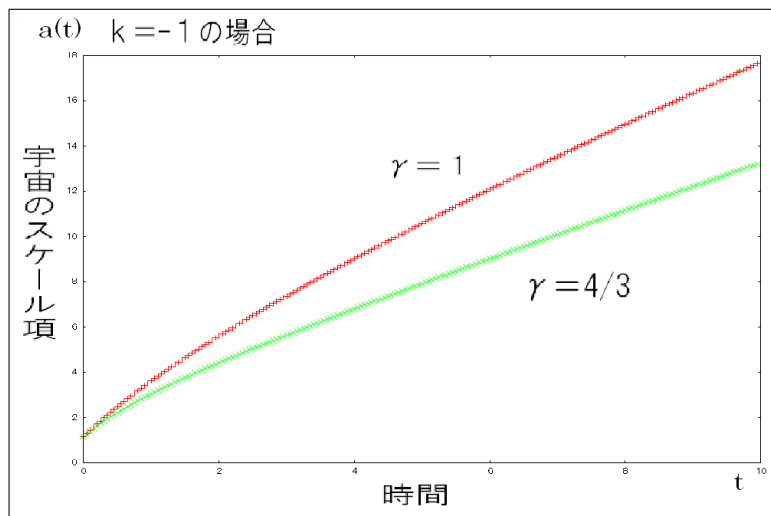


図 6:  $k = -1$  の宇宙膨張の様子 ( $\gamma = 1, \gamma = 4/3$  の比較)

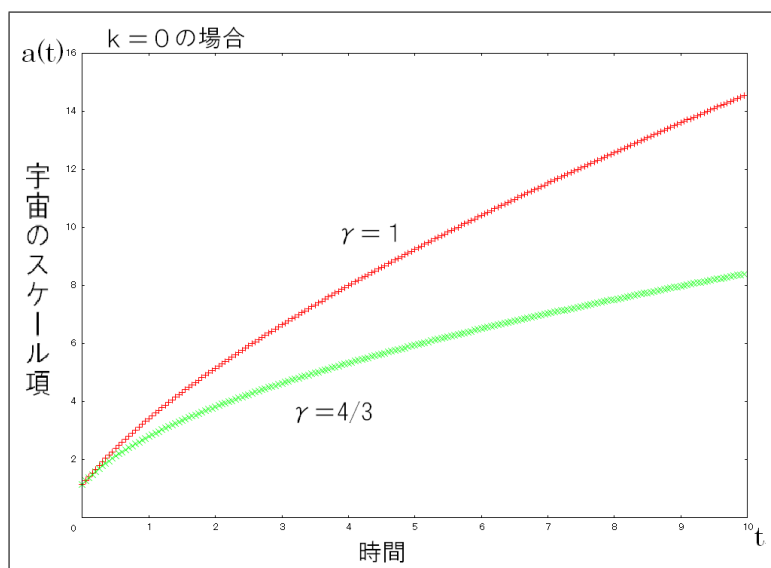


図 7:  $k = 0$  の宇宙膨張の様子 ( $\gamma = 1, \gamma = 4/3$  の比較)



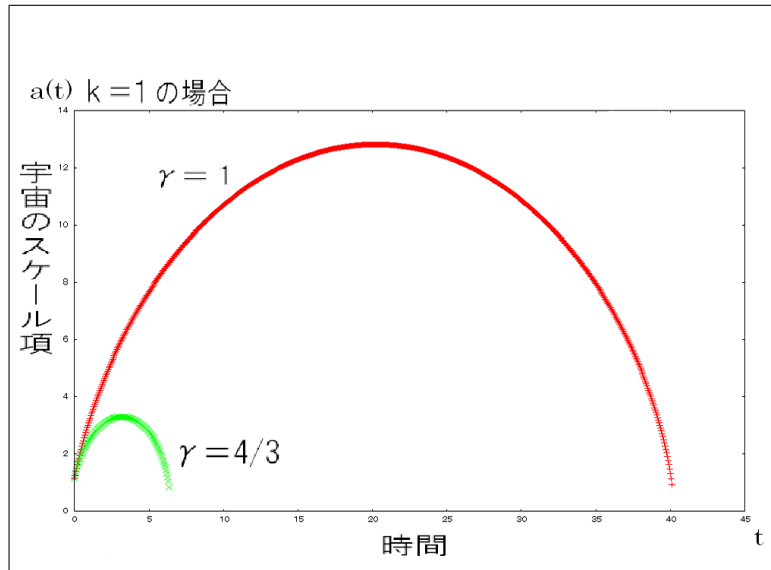


図 8:  $k = +1$  の宇宙膨張の様子 ( $\gamma = 1, \gamma = 4/3$  の比較)

また、状態方程式パラメータ  $\gamma = 1$  の場合の各曲率  $k$  における宇宙膨張の時間変化を比較した図を図 9 に示す。

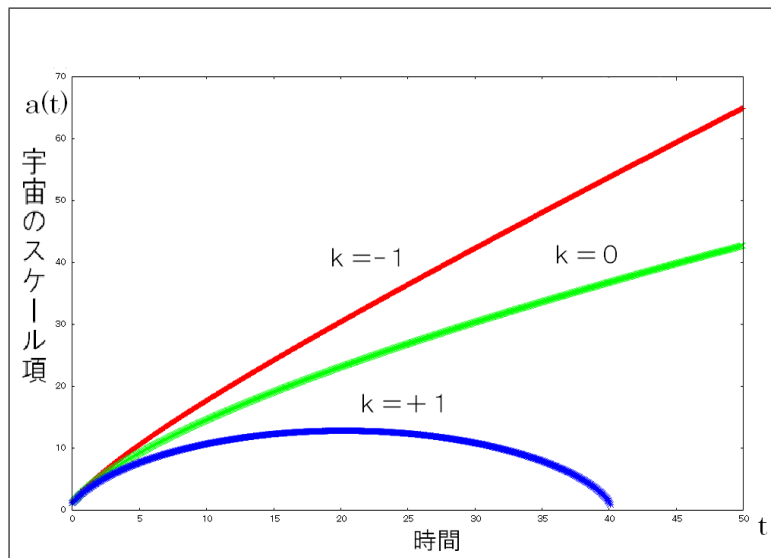


図 9: 宇宙膨張の様子

結果として、パラメータ  $\gamma = 1$  の場合は、 $\gamma = 4/3$  の場合と比べて、総合的に膨張率が大きくなることが分かった。また、時間の変化に注目すると、長時間かけて膨張されていることがわかる。パラメータを変更しても、時間変化と膨張率に変化はあったものの、曲率  $k$  の三種類の宇宙の形に変化は見られなかった。よって、宇宙原理に基づいた一様等方な空間では、「開いた宇宙」、「平坦な宇宙」、「閉じた宇宙」以外の基本的な変化は見られないことが分かった。

