

ブラックホールの重力場の影響を受けたガス雲の運動

大阪工業大学 情報科学部 情報システム学科

B11-100 松本勇輝

2015年2月9日

目次

1	序論	3
1.1	背景	3
1.2	本研究の目的	3
1.3	本論文の構成	3
2	時空の概念	4
2.1	シュバルツシルト時空	4
2.2	カー時空	4
3	粒子の軌跡のシミュレーション方法	5
3.1	一般論	5
3.2	方法論	5
3.3	円運動によるプログラムテスト	7
4	Pseudo-Newtonian ポテンシャル	8
4.1	Paczynski-Wiita ポテンシャル	8
4.2	ポテンシャルの比較	9
4.3	Mukhopadhyay ポテンシャル	10
4.4	カーパラメータ変更による力の比較	11
5	SPH 法による 3 次元流体シミュレーション	12
5.1	物理量の表現	12
5.2	流体力学の方程式	12
5.3	ガス雲の運動シミュレーション	15
6	ブラックホール周辺を運動するガス雲のシミュレーション	17
6.1	Newton 重力とシュバルツシルト時空の比較	17
6.2	カー時空によるガス雲の運動	19
6.3	ガス雲に与える回転パラメータの影響	21
6.4	空間自由度 2 次元と 3 次元の比較	24
6.5	ガス雲の円運動による降着円盤形成過程	27
7	まとめ	30

1 序論

1.1 背景

私たちがいる天の川銀河の中心には、超大質量ブラックホールがあるとされており、このブラックホールに接近する「G2」と呼ばれるガス雲だとされるものを、Newton 重力でシミュレーションした先行研究がある [1]。このシミュレーションの 2 次元と 3 次元の計算は大きく異なる結果となった [2] が、相対論によるシミュレーションを行えば、更に異なる結果を示すかもしれない。

2014 年 11 月にはケック天文台による赤外線観測によって、ブラックホールに最接近した G2 が引き伸ばされていないことが分かった。この観測結果から G2 はガス雲ではなく、連星が合体してできた星である可能性が指摘された [3]。

しかし、この観測結果とは違う結果も報告されている [4]。マックスプランク研究所の超大型望遠鏡「VLT」の赤外線観測を行ったところ、G2 がブラックホールの重力で引き裂かれていることが分かった。また G2 以外のもう一つのガス雲「G1」は、G2 より 13 年前にブラックホールに接近通過したとされており、G1 の軌道が G2 とよく似ていることから、G1 と G2 はもともとひとつながりのガス流の一部という結果も報告されている。

現段階では G2 がガス雲か星であるかを確実に証明する手段はないが、今後の研究で明らかになっていくと考えられる。

1.2 本研究の目的

本研究では、Newton 重力と相対論を比較して、ブラックホール周辺を運動するガス雲が、どのように変形するかを検証する。

ガス雲は流体で表現し、SPH(Smooth Particle Hydrodynamics) 法を用いた。時間発展には 4 次の Runge-Kutta 法を用いた。相対論計算は、Pseudo-Newtonian ポテンシャルを用いてカー時空の回転パラメータの影響を調べ、ブラックホールの回転の有無によってガス雲がどのような運動をするかを議論する。

1.3 本論文の構成

本論文では、第 2 章に本研究で扱うブラックホールの時空の概念の紹介、第 3 章でブラックホールの重力場の影響を受けた粒子の軌跡のシミュレーション方法と粒子の円運動テストの紹介をする。第 4 章では相対論計算で用いた Pseudo-Newtonian ポテンシャルの解説をして、ポテンシャルや力の比較をした説明をする。第 5 章では SPH 法を用いた流体シミュレーションの概要を紹介して、ガス雲の働きを示すシミュレーション結果を説明する。第 6 章ではブラックホール周辺を運動するガス雲のシミュレーション結果を示し、Newton 重力の場合と相対論の振る舞いの違いや、カー時空の回転パラメータの影響によるガス雲の運動の結果を示す。

2 時空の概念

本シミュレーションで扱うブラックホールの時空の概念について説明する。本章では文献 [5] を参考にした。

2.1 シュバルツシルト時空

質量だけの物理量で表現されるシュバルツシルト・ブラックホールの時空 (シュバルツシルト時空) の計量は

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) (cdt)^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1)$$

と表すことができ、この計量をシュバルツシルト計量という。ここで、 c は光の速さ、 G は重力定数、 M はブラックホールの質量である。

シュバルツシルト計量は、十分遠方の距離では Newton の万有引力が成り立つが、シュバルツシルト半径

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (2)$$

で発散し、シュバルツシルト半径が事象の地平面となる。事象の地平面は、別の異なった座標系を用いると発散しなくなるが、本研究の相対論計算で扱う Pseudo-Newtonian ポテンシャルは、事象の地平面を通過する運動を扱えない。

2.2 カー時空

質量と角運動量の物理量で表現されるカー・ブラックホールの時空 (カー時空) の計量は

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_g r}{\Sigma} \right) c^2 dt^2 - \frac{2c a r_g r \sin^2\theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2 \sin^2\theta}{\Sigma} \right) \sin^2\theta d\phi^2 \quad (3)$$

で表すことができ、この計量をカー計量という。ここで

$$a = \frac{J}{cM}, \quad \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta, \quad \Delta = r^2 - r_g r + a^2 \quad (4)$$

であり、 M はブラックホールの質量、 c は光の速さ、 J は角運動量、 r_g はシュバルツシルト半径、そして a はカーパラメータである。

カー計量は、 $J = 0$ の極限でシュバルツシルト計量になり、事象の地平面は $\Delta = 0$ より、

$$r^\pm = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r_g}{2} \right)^2 - a^2} \quad (5)$$

となり、カー時空では2つの事象の地平面が存在する。ただし、 $a = \frac{r_g}{2}$ の場合には、事象の地平面は一つだけ存在する。また式 (5) より、 $a > \frac{r_g}{2}$ の場合、事象の地平面は存在しない ($\Delta > 0$)。この場合の計量は事象の地平面が存在しないことより、ブラックホール解ではない。

本研究ではブラックホール解が存在するカー時空を扱い、 $c = G = 1$ とした単位系を用いる。また、カーパラメータ a は正の場合だけを議論するため、 $0 \leq a \leq M$ の範囲をシミュレーションする。

3 粒子の軌跡のシミュレーション方法

3.1 一般論

ブラックホールの重力場を受けた粒子の軌跡は、粒子の運動方程式を4次のRunge-Kutta法で解くことで得られる。

(x, y, z) の3次元空間を等間隔に分割し、粒子の位置の周囲の格子点8個にポテンシャルを与える。本シミュレーションでは計算領域を区間 $[-100, 100]$ として、グリッド数 10001^3 、グリッド幅 0.02 とした。

3次元空間の中心に質量 M の天体があるとき、Newton 重力でのポテンシャルの形は

$$U(x, y, z) = -G \frac{Mm}{r} = -G \frac{Mm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (6)$$

となる。ここで、 G は重力定数、 m は粒子の質量、 r は中心からポテンシャルまでの距離である。このとき、粒子の位置 $x^i = (x, y, z)$ の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = - \frac{\partial}{\partial x^i} U \quad (7)$$

と表すことができる。

3.2 方法論

粒子の軌跡は運動方程式を解くことで得られるが、式(7)の右辺にあるポテンシャルは3変数関数なので、偏微分の差分化をする必要がある。 (x, y, z) の3次元空間をそれぞれ $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ の幅で区切り、各格子点のポテンシャル $U(x, y, z) = \phi_{i,j,k}$ とした、差分化された変数とする。右辺を x について2次の項までTaylor展開をすると、

$$\phi_{i+1,j,k} = \phi_{i,j,k} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_{i,j,k} \right) \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_{i,j,k} \right) (\Delta x)^2 \quad (8)$$

$$\phi_{i-1,j,k} = \phi_{i,j,k} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_{i,j,k} \right) \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_{i,j,k} \right) (\Delta x)^2 \quad (9)$$

となり式(8)から式(9)の差をとると、

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi_{i,j,k} = \frac{\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i-1,j,k}}{2\Delta x} \quad (10)$$

となる。

同様にして、式(10)をポテンシャルの各成分について求めることで、ポテンシャルの差分化から各成分の力が得られる。

式(7)の右辺の粒子のポテンシャルは、粒子の周囲の格子点8個から加重平均をとることで得られる。粒子の周囲の格子点8個のポテンシャルを $U_1(x_n, y_n, z_n), U_2(x_n + \Delta x, y_n, z_n), U_3(x_n, y_n + \Delta y, z_n), U_4(x_n + \Delta x, y_n + \Delta y, z_n), U_5(x_n, y_n, z_n + \Delta z), U_6(x_n + \Delta x, y_n, z_n + \Delta z), U_7(x_n, y_n + \Delta y, z_n + \Delta z), U_8(x_n + \Delta x, y_n + \Delta y, z_n + \Delta z)$ とすると、粒子の位置 $x^i = (x, y, z)$ のポテンシャルは

$$U = b \cdot d \cdot f \cdot U_1 + a \cdot d \cdot f \cdot U_2 + b \cdot c \cdot f \cdot U_3 + a \cdot c \cdot f \cdot U_4 + b \cdot d \cdot e \cdot U_5 + a \cdot d \cdot e \cdot U_6 + b \cdot c \cdot e \cdot U_7 + a \cdot c \cdot e \cdot U_8 \quad (11)$$

となる。

ここで a, b, c, d, e, f はそれぞれ

$$a = \frac{x - x_n}{\Delta x} \quad (12)$$

$$b = \frac{\Delta x - a}{\Delta x} \quad (13)$$

$$c = \frac{y - y_n}{\Delta y} \quad (14)$$

$$d = \frac{\Delta y - c}{\Delta y} \quad (15)$$

$$e = \frac{z - z_n}{\Delta z} \quad (16)$$

$$f = \frac{\Delta z - e}{\Delta z} \quad (17)$$

である。加重平均で用いるポテンシャルの位置関係を以下に示す。

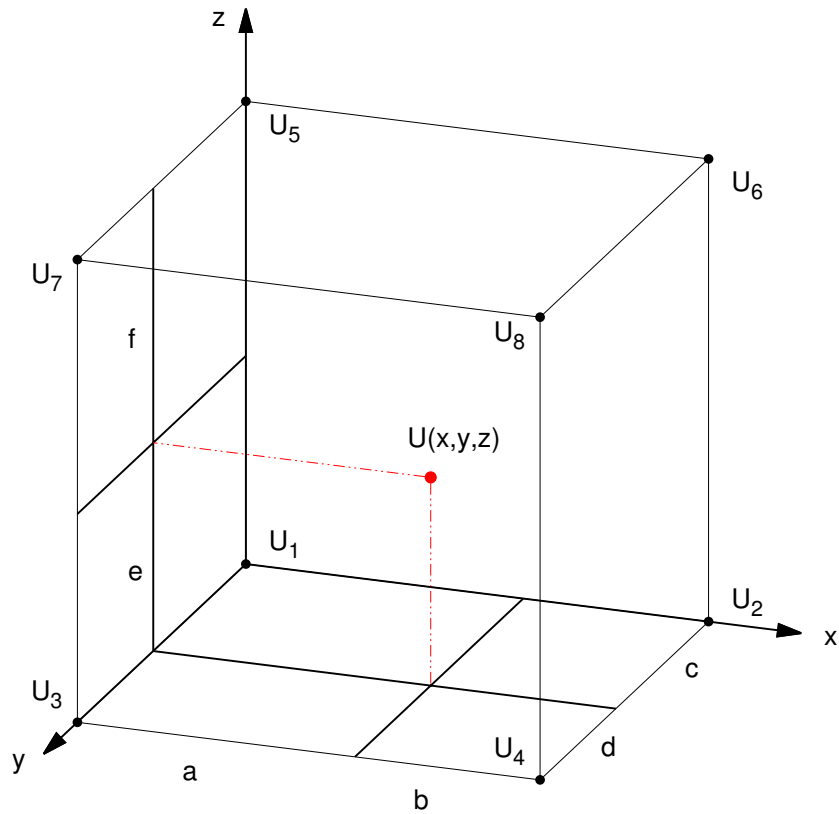


図 1: 加重平均で用いるポテンシャルの位置関係

ただし、相対論計算で用いる Pseudo-Newtonian ポテンシャルでは、ポテンシャルを与える代わりに力を与え、粒子にはたらく力を、周囲の力を加重平均して求める。

式 (7) の運動方程式は二階微分方程式であり、この運動方程式を連立一階微分方程式に書き直すと、以下のようになる。

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i \quad (18)$$

$$m \frac{dv^i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x^i} U \quad (19)$$