## 4.4 宇宙年齢を考慮した宇宙膨張の可視化

前章までは宇宙の始まりからの宇宙膨張の様子可視化を行ってきた。この章では、現在我々が生きている時間を  $t = 0$  として宇宙がこれまでどのような姿だったか、今後どうなっていくか、宇宙の過去と未来の可視化を試みる。宇宙の過去を可視化することで、宇宙の始まりから現在までの時間である宇宙年齢を知ることができる。

現在の時間を  $t = 0$  と定義するために、まずハッブルの法則について説明する。

### 4.4.1 ハッブルの法則

宇宙の全体構造を知るためには、遠方の銀河の分布や運動の様子をもっと詳しく調べる必要がある。遠方の銀河は暗く、見かけの大きさも小さかったため、観測は困難であったが、その性質について調べていたヴェスト・メルビン・スライファー (Vesto Melvin Slipher) は 1910 年に、遠方の銀河ほどその銀河の距離に比例した赤方偏移を示していることを発見した。

赤方偏移とは、観測された波長が、その銀河の光の固有波長よりも引き伸ばされた波長として赤くずれていることである。この光のずれは、「光のドップラー効果」によるずれだと考えられており、波長が赤いほうにずれる赤方偏移は、その銀河が観測者から遠ざかっていることを意味している。赤方偏移の大きさ  $z$  は、銀河の発する光の固有波長を  $\lambda_s$ 、観測された波長を  $\lambda_0$  とした時、以下の式 (13) のように表される。

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_s}{\lambda_s} \quad (13)$$

銀河の運動や距離を調べていたエドウィン・ハッブルは、このスライファーの発見を受けて、実際に遠方の銀河 18 個における銀河までの距離を測定し、銀河の後退速度と距離の関係を数量化した。また、地球に対する銀河の後退速度を  $v$ 、光速を  $c$  としたとき、 $v$  が  $c$  に比べて極めて小さい値の場合、赤方偏移  $z$  は以下の式 (14) で与えられる。

$$z = \frac{v}{c} \quad (14)$$

式 (14) と、スライファーによる「赤方偏移  $z$  は地球から銀河までの距離  $d$  に比例する」という観測事実から、ハッブルは、「遠方の銀河ほど、その距離  $d$  に比例した速度  $v$  で遠ざかっている」ことと、「この性質は方向によらない」ことを発見した。つまり、宇宙のどの方向においても同じように、遠方の銀河は我々の銀河から遠ざかるように後退運動をしているということである。その式が以下の式 (15) である。

$$v = H_0 d \quad (15)$$

この式はハッブルの法則といわれている。比例係数である  $H_0$  はハッブルパラメータと呼ばれている。ハッブルパラメータは時間とともに変化しており、時間を  $t$  としたとき  $H(t)$  である。ハッブルの法則において、 $H_0 = H(0)$  である。

#### 4.4.2 宇宙年齢を考慮した宇宙膨張

一様等方な宇宙空間において、ある時刻  $t$  での非常に近い距離にある 2 点が互いに遠ざかる速さ  $v$  は、その距離  $d$  に比例している。宇宙のスケール項を  $a$  とした時、速さ  $v = \dot{a}$ 、距離  $d = a$  を用いることによって、比例係数  $H_0$  は以下の式 (16) で表すことができる。

$$H_0 = \frac{\dot{a}}{a} \quad (16)$$

これによって、 $H_0$  が、宇宙のスケール項  $a$  のみを用いた式で得られる。 $H_0$  に任意の値を設定し、その時の時刻を  $t = 0$  とし、宇宙膨張の時間変化の様子をグラフ化する。これによって、宇宙の始まりから現在までの時間を宇宙年齢として視覚的に捉えることができる。

ハッブルパラメータ  $H_0$  を  $H_0 = 0.045$  とし、その時を  $t = 0$  とした宇宙膨張の様子を以下の図 10 に示す。また、その時のハッブルパラメータの時間変化の様子を図 11 に示す。