ここで、粒子の速度を $v^i = (v_x, v_y, v_z)$ とする。粒子の軌跡は式 (7) の運動方程式を解くことで求めることができ、式 (18) と式 (19) を四次の Runge-Kutta 法で同時に解くことで、粒子の軌跡が得られる。

3.3 円運動によるプログラムテスト

実際に正しくコードを組めたのかを確認するために、粒子が円運動する状況を作り、プログラムテストを行った。粒子の初期位置を x 軸上として $(x_0, 0, 0)$ としたとき、粒子の初速度を $(v_x, v_y, v_z) = (0, \sqrt{\frac{GM}{x_0}}, 0)$ とすれば、粒子は円運動することになる。しかし、この条件での円運動は、 xy 面での円運動を表しており、3次元空間でのコードのチェックをするためには、 xy 面、 yz 面、 zx 面での円運動のテストをする必要がある。実際に xy 面、 yz 面、 zx 面での円運動テストをした結果を示す。

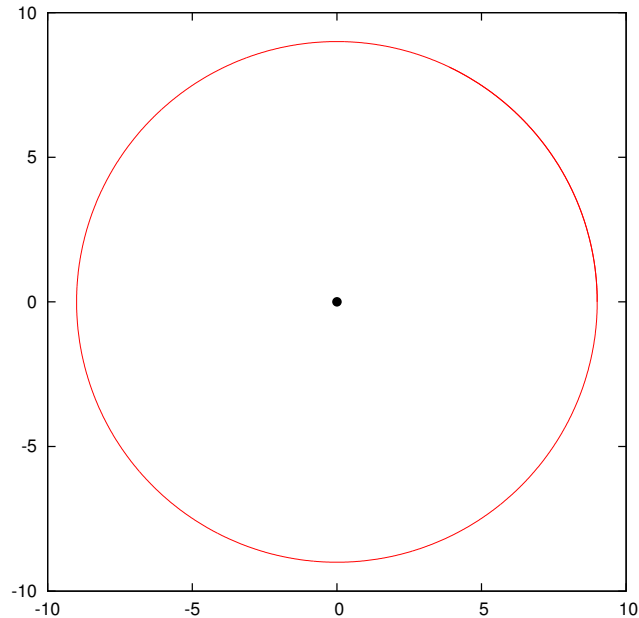


図 2: 粒子の円運動

図 2 は、3次元空間で行った円運動を2次元面でプロットした図である。この円運動テストでは、 xy 面、 yz 面、 zx 面での円運動すべてが図 2 と同じ結果になった。つまり、3次元空間でのコードが正しいことを示せたことになる。

4 Pseudo-Newtonian ポテンシャル

本研究で扱うシミュレーションでは、ブラックホール周辺の相対論的現象をうまく模倣することができる Pseudo-Newtonian ポテンシャルを用いて、厳密な相対論の近似をすることにした。

4.1 Paczynski-Wiita ポテンシャル

Paczynski-Wiita ポテンシャルは、シュバルツシルト時空を模倣する Pseudo-Newtonian ポテンシャルである [6][7]。質量 M の天体のシュバルツシルト半径を r_g とした場合、Paczynski-Wiita ポテンシャルは

$$U_{PW} = -\frac{GM}{r - r_g} \quad (20)$$

と表すことができ、Newton 重力でのポテンシャルの分母 r を、 $(r - r_g)$ に置き換えた形になる。Paczynski-Wiita ポテンシャルは、シュバルツシルト時空の力学的性質をかなりよく模倣することができるが、シュバルツシルト半径に近づくと、分母がゼロに近くなり、精度が急激に悪化する弱点がある。また、ブラックホール地平面を通過する運動は扱えない。

シュバルツシルト時空では、粒子がブラックホール周辺の円軌道を維持できる「最小安定円軌道」があり、最小安定円軌道の半径「限界安定半径」は

$$r_{ms} = 3r_g \quad (21)$$

と表せる。従って、限界安定半径は、数値的にシュバルツシルト半径の 3 倍となる。Paczynski-Wiita ポテンシャルを用いた運動でも、シュバルツシルト時空の最小安定円軌道の半径と完全に一致することが知られている。そこで、Paczynski-Wiita ポテンシャルを用いて、粒子の円運動のシミュレーションを行った。

初期条件として粒子の初期位置を r_0 、初速度を $\sqrt{\frac{GMr_0}{(r_0 - r_g)^2}}$ として、シュバルツシルト半径 $r_g = 1$ のブラックホール周辺を円運動する場合を考えた。実際にシミュレーションした結果を示す。赤の実線は粒子の軌跡、青の実線はシュバルツシルト半径である。

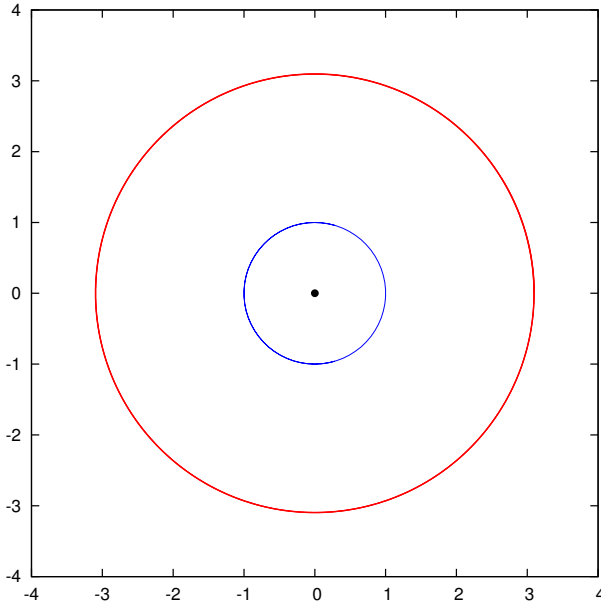


図 3: $r_0 > r_{ms}$ の場合

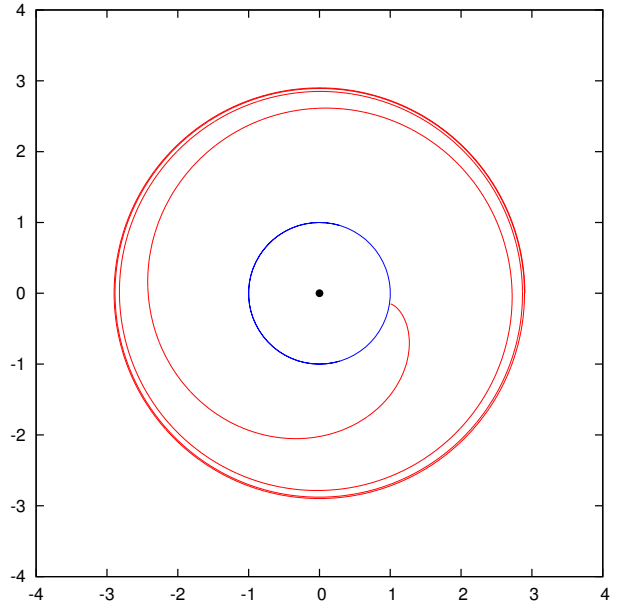


図 4: $r_0 < r_{ms}$ の場合

図 3 では、粒子の初期位置が限界安定半径より大きい場合を示しており、粒子は円運動を維持した。図 4 では、粒子の初期位置が限界安定半径より小さい場合を示しており、粒子は次第に円運動を維持できず、最後にはシュバルツシルト半径の近傍まで到達して、計算が発散することになった。また図 4 より、粒子の位

置がシュバルツシルト半径に近づくにつれて、粒子は円運動を維持できなくなる。つまり、Paczynski-Wiita ポテンシャルは、限界安定半径付近ではシュバルツシルト時空をよく模倣していることになるが、シュバルツシルト半径付近では、シュバルツシルト時空をうまく近似することができていないことになる。

4.2 ポテンシャルの比較

Newton 重力のポテンシャルと Paczynski-Wiita ポテンシャルを比較し、どのようにポテンシャルが異なるかを検証した。Newton 重力のポテンシャルと Paczynski-Wiita ポテンシャルはそれぞれ式 (6)、式 (20) の形になる。また Paczynski-Wiita ポテンシャルがシュバルツシルト時空をうまく模倣していることを確かめるために、一般相対論のポテンシャルを次式の形で用いることにした [6]。

$$U_{GR} = c^2 \ln \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \quad (22)$$

ここで、 c は光の速さ、 r_g はシュバルツシルト半径、 r は距離を表す。

ブラックホールの質量 $M = 0.5$ 、シュバルツシルト半径 $r_g = 1$ として、ポテンシャルを比較した結果を示す。赤の実線が Newton 重力、青の実線が一般相対論、緑の実線が Paczynski-Wiita ポテンシャルである。

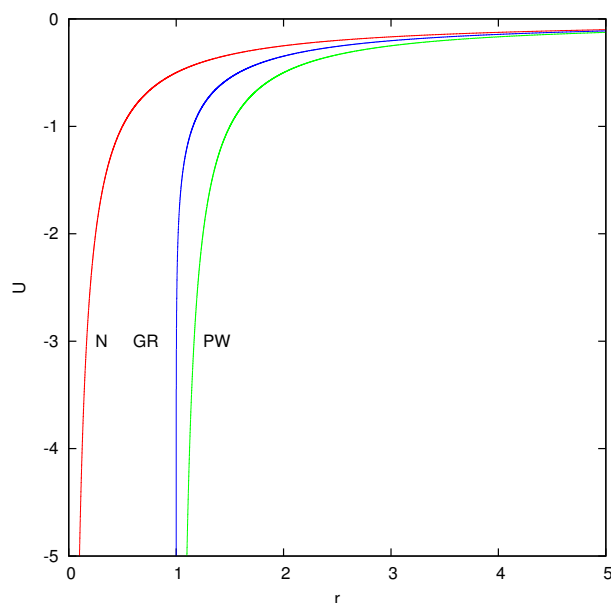


図 5: ポテンシャルの比較 (縦軸:ポテンシャル, 横軸:距離)

図 5 より、Newton 重力と Paczynski-Wiita ポテンシャルは大きく異なる結果を示した。また、Paczynski-Wiita ポテンシャルは一般相対論のポテンシャルをよく近似しており、シュバルツシルト半径でポテンシャルは発散する。

4.3 Mukhopadhyay ポテンシャル

Mukhopadhyay は、カー時空を模倣する Pseudo-Newtonian ポテンシャルを導き出した [8]。Mukhopadhyay ポテンシャルは

$$U_M = -\frac{a^2}{2r^2} + \frac{4a}{\sqrt{r}} + \frac{2(9a^3r - 10ar + 16\sqrt{r} - 13a^2\sqrt{r} + 6a^3 - 8a)}{(27a^2 - 32)(r^{3/2} - 2\sqrt{r} + a)} - 2\log(r) \\ + \frac{2}{27a^2 - 32} \sum_{r_i=r_1, r_2, r_3} \left[\frac{1}{3r_i^2 - 2} \log(\sqrt{r} - r_i)(54a^2r_i^2 - 64r_i^2 + 63a^3r_i - 74ar_i - 107a^2 + 128) \right] \quad (23)$$

となる。ここで

$$r_1 = \frac{2^{4/3}}{p} + \frac{p}{2^{1/3}3}, \quad r_2 = -\left(\frac{2^{1/3}q}{p} + \frac{pq^*}{2^{1/3}6}\right), \quad r_3 = r_2^*, \\ p = \left(\sqrt{729a^2 - 864} - 27a\right)^{1/3}, \quad q = 1 + i\sqrt{3} \quad (24)$$

として、数式中に現れるアスタリスク (*) は共役な複素数、 a はカーパラメータを示している。式 (23) のポテンシャルは非常に複雑な形をしているが、 $a=0$ の場合には式 (20) の Paczynski-Wiita ポテンシャルと一致する。また、 $a = \pm 1$ と $a = \pm 0.5$ の場合、それぞれ次のようになる。

$$U_M^{\pm 1} = -\frac{1}{2r^2} \pm \frac{4}{\sqrt{r}} - \frac{2}{5} \left\{ \frac{\mp r + 3\sqrt{r} \mp 2}{r^{3/2} - 2\sqrt{r} \pm 1} + \log \frac{(\sqrt{r} \pm B)^A}{(\sqrt{r} \mp D)^C} \right\} - 2\log(r) \quad (25)$$

ここで、 $A=2.15542$ 、 $B=1.61803$ 、 $C=12.1554$ 、 $D=0.618034$ 、そして

$$U_M^{\pm 0.5} = -\frac{1}{8r^2} \pm \frac{2}{\sqrt{r}} - E \left\{ \frac{\mp 7.75r + 25.5\sqrt{r} \mp 6.5}{2r^{3/2} - 4\sqrt{r} \pm 1} + \log \frac{(\sqrt{r} \pm G)^F}{(\sqrt{r} \mp I)^H (\sqrt{r} \mp K)^J} \right\} - 2\log(r) \quad (26)$$

ここで、 $E=0.0792079$ 、 $F=5.64616$ 、 $G=1.52569$ 、 $H=5.93863$ 、 $I=1.26704$ 、 $J=50.2075$ 、 $K=0.258652$ である。

Mukhopadhyay ポテンシャルの力は

$$\mathbf{F}_M = -\frac{(r^2 - 2a\sqrt{r} + a^2)^2}{r^3[\sqrt{r}(r-2) + a]^2} \quad (27)$$

となり、非常にシンプルな形で表現できる。式 (23)～式 (27) はすべて $c = G = M = 1$ としているため、常にシュバルツシルト半径 $r_g = 2$ となる。ここで、一般化した Mukhopadhyay ポテンシャルの力

$$\mathbf{F}_M = -\frac{r_g \left(r^2 - 2a\sqrt{\frac{rr_g}{2c^2} + \frac{a^2}{c^2}} \right)^2}{2r^3 \left[\sqrt{r}(r - r_g) + a\sqrt{\frac{r_g}{2c^2}} \right]^2} \quad (28)$$

を導き、シミュレーションで用いた。

4.4 カーパラメータ変更による力の比較

一般化した Mukhopadhyay ポテンシャルの力の式 (28) を用いて、カーパラメータを変更した場合の力を比較した。ここで初期条件は、ブラックホールの質量 $M = 0.5$ として、シュバルツシルト半径 $r_g = 1$ とした。下図は、カーパラメータ $a = 0.8M$ と $a = M$ の場合における距離と力の変化を示している。

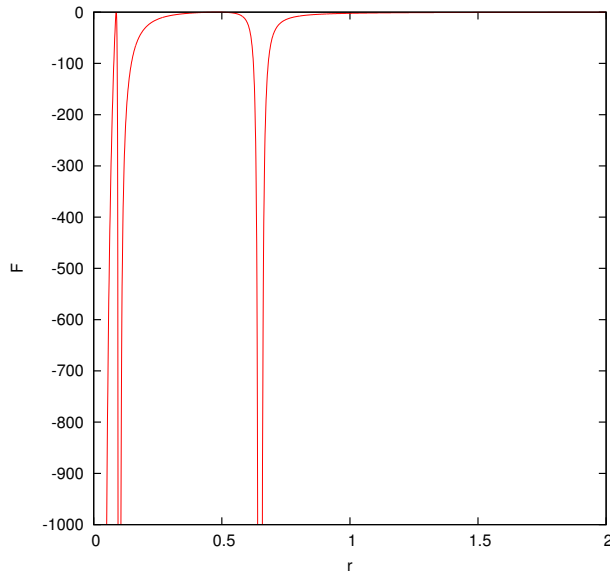


図 6: $a = 0.8M$ の場合 (縦軸:力, 横軸:距離)

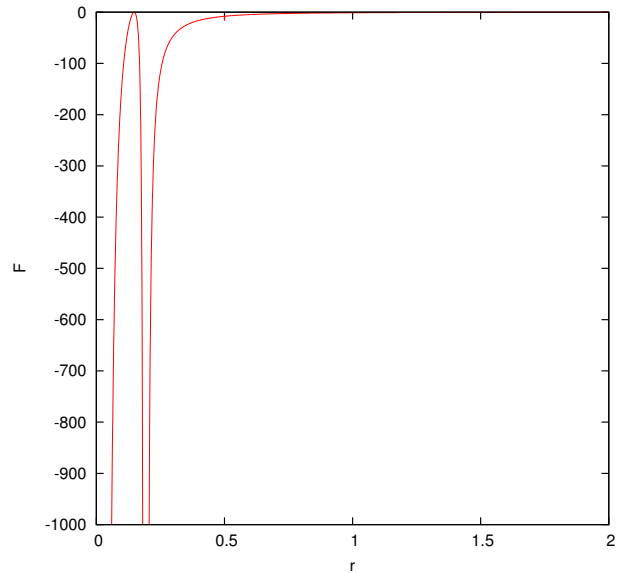


図 7: $a = M$ の場合 (縦軸:力, 横軸:距離)

カーパラメータ $a = 0.8M$ の場合、ブラックホールの中心以外にも力が極めて大きいところが二つ存在した。この二つのところが事象の地平面を表すことになる。カーパラメータが最大 $a = M$ の場合、ブラックホールの中心と事象の地平面の場所で力が極めて大きくなった。つまり、カーパラメータが最大 $a_{max} = M$ になれば、事象の地平面は一つだけ存在し、カーパラメータの範囲が $0 < a < a_{max}$ の場合には、内側の事象の地平面と外側の事象の地平面が現れることになる。また、Pseudo-Newtonian ポテンシャルで現れる事象の地平面は、実際のカー時空から得られる事象の地平面の内側に存在することが分かった。

5 SPH 法による 3 次元流体シミュレーション

本シミュレーションで扱うガス雲は流体で表現し、流体の運動方程式を解く必要がある。流体のシミュレーションをすることは非常に難しいので、本シミュレーションでは SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics) 法を用いて行うことにした。重力多体 (N 体) シミュレーションとの最大の違いは、粒子に大きさを与え、粒子間に圧力勾配の力を含めて扱えることである。SPH 法は本質的に 3 次元計算を行うことになるが 1 次元、2 次元に比べて困難さがなく、アルゴリズムがきわめて簡単であることが挙げられる。しかし、計算時間が長いなど SPH の短所も当然ながら存在する。本章では文献 [9] を参考にした。

5.1 物理量の表現

SPH では、広がりをもった粒子が、互いに重なり合った集合体として流体を記述し、物理量はカーネル関数を用いて表現する。このような物理量の表現をすることで、広がりを持った粒子の重ね合わせで流体を記述することができる。

SPH では物理量 $f(\mathbf{x})$ はカーネル関数 W により

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int_0^h W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (29)$$

となる。ここで h は粒子の広がりを表す。また、カーネル関数は規格化のため次の関係を満たす必要がある。

$$\int_0^h W(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1 \quad (30)$$

本シミュレーションではカーネル関数はガウス関数を用いることにした。例えば、1 個の粒子の分布関数は

$$W(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{h^3} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{h^2}\right) \quad (31)$$

となり、流体の密度は分布関数の重ね合わせで決定される。ここで $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ である。

5.2 流体力学の方程式

ここでは流体力学の方程式を SPH で記述して、流体のシミュレーション方法を紹介する。まず、星や星間ガス雲の状態方程式はポリトロープの関係式

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}} \quad (32)$$

を使う。ここで、 P と ρ はそれぞれ圧力と密度を表し、 K と n (ポリトロープ指数) は定数である。また、ポリトロープ指数 n のかわりに、 γ (比熱比)

$$\gamma \equiv 1 + \frac{1}{n} \quad (33)$$

を定義して、シミュレーションを行う。通常 γ は $0 \leq \gamma \leq 2$ とされる。

流体力学の方程式は、連続の式

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\nabla \cdot \mathbf{v} \quad (34)$$

運動方程式

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P - \rho\nabla\Psi \quad (35)$$

からなる。ここで ∇ は微分演算子であり、 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T$ である。また P は流体の圧力、 ρ は密度、そして Ψ は重力ポテンシャルである。SPH では流体を表現する粒子の運動を追跡することから、連続の式は自動的に成立する。 i 番目の粒子の運動方程式は

$$\frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} = -\frac{1}{\rho(\mathbf{x}_i)} \nabla P(\mathbf{x}_i) - \mathbf{G}_i - \mathbf{Q}_i \quad (36)$$

であり、この式をすべての粒子について解くことで式 (32) とともに流体の運動は完全に決定する。ここで \mathbf{G} は重力による力を表し、 \mathbf{Q} は流体に特徴的な衝撃波面を記述するために必要な人工粘性項である。具体形は以下で与える。

具体的に粒子の運動方程式を解くことを考える。まず初期状態として密度一定の球状の天体を仮定すると、流体を表現する粒子 1 個の質量は、

$$m_0 = \frac{M_0}{N} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{R_0^3 \rho_0}{N} \quad (37)$$

となる。ここで M_0 、 R_0 、 ρ_0 はそれぞれ初期の流体の質量、半径、密度を表し、 N は流体を表現する粒子の総数である。次に、式 (36) の右辺の圧力勾配項の計算である。密度は、

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^N m_0 W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{m_0}{\pi \sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{h^3} \exp \left[-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)^2}{h^2} \right] \end{aligned} \quad (38)$$

で与えられる。圧力勾配は、式 (32) を用いて

$$-\frac{1}{\rho} \nabla P = -\left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{P}{\rho} \cdot \frac{1}{\rho} \nabla \rho = -\frac{c_s^2}{\rho} \nabla \rho \quad (39)$$

となる。ここで c_s は

$$c_s^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{P}{\rho} \quad (40)$$

であり、流体内の局所的音速である。初期の音速を c_{s0} とおくと

$$c_s^2 = c_{s0}^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{n}} = c_{s0}^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} \quad (41)$$

で音速は与えられる。式 (39) の $\nabla \rho$ を計算するために密度の定義式を使って、

$$\begin{aligned} \nabla \rho(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^N m_0 \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) \\ &= -\sum_{j=1}^N 2m_0 \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}{h^2} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) \end{aligned} \quad (42)$$

となる。つまり、密度勾配はおのこの粒子の密度分布の勾配の和で表せる。

次に重力の計算である。各粒子の広がりより十分遠方の距離では、Newton の万有引力が成り立ち、

$$\mathbf{G}_i = -\sum_{j=1}^N \frac{Gm_0}{x_{ij}^3} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \quad (43)$$

となる。ただし和は自分自身 ($i = j$) を除く。ここで $x_{ij} = |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|$ である。しかし、粒子と粒子の広がり重なっている場合、式 (43) と異なり、 i 番目の粒子の x_{ij} 内に含まれる質量となって、

$$-\frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{x_{ij}^3} m_0 \int_0^{x_{ij}} W(r, h) 4\pi r^2 dr \quad (44)$$

と書ける。W はガウス関数であるから、式 (44) は規格化した式としては、

$$\mathbf{G}_i = -\frac{3\pi}{32} m_0 \sum_{j=1}^N \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{x_{ij}^3} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_{ij}}{h}\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x_{ij}}{h} \exp\left(-\frac{x_{ij}^2}{h^2}\right) \right] \quad (45)$$

となる。ここで erf は誤差関数であり、

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-y^2) dy \quad (46)$$

で定義される。 x_{ij}/h が十分小さい極限では、式 (45) は式 (43) の規格化した式に一致する。

最後に式 (36) の人工粘性項 \mathbf{Q}_i の計算である。天体現象においては、流体内にしばしば衝撃波を含む。衝撃波は、相対速度差が音速を超える流体の境界面で発生し、SPH では相対速度が音速を超える粒子群のぶつかり合いとして表現される。相対速度が音速を超える場合、圧力勾配項だけでは粒子のすり抜けを止めることができないため、人工粘性項でこの現象を回避する必要がある。人工粘性項は粘性の強さを ε として、

$$\mathbf{Q}_i = \sum_{j=1}^N \varepsilon(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) q_{ij} \quad (47)$$

の形の力の和を加える。ここで q_{ij} は、

$$q_{ij} = \left[\left\{ \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)}{x_{ij}^2} \right\}^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} \right)^2 \right] \exp \left[-\left(\frac{x_{ij}}{h} \right)^2 \right] \quad (48)$$

であり、この粘性を次の条件のもとで加える。

$$q_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{if } (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) > 0 \text{ or } \frac{\dot{\rho}_j}{\rho_j} < 0 \text{ or } q_{ij} < 0 \\ q_{ij}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (49)$$

粘性の条件は、この粘性が衝撃波面のみで働くように制限するためであり、粘性の強さは

$$\varepsilon = 1 \quad (50)$$

として、シミュレーションで用いた。

5.3 ガス雲の運動シミュレーション

ガス雲の運動の働きを示すために、3次元 SPH シミュレーションを行った。初期条件は粒子数 $N = 1000$ 、比熱比 $\gamma = 2$ 、粒子の初速度をゼロとして、粒子を半径 1 の球状に乱数を用いて分布した。シミュレーションで用いた乱数は Mersenne-Twister 法を使用した [10]。