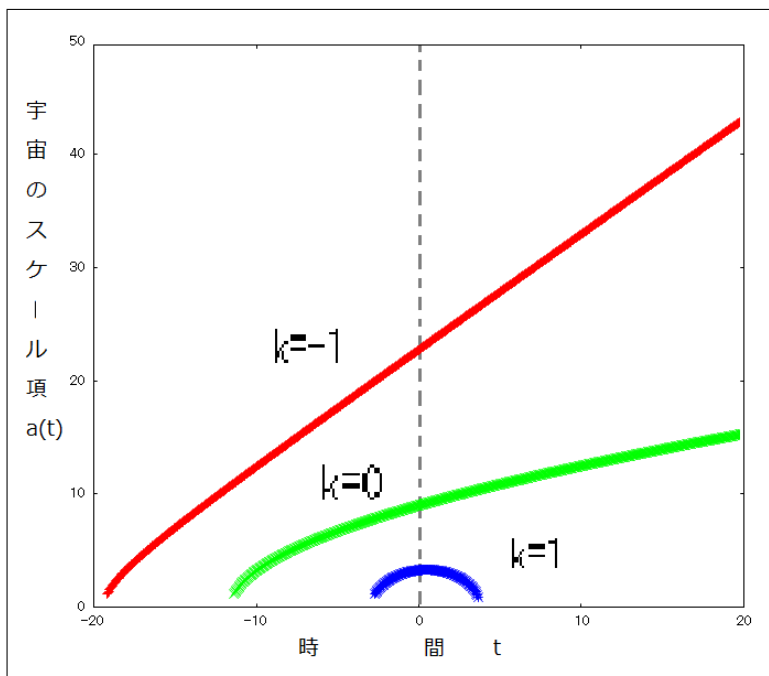


図 10: 宇宙膨張の時間変化

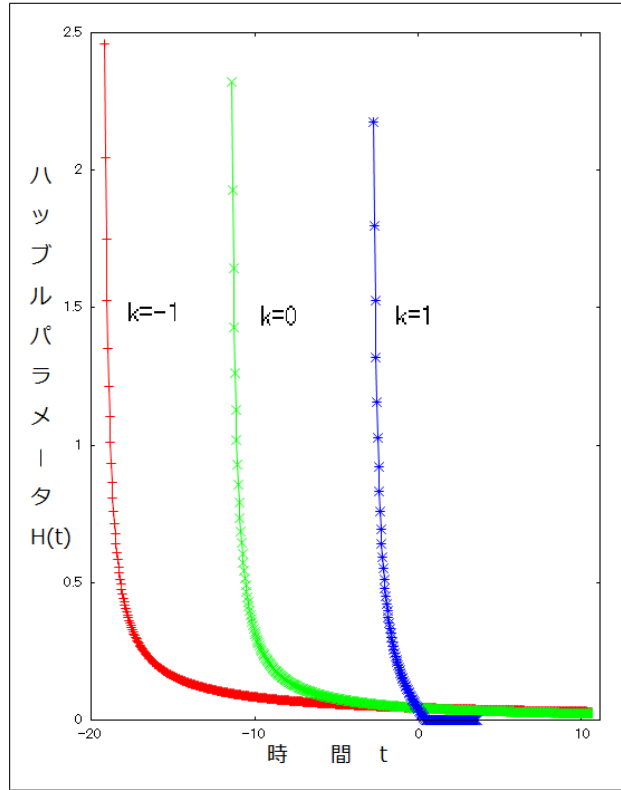


図 11: ハッブルパラメータの時間変化

ハッブルパラメータ  $H_0$  は式 (15) からわかるように、現在の宇宙の膨張速度を表しているといえる。ハッブルが遠方の 18 個の銀河を測定していた時、 $H$  は定数だと考えられていた。しかし、その 70 年ほどのちに、ソール・パールムッターによって、遠方の銀河に発生する超新星爆発を観測することによって、図 11 のようにハッブルパラメータは定数ではないことがわかった。宇宙の膨張は加速膨張していることが発見されたのである。

## 5 宇宙論パラメータ

ハッブルの法則によって宇宙が膨張していることが発見された。しかし、それだけではこの宇宙がどのような歴史を歩んできたか、どのようにして宇宙構造が形成されたのか、今後どのように進化していくのかを知ることはできない。このような事象を詳しく知るためには、宇宙モデルを形作るパラメータの様子をより詳しく知る必要がある。

ここでは、密度パラメータ、宇宙項パラメータ、曲率パラメータについて説明する。

### 5.1 密度パラメータ

曲率  $k = 0$  となるような臨界密度は、宇宙項  $\Lambda = 0$  の時、次式で表される。

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G_N} \quad (17)$$

臨界密度とは、宇宙全体における膨張の勢いと物質間の引力が釣り合うような密度のことである。エネルギー密度をこの臨界密度で規格化することで、密度パラメータを得ることができる。

密度パラメータを  $\Omega_{tot}$  としたとき、その値は現在のエネルギー密度  $\rho_0$  と臨界密度  $\rho_c$  の比例式で定義することができる。以下にその式を示す。

$$\Omega_{tot} = \frac{\rho_0}{\rho_c} \quad (18)$$

この式 (18) と式 (16) により、宇宙膨張の様子を記したフリードマン方程式の一部である式 (5) は以下のように表すことができる。

$$\frac{k}{a^2 H_0^2} = \Omega_{tot} - 1 + \frac{\Lambda}{3H_0^2} \quad (19)$$

### 5.2 宇宙項パラメータ

現在の宇宙が加速膨張をしていることは発見で知られている。この宇宙を加速膨張させている源であるエネルギーがダークエネルギーであると考えられている。ダークエネルギーを最もシンプルに表現する項として挙げられるのが、アインシュタイン方程式やフリードマン方程式における宇宙定数  $\Lambda$  である。

このダークエネルギーの割合を表すパラメータを宇宙項パラメータ  $\Omega_\Lambda$  とし、上の式 (19) において宇宙定数を含む項を、宇宙項パラメータ  $\Omega_\Lambda$  として以下のように定義する。

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \quad (20)$$

よって、式(19)は、以下のように表すことができる。

$$\Omega_{tot} + \Omega_\Lambda = 1 + \frac{k}{a^2 H_0^2} \quad (21)$$

### 5.3 曲率パラメータ

アインシュタインの理論によって、宇宙は一様等方であると仮定されている。3章でも記したように、そのような空間ではその曲率  $k$  が正、0、負の三種類のみである。

この空間の曲率のパラメータを曲率パラメータ  $\Omega_k$  とし、式(21)における曲率  $k$  を含む項を、曲率パラメータ  $\Omega_k$  として以下のように定義する。

$$\Omega_k = -\frac{k}{a^2 H_0^2} \quad (22)$$

### 5.4 パラメータで表すフリードマン方程式

上記で定義した密度パラメータ、宇宙項パラメータ、曲率パラメータを用いることで、フリードマン方程式による宇宙のふるまいを表すことができる。

密度パラメータ  $\Omega_{tot}$ 、宇宙項パラメータ  $\Omega_\Lambda$ 、曲率パラメータ  $\Omega_k$  をフリードマン方程式の式(5)に代入したとき、以下の条件式が得られる。

$$\Omega_{tot} + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 \quad (23)$$