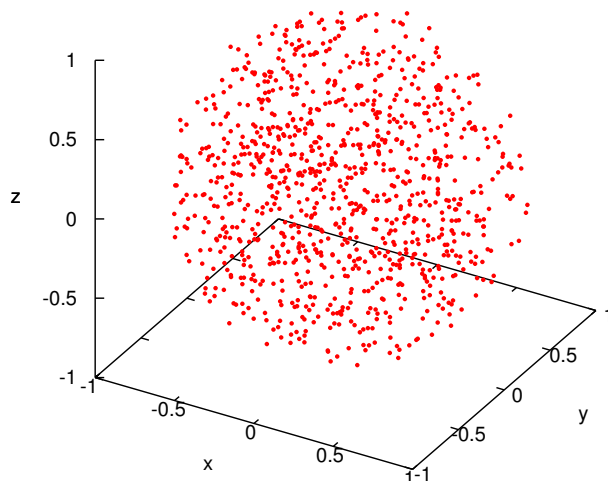


図 8: 流体の初期状態

図 8 は、粒子を球状に分布させた状態を示しており、時間発展させることでガス雲は圧縮をはじめ。実際に、時間発展させたシミュレーション結果を示す。

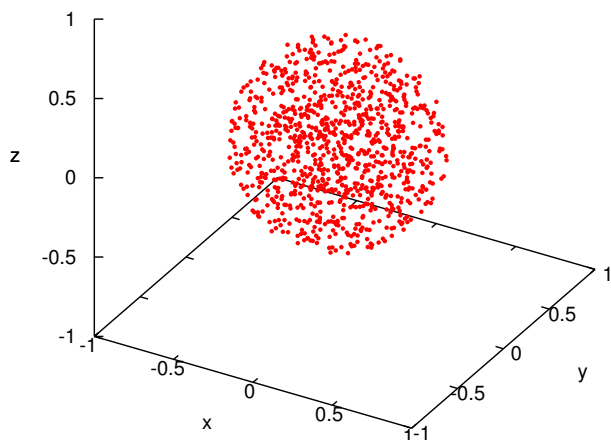


図 9: 圧縮した状態

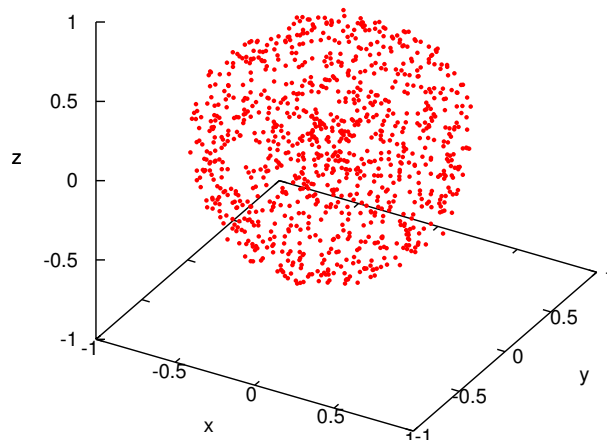


図 10: 膨張した状態

このシミュレーションでは、ガス雲は重力で圧縮をはじめ、次第に圧力勾配が大きくなって圧縮が止まり、図 9 のような状態になる。その後、ガス雲は図 10 の膨張した状態になり、再び圧縮を始める。この結果から、ガス雲は圧縮と膨張を繰り返すことが考えられる。

次に、ガス雲の平均速度の変化を示す。

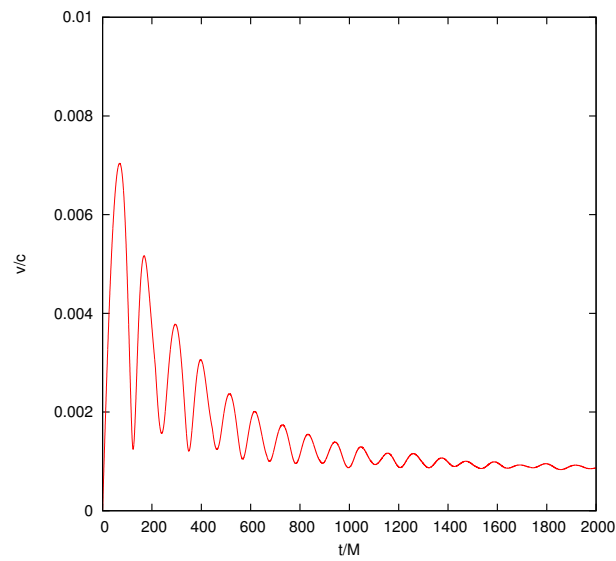


図 11: ガス雲の平均速度

図 11 より、ガス雲の平均速度は減衰振動しており、ガス雲の圧縮と膨張が次第に弱まっていることを示している。減衰振動している原因は、ガス雲の粘性力が働いているからである。その結果、最終的にガス雲に働く力が釣り合い、ガス雲は一定の大きさを保つことが考えられる。

6 ブラックホール周辺を運動するガス雲のシミュレーション

相対論を模倣する Pseudo-Newtonian ポテンシャルを用いて、ブラックホール周辺を運動するガス雲のシミュレーションを行った。ブラックホールの質量 $M = 0.5$ 、シュバルツシルト半径 $r_g = 1$ として、ガス雲とブラックホールの質量比をおよそ 1:120 とした。また、粒子数 $N = 1000$ 、初期のガス雲の半径 $R_0 = 1$ 、比熱比 $\gamma = 2$ とした。ここで、シミュレーションで扱うカーパラメータ a の範囲は $0 \leq a \leq M$ とする。ガス雲は、事象の地平面でブラックホールに落下したかを判定する。

6.1 Newton 重力とシュバルツシルト時空の比較

Newton 重力とシュバルツシルト時空を比較し、ガス雲がどのように運動するかをシミュレーションした。初期条件はガス雲の中心を位置 $(x, y, z) = (-4, 4, 4)$ とし、初速度に x 成分の速度 $v_x = 0.25$ を与えた。

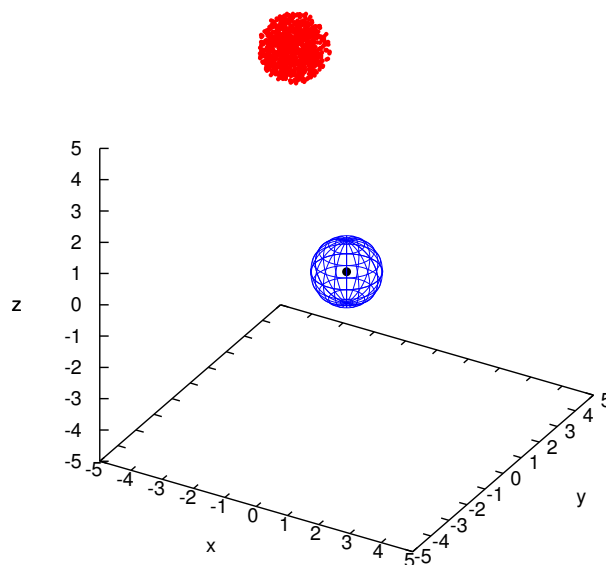


図 12: ブラックホール周辺を運動するガス雲の初期状態

図 12 は、ガス雲の初期状態を示しており、時間発展させることでガス雲はブラックホールに接近する。ここで、青の球状の部分は事象の地平面を表しており、式 (5) より、ブラックホールの回転パラメータの影響によって、事象の地平面の大きさは変化する。はじめに、Newton 重力のシミュレーション結果を示す。

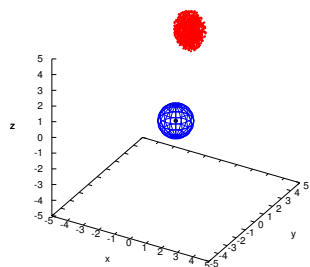


図 13: $t/M = 20$

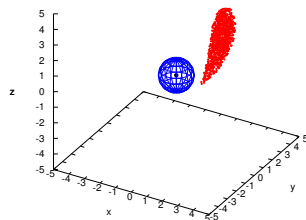


図 14: $t/M = 40$

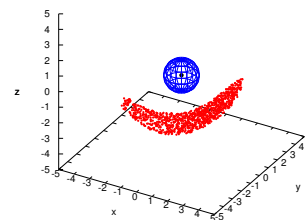


図 15: $t/M = 60$

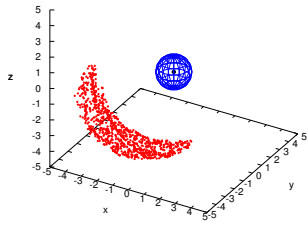


図 16: $t/M = 80$

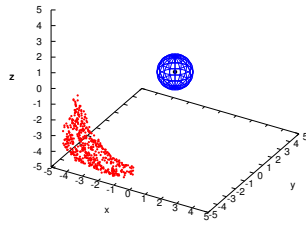


図 17: $t/M = 100$

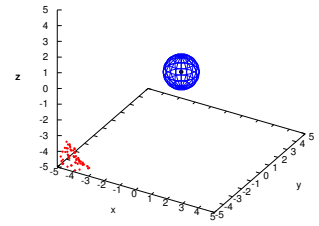


図 18: $t/M = 120$

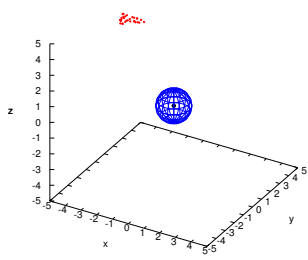


図 19: $t/M = 140$

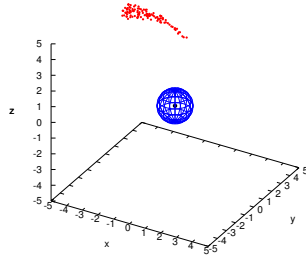


図 20: $t/M = 160$

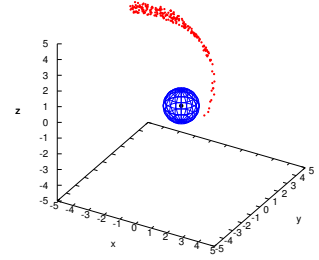


図 21: $t/M = 180$

Newton 重力の場合、ガス雲は引き伸ばされながらブラックホールに接近し、ブラックホールから遠ざかっていく。その後、細長く引き伸ばされたガス雲が再びブラックホールに接近する。次に、シュバルツシルト時空のシミュレーション結果を示す。

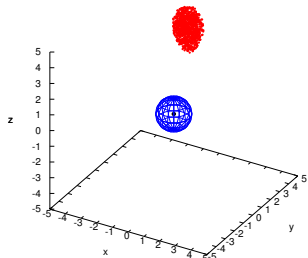


図 22: $t/M = 20$

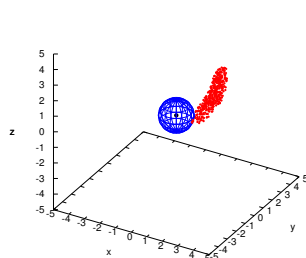


図 23: $t/M = 40$

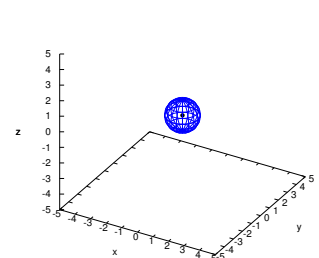


図 24: $t/M = 60$

シュバルツシルト時空では、ガス雲は全てブラックホールに吸い込まれる。この結果から、シュバルツシルト時空は Newton 重力よりブラックホールの重力場が強いため、ガス雲は強い重力場から逃れなくなり、ブラックホールに吸い込まれることが分かった。

6.2 カー時空によるガス雲の運動

カー時空によるガス雲の運動のシミュレーションを行い、ブラックホールが回転することで、ガス雲がどのような振る舞いをするかを検証した。

初期条件は、ガス雲の中心を位置 $(x, y, z) = (-4, 4, 4)$ として、初速度に x 成分の速度 $v_x = 0.25$ を与えた。実際に、最大回転するカー時空 ($a = M$) の場合のシミュレーション結果を示す。

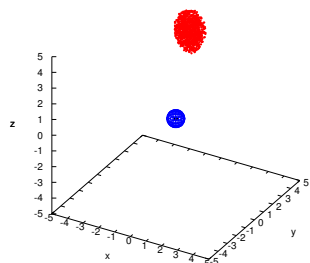


図 25: $t/M=20$

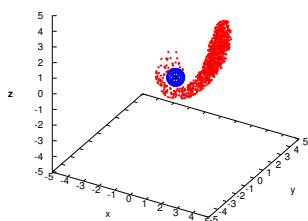


図 26: $t/M=40$

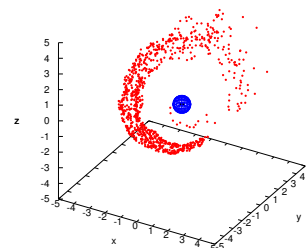


図 27: $t/M=60$

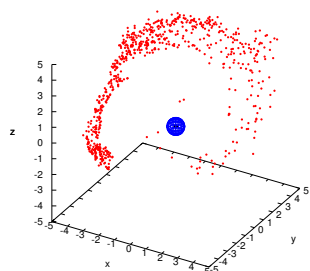


図 28: $t/M=80$

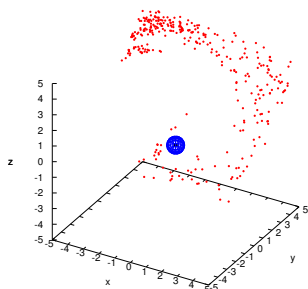


図 29: $t/M=100$

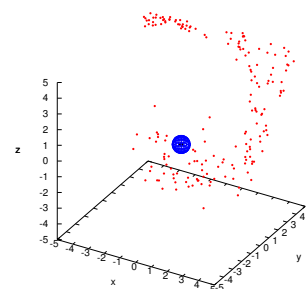


図 30: $t/M=120$

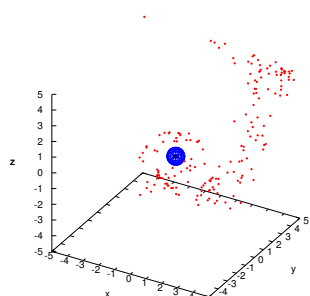


図 31: $t/M=140$

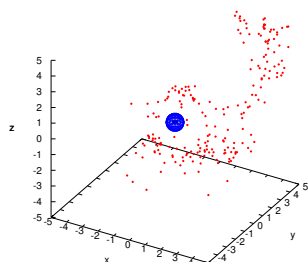


図 32: $t/M=160$

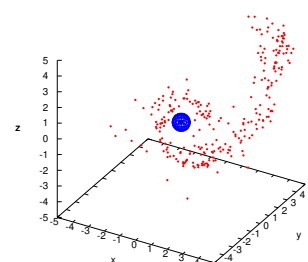


図 33: $t/M=180$

最大回転するカー時空 ($a = M$) では、引き伸ばされたガス雲がブラックホールに接近後、ブラックホールの回転の影響によって、ガス雲の一部がばらばらに引き離される。その後、ガス雲はブラックホール周辺を運動しながら、ブラックホール近傍にガス雲が集まり、降着円盤を形成していく。

次に、ブラックホール周辺を運動するガス雲のブラックホールからの平均距離と、ガス雲の粒子数の推移を Newton 重力、シュバルツシルト時空 ($a = 0$)、カー時空 ($a = 0.5M$)、最大回転するカー時空 ($a = M$) の4つのモデルを比較した結果を示す。赤の実線は Newton 重力、緑の実線がシュバルツシルト時空 ($a = 0$)、青の実線がカー時空 ($a = 0.5M$)、紫の実線が最大回転するカー時空 ($a = M$) である。

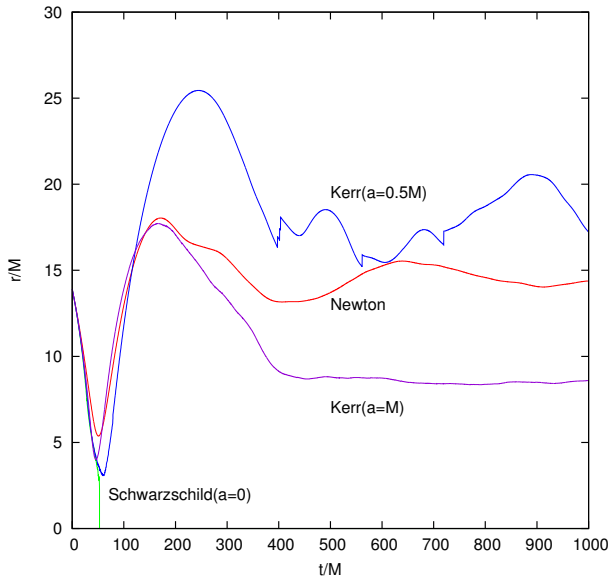


図 34: 平均距離

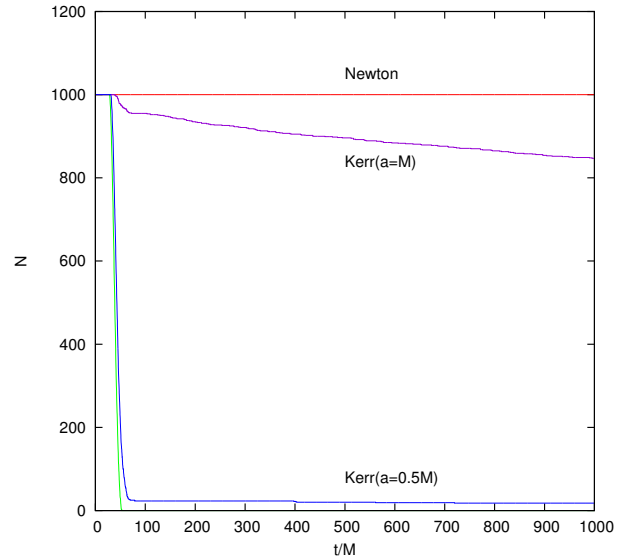


図 35: ガス雲の粒子数の推移

図 34 より、シュバルツシルト時空では、すべての粒子がブラックホールに吸い込まれ、Newton 重力と最大回転するカー時空 ($a=M$) では、最終的に平均距離は大きく変動しなくなる。また図 35 より、 $t/M = 1000$ のカー時空 ($a = 0.5M$) は、ほとんどの粒子がブラックホールに吸い込まれ、最大回転するカー時空 ($a = M$) では、ガス雲の粒子数は 8 割ほど残っている。Newton 重力では、ガス雲の粒子は全く減少していないことが分かり、ブラックホールの重力場を再現できていないことが分かる。ここで、 $t/M = 1000$ の場合の Newton 重力とカー時空 ($a = M$) のガス雲の分布を示し、平均距離が一定の値に近づいていくガス雲の状態を調べた。

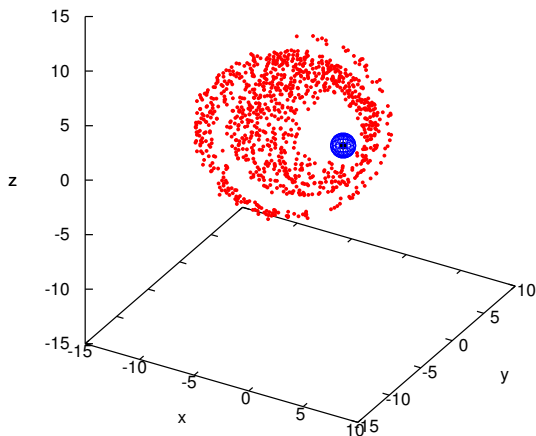


図 36: Newton 重力 ($t/M = 1000$)

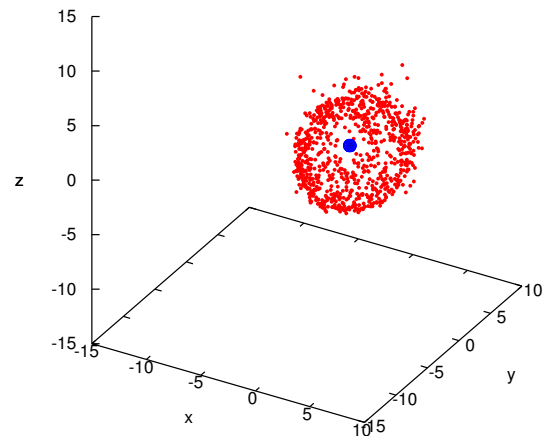


図 37: $a = M$ のカー時空 ($t/M = 1000$)

図 36 と図 37 より、平均距離が一定の値に安定すると、ブラックホール周辺に降着円盤が形成されることが分かった。また、Newton 重力では相対論のカー時空 ($a = M$) と比べて、ブラックホールの事象の地平面近くでガス雲の密度が低い降着円盤を形成することになった。この結果から、Newton 重力では、相対論より重力場が弱いので、ブラックホールの振る舞いをうまく表現することができないことが分かった。

6.3 ガス雲に与える回転パラメータの影響

ガス雲の初速度を $v_x = 0.25, 0.3, 0.35, 0.4$ の場合における回転パラメータの影響を調べた。ガス雲の中心の初期座標は位置 $(x, y, z) = (-4, 4, 4)$ とした。ここで、カーパラメータは $a = 0$ (シュバルツシルト時空)、 $a = 0.25M$ 、 $a = 0.5M$ 、 $a = 0.75M$ 、 $a = M$ (最大回転) の4つの場合を考えた。図に示される緑、茶、青、黄、紫の実線は、それぞれ $a = 0$ (シュバルツシルト時空)、 $a = 0.25M$ 、 $a = 0.5M$ 、 $a = 0.75M$ 、 $a = M$ (最大回転) を示している。はじめに、ガス雲の初速度 $v_x = 0.25$ のシミュレーション結果を示す。

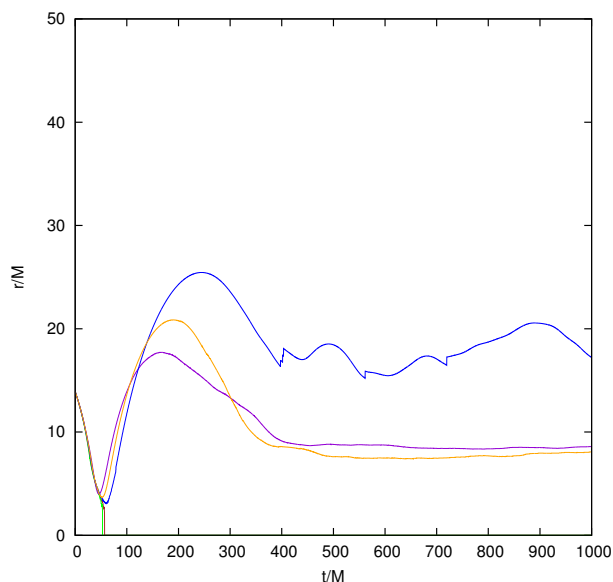


図 38: 平均距離 ($v_x = 0.25$)

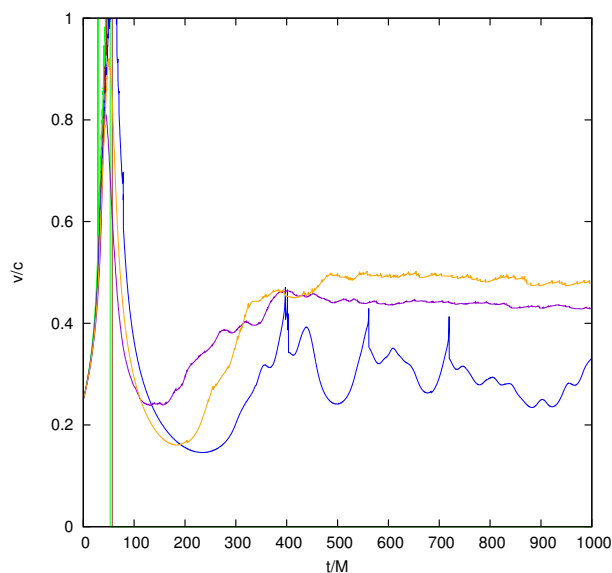


図 39: 平均速度 ($v_x = 0.25$)

図 38 より、シュバルツシルト時空とカー時空 ($a = 0.25M$) では、ガス雲はすべてブラックホールに吸い込まれる。また $a = 0.75M$ と $a = M$ では、最終的に平均距離が一定に保たれ、降着円盤が形成することが分かる。図 39 から、 $a = 0.75M$ と $a = M$ では最終的に平均速度が一定になり、 $a = 0.75M$ の場合が最も平均速度が大きいことが分かる。最大回転 ($a = M$) より $a = 0.75M$ の方が平均速度が大きい理由として、ガス雲の分布の仕方平均速度が変化することが考えられる。また $a = 0.5M$ の場合では、平均速度の変化が激しいが、この原因は、ブラックホールに吸い込まれていない粒子の数が極端に少ないことが考えられる。

この結果では、ガス雲の平均距離と平均速度からカー時空の回転パラメータを区別することはできない。そこで、降着円盤が形成されたと考えられるカー時空 $a = 0.75M$ と $a = M$ のガス雲の分布を示し、回転パラメータを区別することにした。