この式のもとで宇宙論パラメータの値を変更することによって、宇宙のスケール項  $a$  の時間変化を得ることができ、宇宙膨張の様子を可視化することができる。

## 6 宇宙膨張アプリケーションの解説

### 6.1 開発環境

5章でフリードマン方程式の1つが，宇宙論パラメータのみを用いた式  $\Omega_{tot} + \Omega_{\Lambda} + \Omega_k = 1$  によって記述できることを示した．この3つのパラメータを，ユーザが自由に変更することによって，様々な宇宙の様子を可視化できる．本研究における着地点として，この宇宙論パラメータの式を用いて，宇宙膨張の時間変化をグラフとして可視化するアプリケーションを作成した．

開発環境として，Java 言語を使用した．ポインティングデバイスによる情報の表示が行える GUI ライブラリに Swing を使い，ユーザ入力によってグラフを作成し表示を行う Java アプリケーションを作成した．グラフ作成および表示には，Java で記述されたフリーライブラリである JFreeChart を使用した [9]．JFreeChart を使用することによって，円グラフ，折れ線グラフ，散布図等様々な統計図表や関数のグラフを容易に描くことが可能である．グラフの出力形式として，Swing のコンポーネントを使用した．

### 6.2 フローチャート

以下の図 12 にユーザーの操作におけるフローチャートを示す．学習方法を選択し，それぞれの学習に応じたグラフを計算し出力する関数「Gakushu1」「Gakushu2」「Gakushu3」を実行する．また，クリアボタンを押すことにより，ユーザー操作及びグラフ表示のクリアや配列の初期化を行う関数である「prefClear」を実行する．