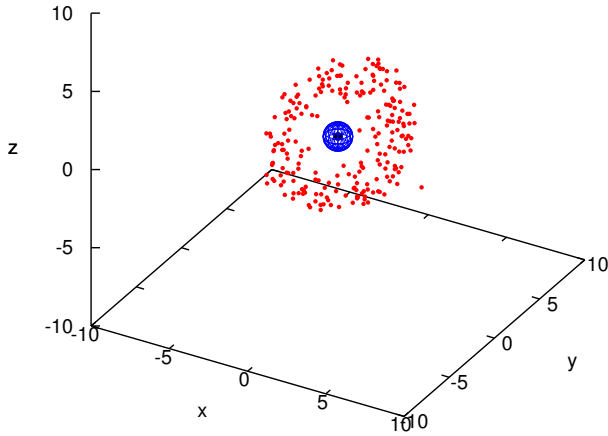


図 40: $a = 0.75M (t/M = 1000)$

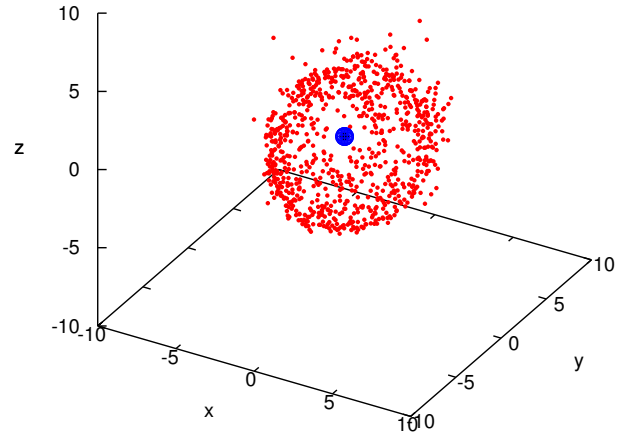


図 41: $a = M (t/M = 1000)$

この結果から、 $a = 0.75M$ の場合に比べて最大回転するカー時空 ($a = M$) におけるガス雲の密度分布が高く、粒子は8割ほど残ることになった。つまり、ガス雲が形成する降着円盤の密度分布から、回転パラメータを区別できることが分かった。次に、ガス雲の初速度 $v_x = 0.3$ のシミュレーション結果を示す。

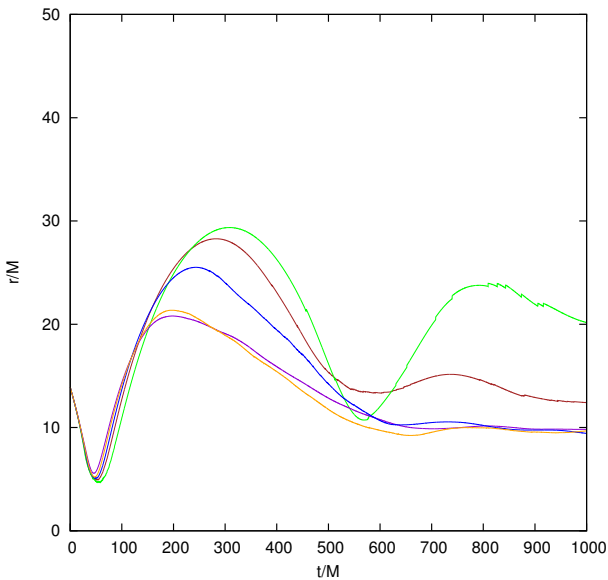


図 42: 平均距離 ($v_x = 0.3$)

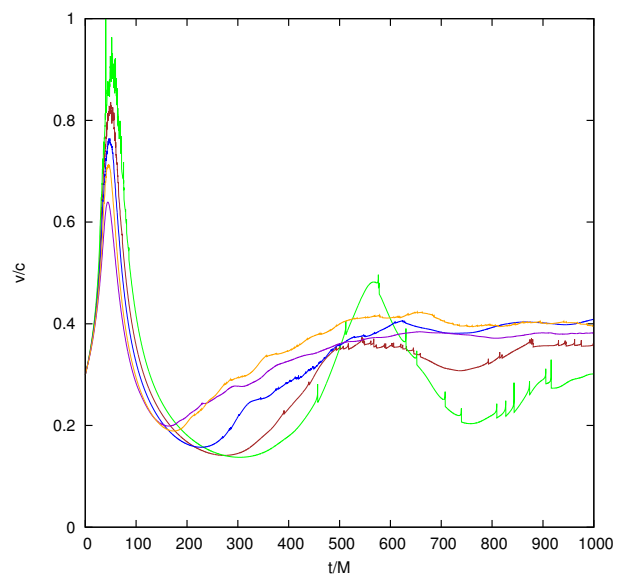


図 43: 平均速度 ($v_x = 0.3$)

図 42 より、シュバルツシルト時空では、平均距離が一定に保たれていないことから、降着円盤が形成されていないことが分かる。カー時空では、徐々に平均距離が一定になっていくことが分かる。つまり、シュバルツシルト時空は降着円盤を形成する時間が長く、カー時空ではシュバルツシルト時空よりも早く降着円盤が形成される。

図 43 では、カー時空の場合、ガス雲がブラックホール通過後、速度が徐々に上昇し、一定の値に近づいていくことが分かる。

次に、ガス雲の初速度 $v_x = 0.35$ のシミュレーション結果を示す。

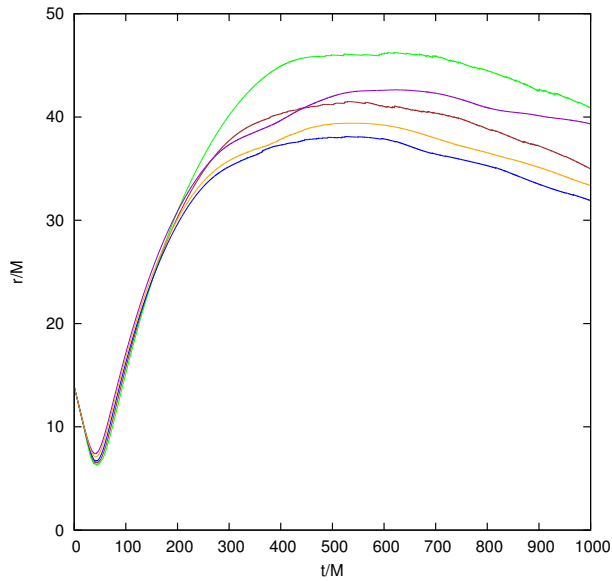


図 44: 平均距離 ($v_x = 0.35$)

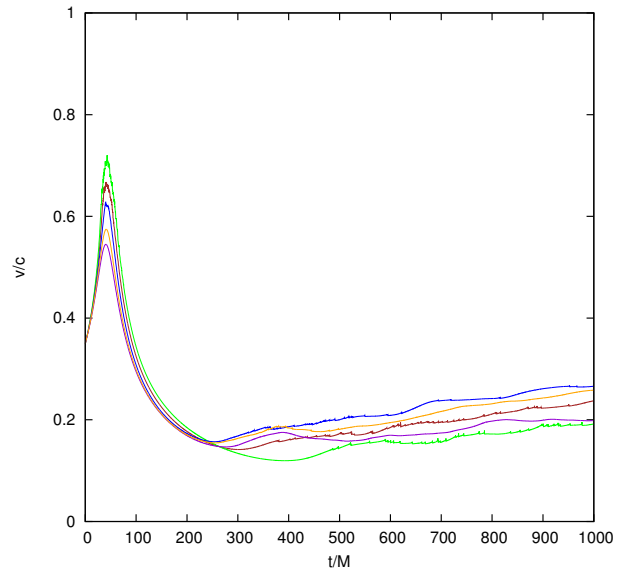


図 45: 平均速度 ($v_x = 0.35$)

図 44 より、ガス雲はブラックホールに接近後、ブラックホールから離れていくが、ブラックホールの重力場の影響で、再びブラックホールに近づいていくことが分かる。また図 45 では、ガス雲はブラックホール接近後、速度が急激に下がる。その後、ガス雲の平均速度は徐々に上昇する。最後に、ガス雲の初速度 $v_x = 0.4$ のシミュレーション結果を示す。

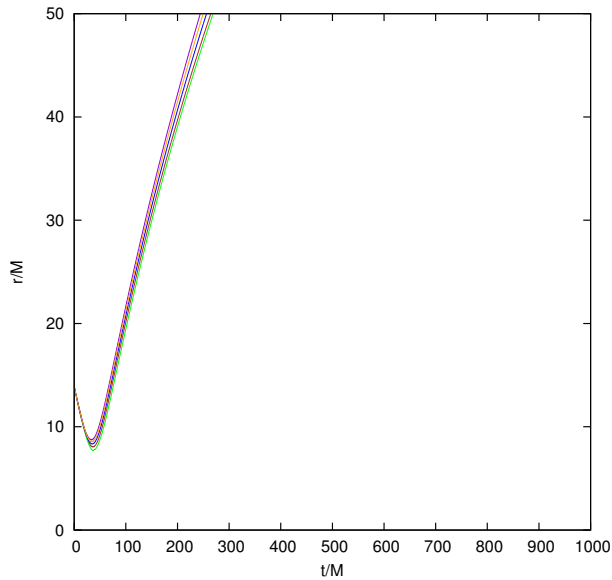


図 46: 平均距離 ($v_x = 0.4$)

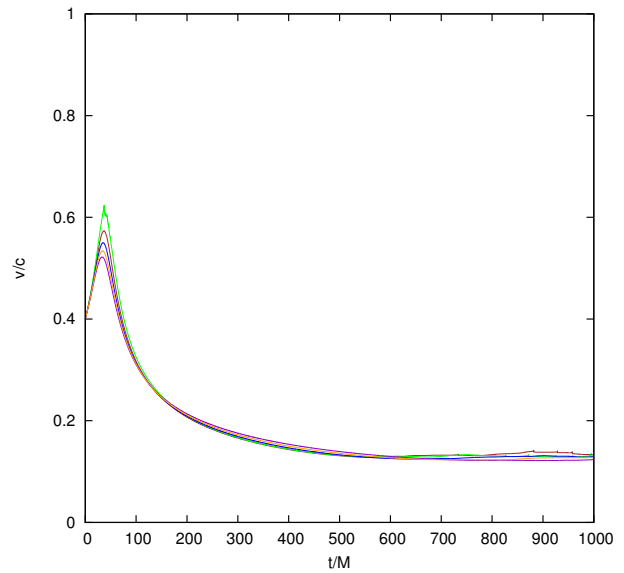


図 47: 平均速度 ($v_x = 0.4$)

図 46 より、ガス雲の速度がブラックホールの重力場より強いため、ガス雲はブラックホールから離れていくことになる。また図 47 から、ガス雲の速度はブラックホール接近後、徐々に速度が降下していき、最終的に、速度は一定になっていることが分かる。 $t/M = 1000$ 以降のシミュレーションは行っていないが、ブラックホールの重力場の影響でガス雲の速度が上昇し、ガス雲は再びブラックホールに接近することが予想できる。この結果から、 x 成分の初速度が $v_x \geq 0.4$ のとき、ガス雲はブラックホールから遠ざかっていくことが分かる。

6.4 空間自由度 2次元と3次元の比較

2次元と3次元の空間自由度によるブラックホール周辺を運動するガス雲の運動をシミュレーションした。ガス雲の中心の初期座標は位置 $(x, y, z) = (-4, 4, 4)$ とした。ガス雲の運動を2次元と3次元を比較するために、下図のように xy 面でガス雲の運動を可視化することにした。