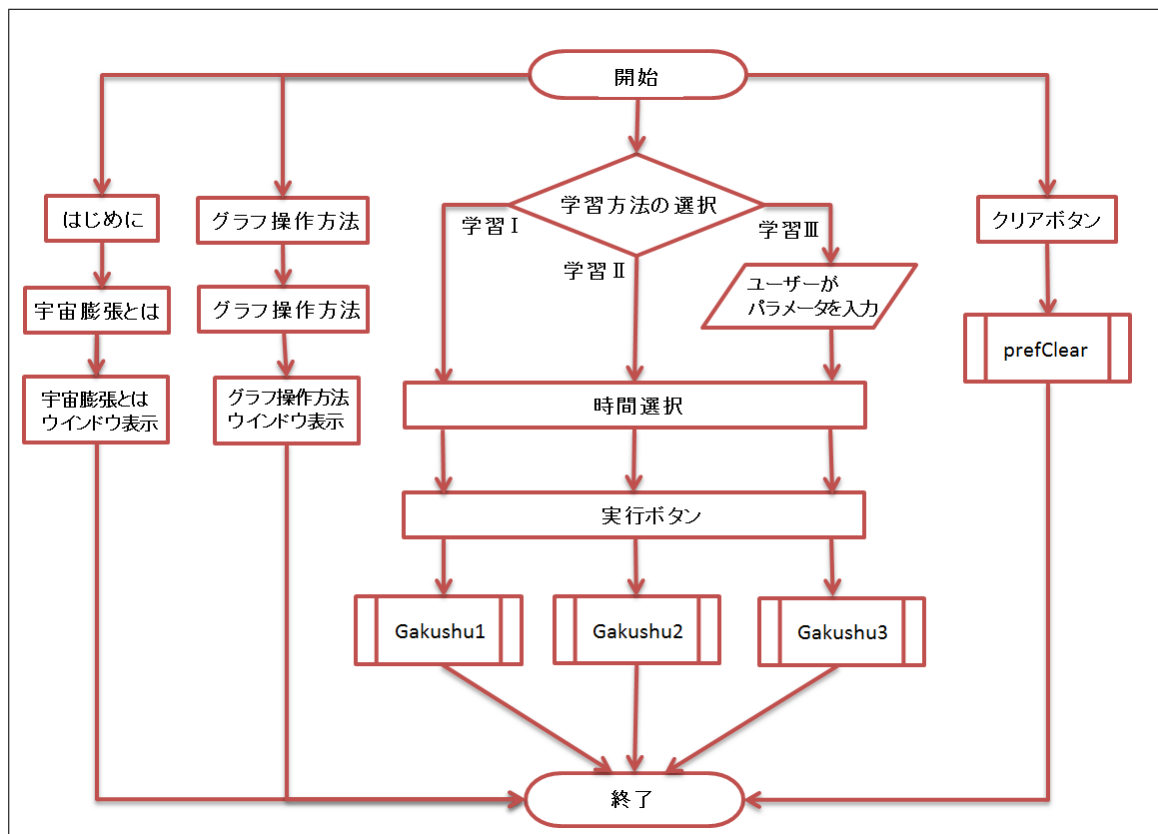


図 12: 宇宙膨張アプリケーションのフローチャート

### 6.3 画面構成

作成した宇宙論パラメータを用いた宇宙膨張アプリケーションの画面構成を説明する。起動時の画面例を以下の図 13 に示す。



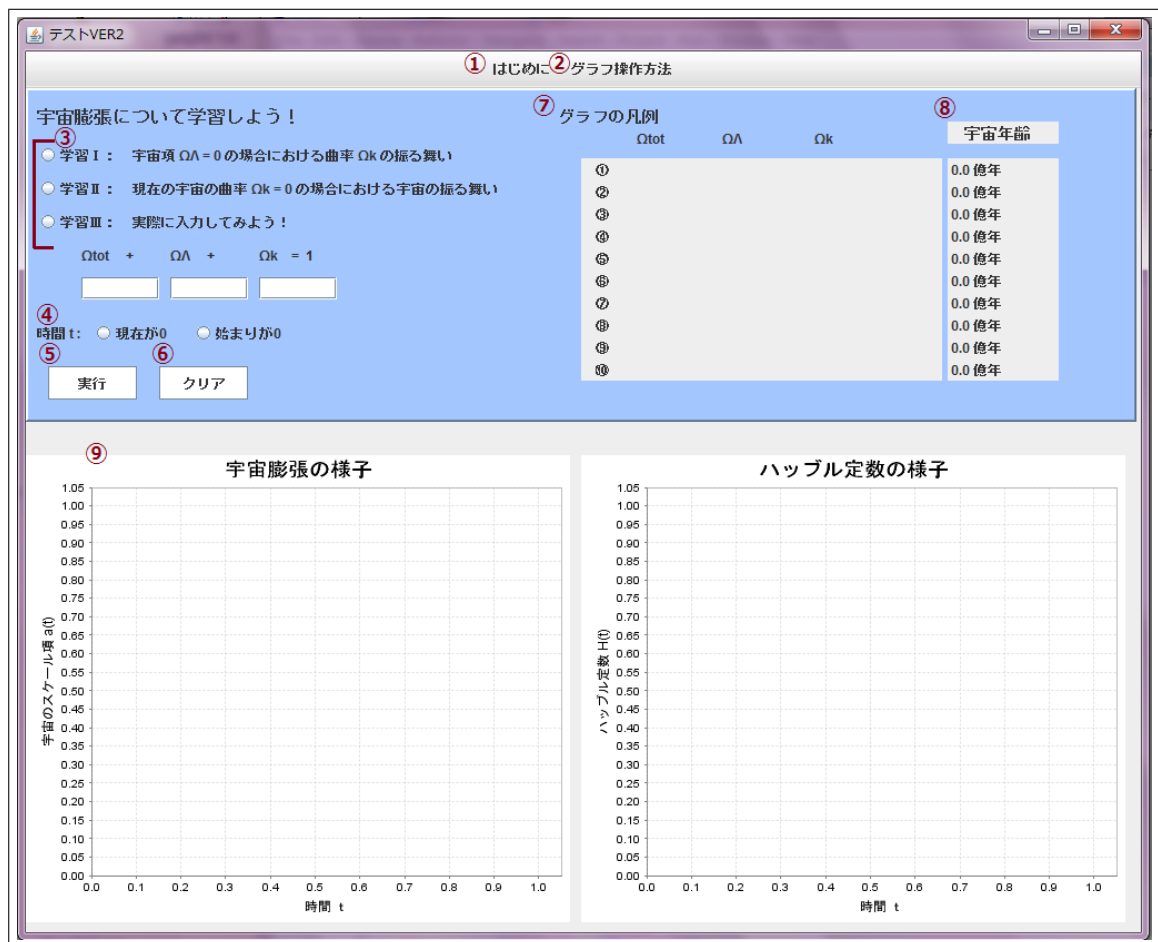


図 13: 宇宙膨張アプリケーションの画面例（起動時）

## 1. はじめに

宇宙膨張と宇宙論パラメータの関係について簡単に説明するウィンドウを表示する。

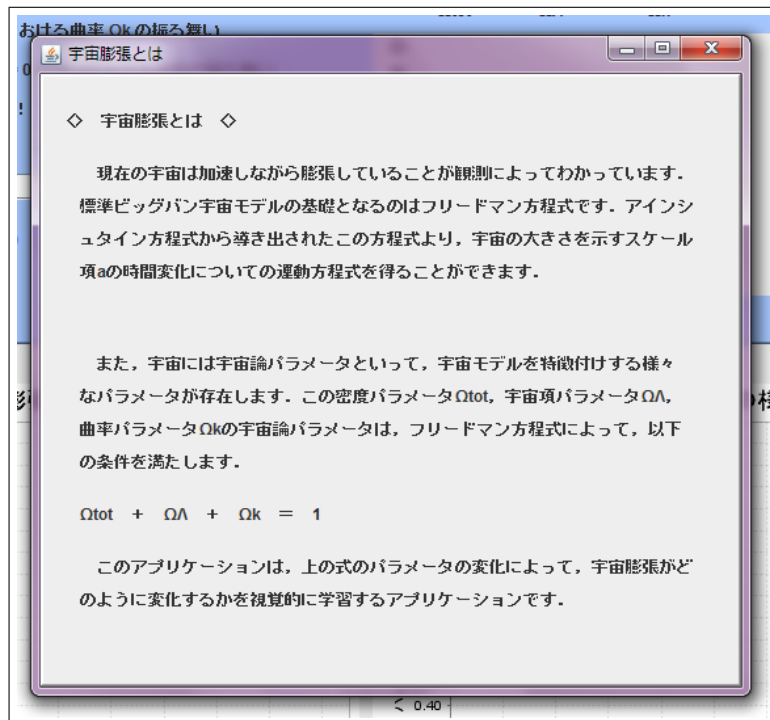


図 14: 宇宙膨張説明画面

## 2. グラフの操作方法

グラフの値をもっと拡大して観察したい場合の拡大及び縮小の方法を説明するウィンドウを表示する。

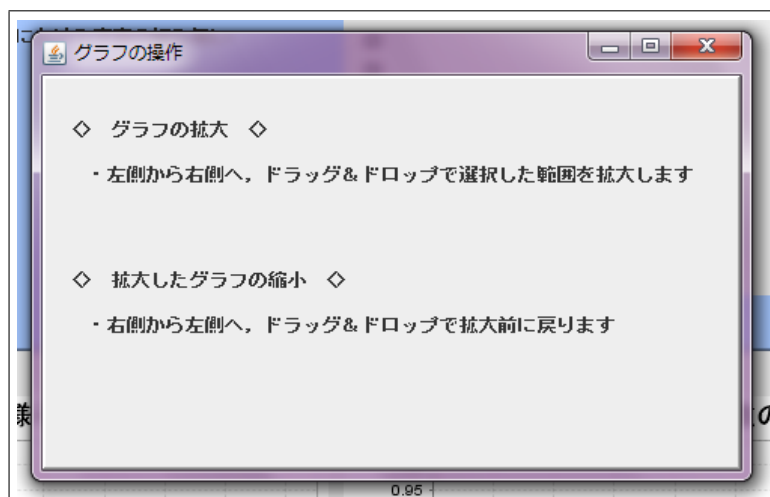


図 15: グラフ操作説明画面

## 3. 学習方法の選択

3通りの学習方法を選択し、表示するグラフを決定する。

学習 I は、「宇宙項パラメータ  $\Omega_\Lambda = 0$  の場合における曲率パラメータ  $\Omega_k$  の振る舞い」をグラフ化する。学習 II は、「曲率パラメータ  $\Omega_k = 0$  の場合における宇宙の振る舞い」をグラフ化する。 $\Omega_{tot}$  を 0.1~1.0 までの 0.1 刻みとし 10 通りのグラフを出力した。学習 III では宇宙論パラメータの式の値を、ユーザ自身で入力することで比較することができるようにした。グラフ数の上限は 10 本とする。

学習 III において、合計値が 1 でない場合には以下のエラーウィンドウを表示する。

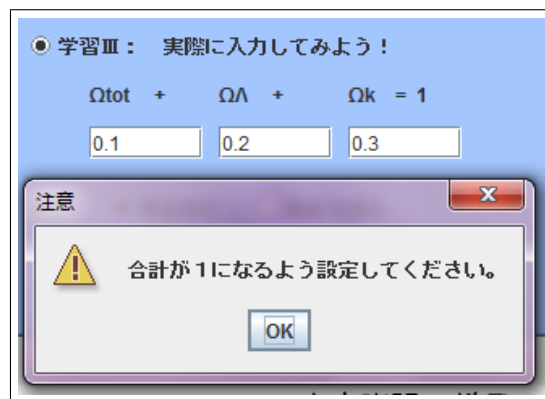


図 16: 合計が 1 でない時のエラー画面

また、密度パラメータ  $\Omega_{tot}$  及び宇宙項パラメータ  $\Omega_\Lambda$  に負の値を入れた場合、以下のエラーウィンドウを表示する。

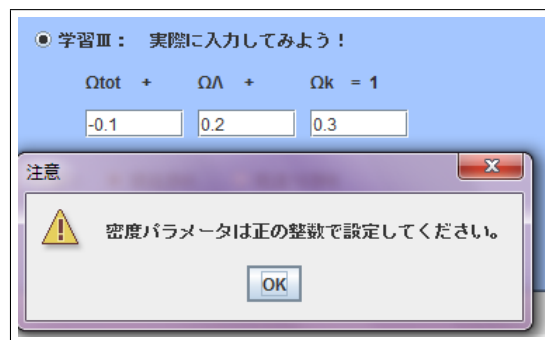


図 17: 密度パラメータ  $\Omega_{tot}$  の値が負の場合のエラー画面

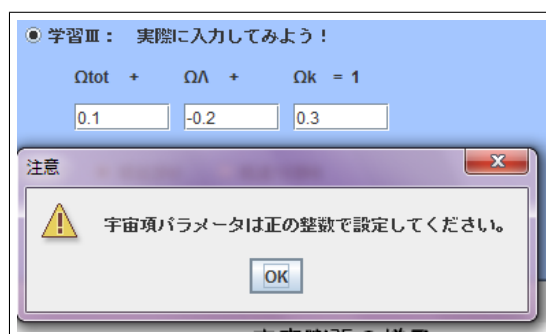


図 18: 宇宙項パラメータ  $\Omega_\Lambda$  の値が負の場合のエラー画面

#### 4. 時間選択ラジオボタン

グラフを表示するための時間  $t$  を決定する。宇宙のスケール項とハッブル定数のグラフを表示するに当たり、現在の時間を 0 とした場合と、宇宙の始まりを 0 とした場合の二種類を選択できる。この時間選択ラジオボタンは時間データを決定するのに必須であるため、選択せずに実行ボタンを押した場合にエラーウィンドウを表示する。

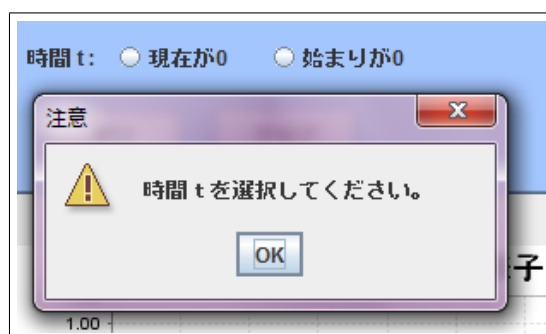


図 19: 時間選択ラジオボタンが未選択の場合のエラー画面

#### 5. 実行ボタン

学習項目 I~III のいずれかを選択し、実行ボタンを押すことでグラフが表示される。

#### 6. クリアボタン

表示されたグラフ、選択したラジオボタン、学習 III において入力した値、凡例、宇宙年齢、配列データをクリアする。

#### 7. グラフの凡例

選択されたそれぞれの学習において生成したグラフデータに対応する宇宙論パラメータの式  $\Omega_{tot} + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$  のそれぞれの値を、表示するグラフデータの数だけ表示する。

## 8. 宇宙年齢

4. で、現在の宇宙を 0 と選択した場合、現在から宇宙の始まりまでの時間を宇宙年齢として表示する。単位は億年である。

## 9. グラフの表示

上の入力パネルで選択した学習に応じて生成したデータをグラフ表示する。左側が、宇宙膨張の時間変化のグラフであり、横軸を時間  $t$  の変化、縦軸を宇宙のスケール項  $a$  とおく。右側はハッブル定数の時間変化をグラフ表示する。横軸は時間  $t$ 、縦軸はハッブルパラメータ  $H$  を表している。

## 6.4 使用例と考察

### 6.4.1 学習 I の場合

学習 I では、宇宙の基本的な形である曲率  $k$  の違いにおける宇宙膨張の様子を比較する。3 章でも述べた、宇宙のもっとも基本的な形である「開いた宇宙」、「平坦な宇宙」、「閉じた宇宙」の宇宙膨張の様子の時間変化のグラフを表示する。学習 I のラジオボタンを選択し、時間選択ボタンで比較したい時間を選択、実行ボタンで実行することにより、以下の図 20 のグラフを得ることができる。