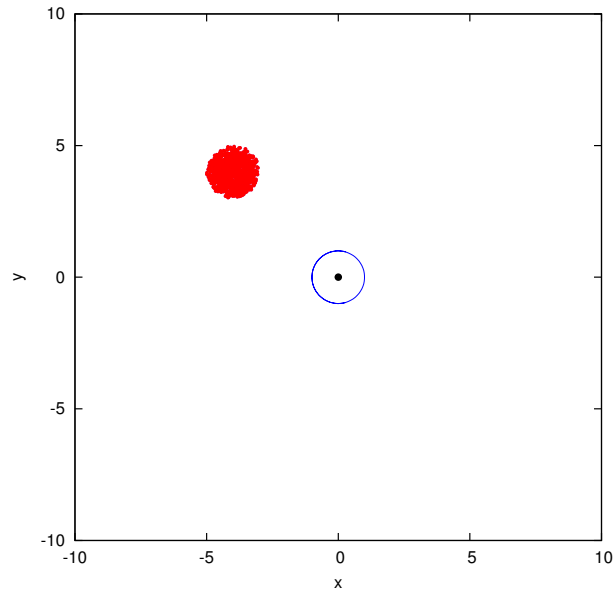


図 48: 2次元と3次元を比較した初期状態

ここで、青の実線は事象の地平面、赤の点は3次元におけるガス雲、紫の点は2次元におけるガス雲を表している。ただし、初期状態では3次元の下に2次元が重なっている。

はじめに、Newton 重力におけるシミュレーション結果を示す。

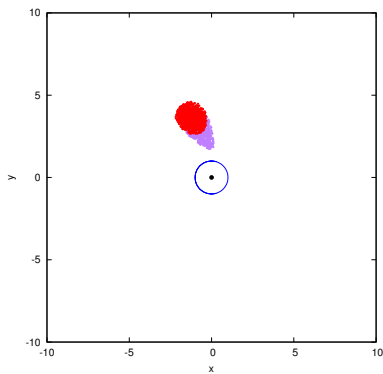


図 49: $t/M=20$

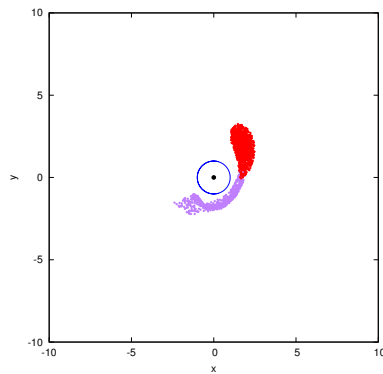


図 50: $t/M=40$

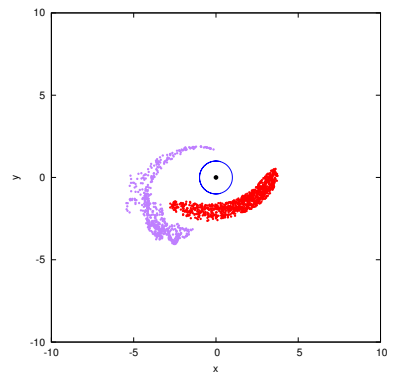


図 51: $t/M=60$

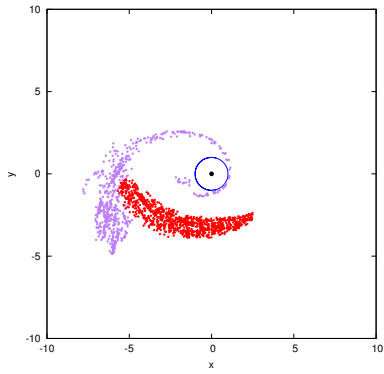


図 52: $t/M=80$

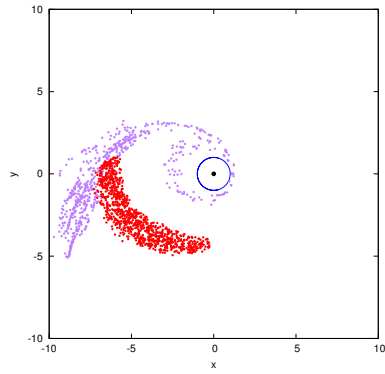


図 53: $t/M=100$

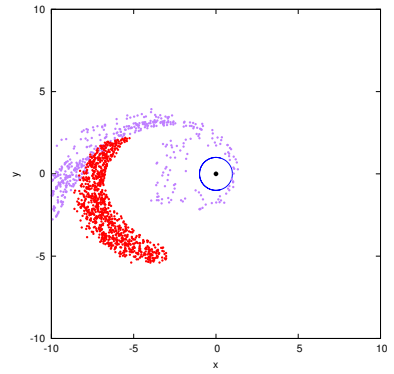


図 54: $t/M=120$

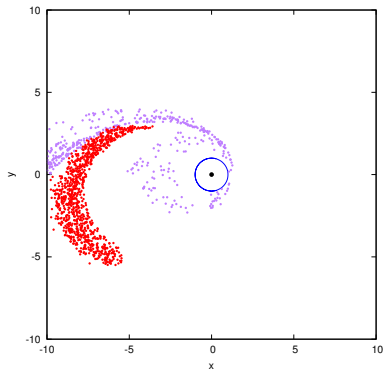


図 55: $t/M=140$

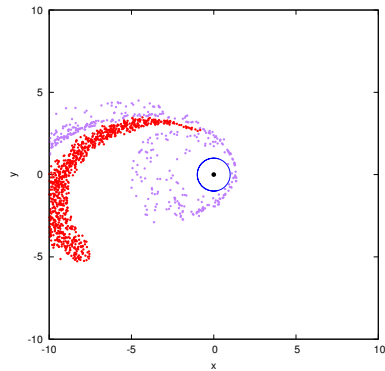


図 56: $t/M=160$

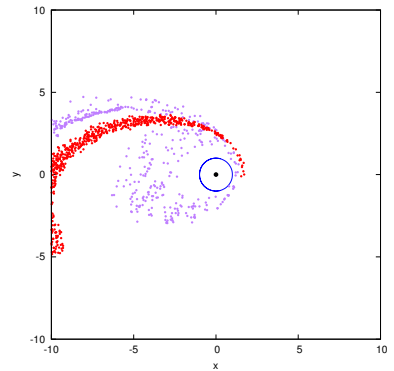


図 57: $t/M=180$

この結果では、2次元の場合のほうが3次元より早く、ブラックホール周辺をリング状に運動することが分かった。次に、シュバルツシルト時空のシミュレーション結果を示す。

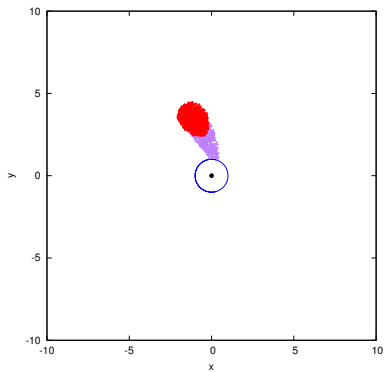


図 58: $t/M=20$

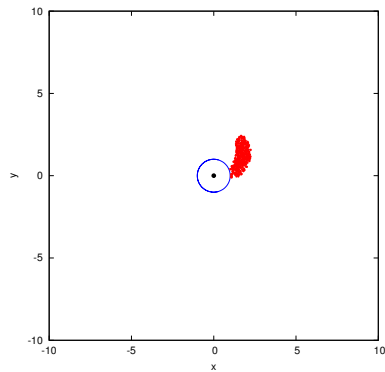


図 59: $t/M=40$

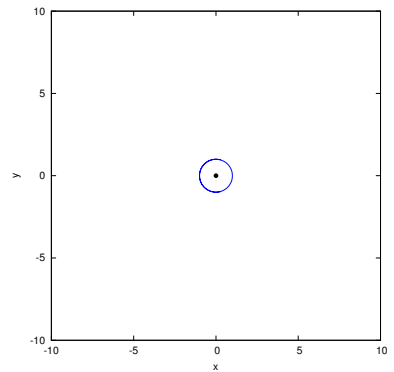


図 60: $t/M=60$

シュバルツシルト時空の場合、2次元では3次元より早くブラックホールにすべての粒子が吸い込まれた。

次に、最大回転するカー時空 ($a = M$) のシミュレーション結果を示す。

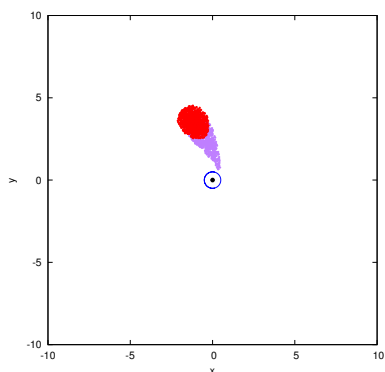


図 61: $t/M=20$

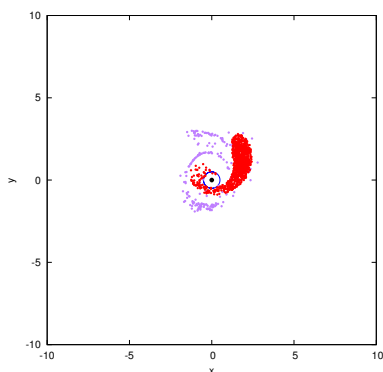


図 62: $t/M=40$

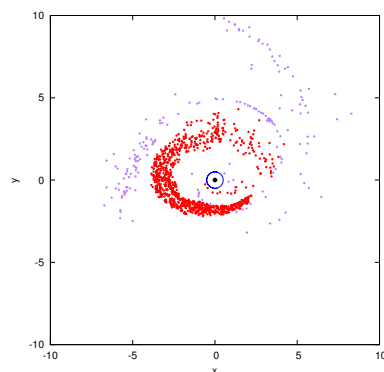


図 63: $t/M=60$

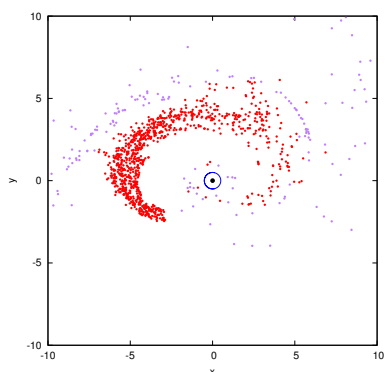


図 64: $t/M=80$

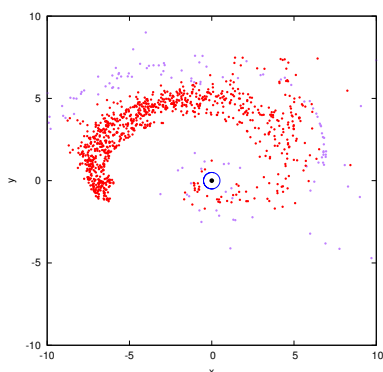


図 65: $t/M=100$

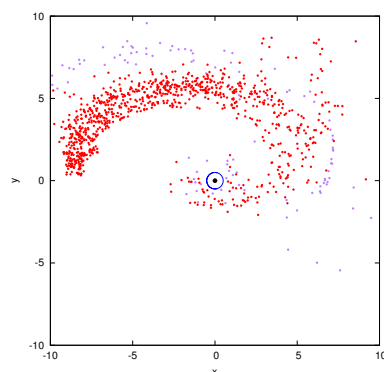


図 66: $t/M=120$

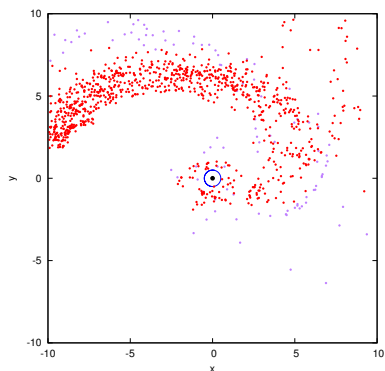


図 67: $t/M=140$

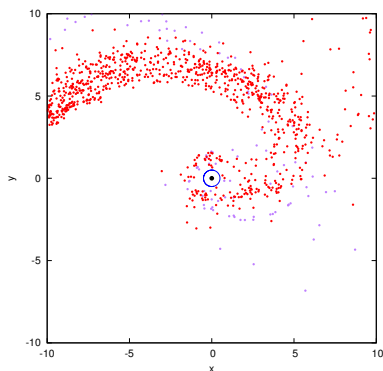


図 68: $t/M=160$

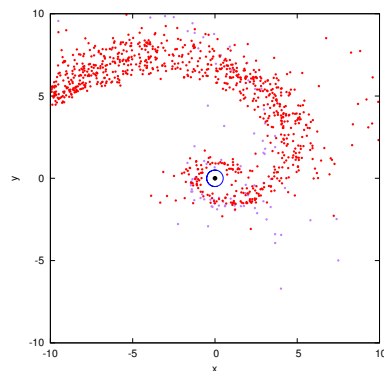


図 69: $t/M=180$

2次元の場合、早い段階でブラックホール周辺にガス雲が集まるが、その後大きく離れることになる。3次元の場合、ブラックホールに接近したガス雲は離れていくが、再びブラックホールに接近し、ブラックホール周辺を運動することになる。

以上のシミュレーション結果では、2次元と3次元では、空間自由度の違いで距離と力が全く異なり、シミュレーション結果は大きく違う結果を示した。

6.5 ガス雲の円運動による降着円盤形成過程

ブラックホール周辺を運動するガス雲が、降着円盤を形成する過程をシミュレーションで実現した。そこでブラックホールの中心を通る z 軸に対して、 xy 平面上に回転する円運動を与えることにした。