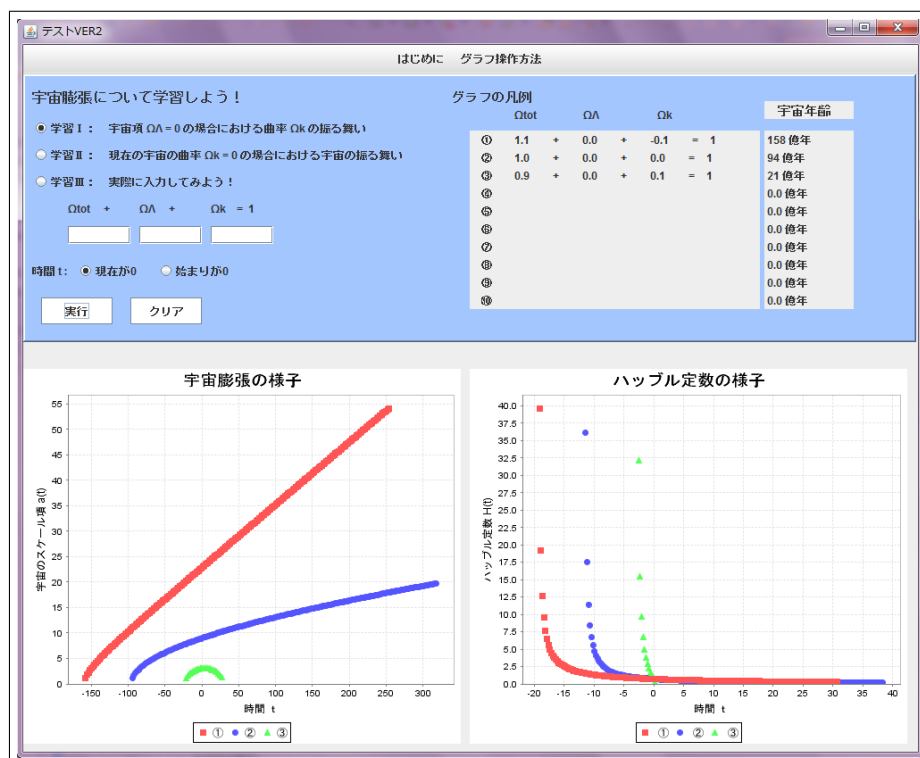


図 20: 学習 I の例

画面右上のグラフの凡例にはグラフの本数と同じだけの凡例が表示される。それぞれの凡例番号は、グラフ下の番号と対応している。ここで、 $\Omega_k$  に注目してみると、曲率パラメータ  $\Omega_k$  は正、0、負の三種類に分かれている。この曲率の違いがそれぞれ「開いた宇宙」、「平坦な宇宙」、「閉じた宇宙」に対応していることがわかる。

## 6.4.2 学習 II の場合

現在の宇宙モデルでは、曲率パラメータは  $\Omega_k = 0.0$  といわれている。学習 II では、曲率パラメータを  $\Omega_k = 0.0$  と固定した時の他のパラメータの値の違いによる宇宙膨張を 10 通り表示させる。物質が存在する空間において密度は必ず正の値を持つため、密度パラメータ  $\Omega_{tot}$  は  $1.0 \sim 0.1$  の 10 通りとし、その時の宇宙膨張の様子を比較する。

学習 II を選択し、比較したい時間を時間選択ラジオボタンで選択する。最後に実行ボタンを押すことで曲率パラメータ  $\Omega_k = 0.0$  の場合の宇宙膨張の変化の様子を比較したグラフ画面が表示される。その画面を図 21 に示す。

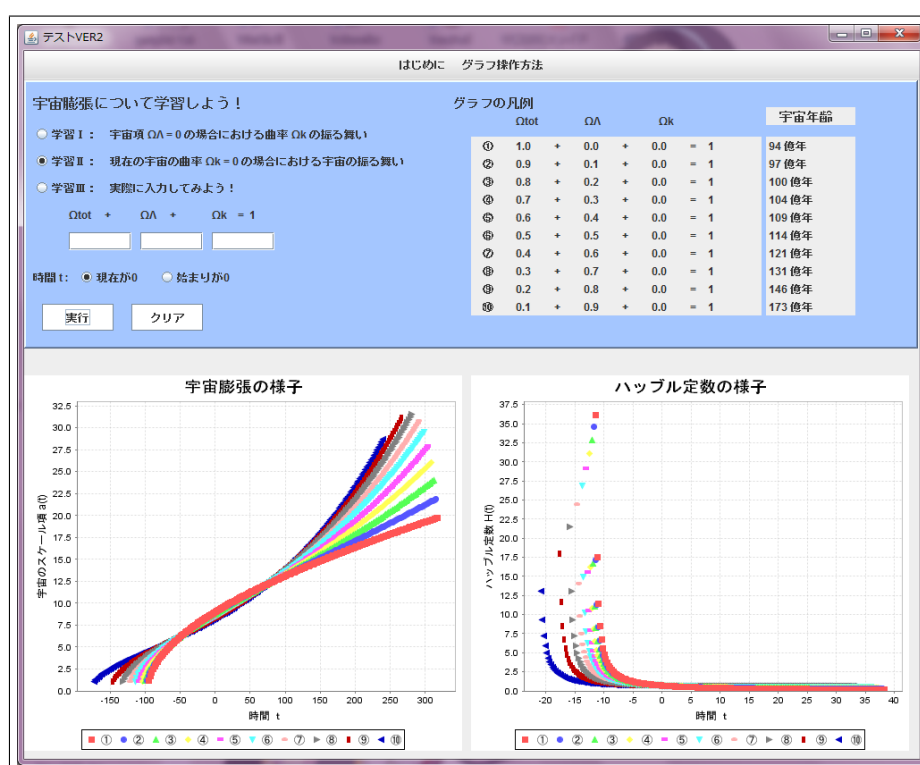


図 21: 学習 II の例

この図から、宇宙項パラメータの値が大きければ大きいほど、宇宙が加速膨張していることがわかる。宇宙の加速膨張はつまり、宇宙定数の存在を示唆しているのである。

### 6.4.3 学習 III の場合

学習 III の例として現在の宇宙モデルにおけるパラメータの値を用いる。現在の宇宙モデルは、Planck 衛星による宇宙背景輻射の観測データなどから、 $\Omega_{tot} = 0.25$ ,  $\Omega_{\Lambda} = 0.75$ ,  $\Omega_k = 0.0$  と言われており、その宇宙年齢は 138 億年とされている。

学習 III では、この 3 種類の宇宙論パラメータの値を、該当する入力欄にキーボードから実際に入力する。手順を以下に示す。学習 III を選択し、時間選択ラジオボタンによって表示する時間の範囲を指定する。ここでは現在の時間を  $t = 0$  とおき、宇宙年齢を表示させる。最後に実行ボタンを押すことで、入力した宇宙論パラメータの分布の場合における宇宙膨張の様子及び、ハッブルパラメータの時間変化の様子のグラフが表示される。その図が以下の図 22 である。

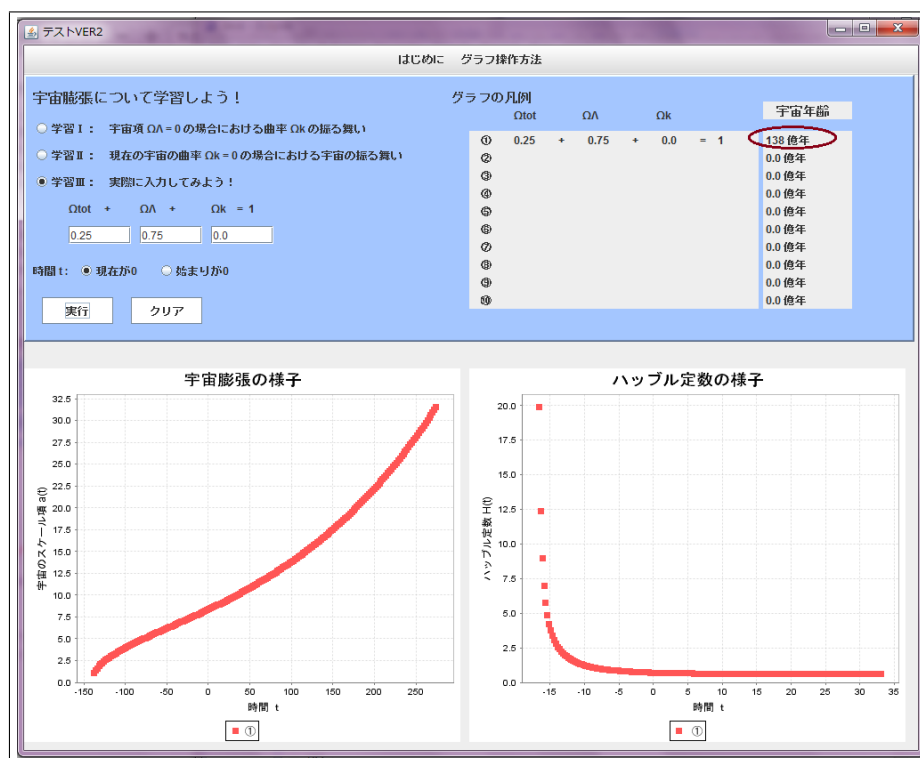


図 22: 学習 III ( $\Omega_{tot} = 0.25, \Omega_{\Lambda} = 0.75, \Omega_k = 0.0$ ) の例

ここで、グラフの凡例表示では、入力した値が、それぞれのパラメータの値と対応して表示されている。宇宙年齢を、現在もっとも有力とされている 138 億年と表示させた。



## 7 結論

今回、宇宙のスケール項及び、ハッブルパラメータを計算し、宇宙膨張の時間変化の様子を可視化するアプリケーションを作成した。このアプリケーションによって、宇宙論パラメータの違いによる宇宙の振る舞いの比較を、ユーザーが自らの操作で学習することができる。また、現在の宇宙モデルにおける宇宙論パラメータの値を入力することで、現在の宇宙と同じく、宇宙が加速膨張をしていることを視覚的に捉えることができた。

本研究では、宇宙論パラメータとして、密度パラメータ、宇宙項パラメータ、曲率パラメータの違いにおける宇宙の振る舞いを可視化した。密度パラメータは、物質や放射、ダークマターなど様々な密度パラメータにさらにモデル化することができる。今後の課題として、今回取り上げたパラメータ以外の宇宙論パラメータを導入した宇宙膨張の比較プログラムの作成が挙げられるだろう。

## 参考文献

- [1] 佐藤勝彦『相対性理論』 p165-p.194 (岩波書店, 1996 年)
- [2] 真貝寿明『徹底攻略 常微分方程式』 p.200-p.201 (共立出版, 2010 年)
- [3] 福江 純『目からウロコの宇宙論入門』 (ミネルヴァ書房, 2008 年)
- [4] 佐藤勝彦・二間瀬敏史『宇宙論 I—宇宙のはじまり』 (日本評論社, 2008 年)
- [5] 佐藤勝彦・二間瀬敏史『宇宙論 II—宇宙の進化』 (日本評論社, 2007 年)
- [6] Timeline of the Universe <http://map.gsfc.nasa.gov/media/060915/index.html>
- [7] ルンゲクッタ法 <http://www.me.tokushima-u.ac.jp/miw/wadai/IP3/06/10/10.html>
- [8] ロバートソン・ウォーカー計量 <http://homepage2.nifty.com/eman/relativity/flrw.html>
- [9] JFreeChart <http://www.jfree.org/jfreechart/>