初期条件は、下図のようにガス雲の中心を位置 $(x, y, z) = (3, 0, 0)$ とし、円運動の初速度を与えた。

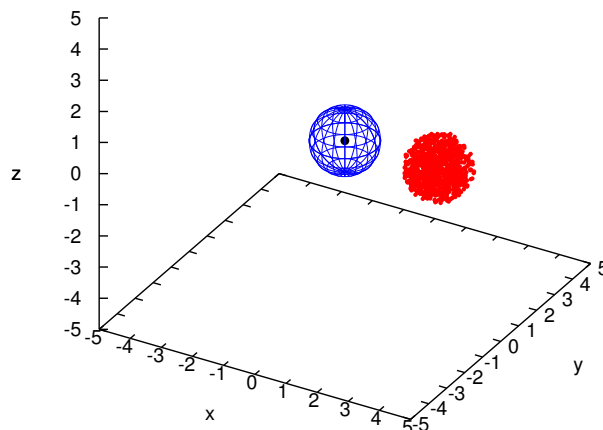


図 70: 円運動による降着円盤形成シミュレーションの初期状態

はじめに Newton 重力のシミュレーション結果を示す。

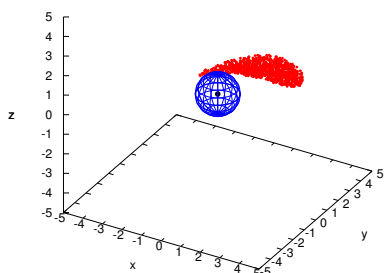


図 71: $t/M=20$

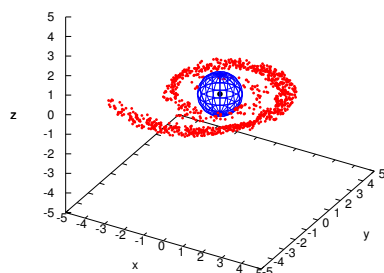


図 72: $t/M=100$

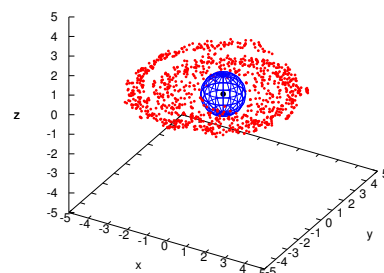


図 73: $t/M=200$

このシミュレーション結果より、Newton 重力では、ガス雲が円運動しながらブラックホールに接近し、降着円盤を形成することが分かる。次に、シュバルツシルト時空のシミュレーション結果を示す。

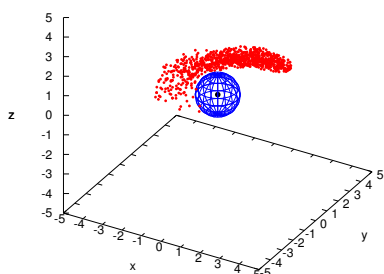


図 74: $t/M=20$

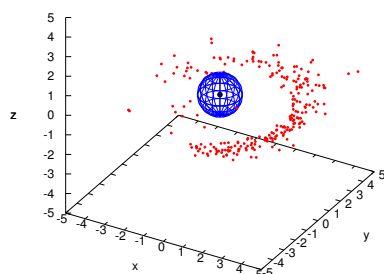


図 75: $t/M=100$

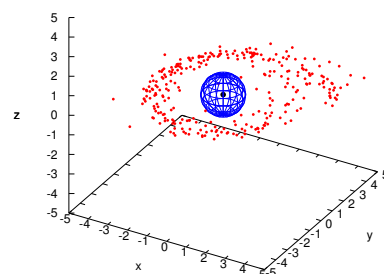


図 76: $t/M=200$

シュバルツシルト時空では、ガス雲から一部の粒子がばらばらになり、Newton 重力より密度が少ない降着円盤を形成する。一部の粒子がばらばらになってしまった原因は、初期状態のガス雲の中心が、シュバルツシルト時空の最小安定円軌道上であり、ガス雲の一部が最小安定円軌道の内側を運動したことが考えられる。次に、最大回転するカー時空 ($a = M$) のシミュレーション結果を示す。

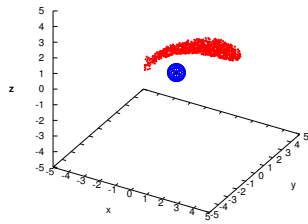


図 77: $t/M=20$

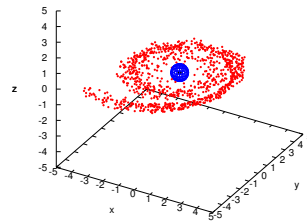


図 78: $t/M=100$

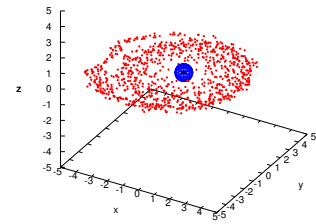


図 79: $t/M=200$

最大回転するカー時空 ($a = M$) では、Newton 重力と同様な結果が得られたが、実際にはカー時空 ($a = M$) の事象の地平面付近では、ガス雲が高速回転している。次に、ガス雲の平均速度の変化を示す。赤の実線は Newton 重力、緑の実線はシュバルツシルト時空 ($a = 0$)、青の実線はカー時空 ($a = 0.5$)、紫の実線は最大回転するカー時空 ($a = M$) を示している。

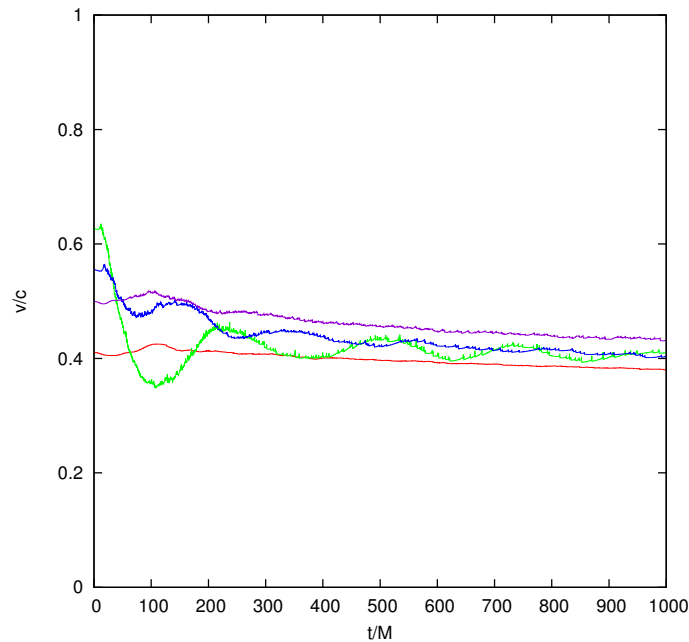


図 80: ガス雲の平均速度

図 80 より、Newton 重力と最大回転するカー時空 ($a = M$) では、ガス雲の平均速度が減少していく。また、最大回転するカー時空では、Newton 重力よりも平均速度が大きいことが分かる。最大回転するカー時空の平均速度が大きい原因は、最大回転するカー時空では事象の地平面近くの粒子が高速回転しているためである。

$a = 0.5M$ のカー時空とシュバルツシルト時空では、振動しながら減少していく。振動する原因は、最小安定円軌道より内側に運動することによって、円運動を維持できないことが考えられる。シュバルツシルト時空の場合、ガス雲の中心は初期状態のときに、シュバルツシルト時空の最小安定円軌道上にあり、最初の段階で円運動ができていないことが分かる。

次に、ガス雲の平均角運動量の変化を示す。

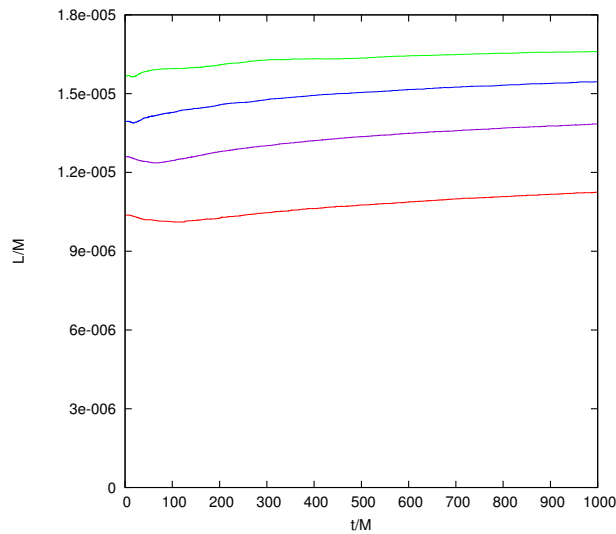


図 81: ガス雲の平均角運動量

ガス雲の平均角運動量は、時間発展することで徐々に大きくなる。この結果から、角運動量が完全には保存されていないが、角運動量の値はおよそ一定であることが分かる。次に、ガス雲とブラックホールの平均距離を示す。

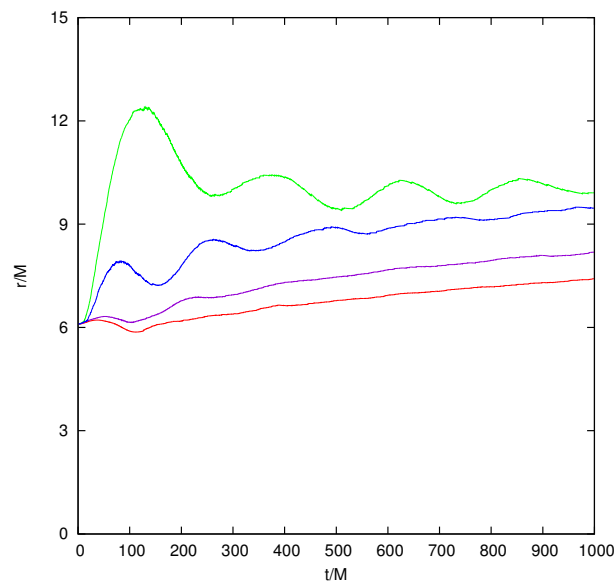


図 82: 平均距離

Newton 重力とカー時空 ($a = M$) では、時間発展することで徐々に大きくなる。シュバルツシルト時空とカー時空 ($a = 0.5M$) では、はじめは振動しているが、徐々に振動が収まっていく。振動する原因は、最小安定円軌道の内側を運動することによって、円運動を維持できず、その結果、ブラックホールから大きく離れていく粒子が存在することが予想できる。Newton 重力では、ブラックホールからの距離に関係なく円軌道を維持することができ、カー時空 ($a = M$) では、最小安定円軌道が事象の地平面近くになっていることによって、平均距離は振動することがない。また、ガス雲の平均距離は回転パラメータの値によって、平均距離が変わっていくことが分かる。

7 まとめ

Newton 重力と相対論を比較したシミュレーションでは、Newton 重力より相対論の方が重力場が強く、Newton 重力では、強い重力場をもつブラックホールの振る舞いをうまく表現することができなかった。また、ブラックホールの回転パラメータの影響を受けたガス雲の運動では、ブラックホール周辺に形成される降着円盤の存在や、その密度分布から、回転パラメータを区別できることが分かった。これは、ブラックホールの回転パラメータを観測的に判別できることを示唆している。

しかし、相対論計算で用いた Pseudo-Newtonian ポテンシャルでは、ブラックホールの回転軸・方向を検証することはできず、ブラックホールの回転の向きによってガス雲の運動が、どのように変化するかを検証することができなかった。今後の発展として、Pseudo-Newtonian ポテンシャルを用いない相対論化したプログラムを数値シミュレーションすることで、ブラックホールの回転の向きによるガス雲の運動を検証することが可能になる。

参考文献

- [1] M. Schartmann, et al. *Astrophys. J.* 755(2012)155
- [2] Takayuki R. Saitoh, et al.
“Flaring up of the Compact Cloud G2 during the Close Encounter with Sgr A*”, *PASJ.*2013
- [3] “W.M.KECK OBSERVATORY”,
(http://www.keckobservatory.org/recent/entry/mysterious_g2_cloud_near_black_hole_identified)
- [4] “星を見る・宇宙を知る・天文を楽しむ AstroArts”,
(<http://www.astroarts.co.jp/news/2014/11/25g2/index-j.shtml>)
- [5] 佐藤 勝彦, “相対性理論 岩波基礎物理シリーズ 9”, 朝倉書店, 1996
- [6] 福江 純, “らくらく相対論入門 その 1 : 擬ニュートンポテンシャルの特徴”, 日本天文学会, 2005
- [7] B. Paczynski and P. J. Wiita, et al. *Astron. A.* 88(1980)23
- [8] B. Mukhopadhyay, *Astrophys. J.* 581(2002)427
- [9] 矢部 孝, 観山 正見, 椛島 成治, “パソコンによるシミュレーション物理”, 朝倉書店, 1992
- [10] “Mersenne Twister Home Page”, (<http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/m-mat/MT/mt.html>)