

数値相対論における定式化問題

— 一般相対論における数値シミュレーションを安定化させる指針の探求 —

真貝寿明
米田元

理化学研究所 計算宇宙物理研究室
早稲田大学 数理科学科

Formulation Problem in Numerical Relativity

Hisa-aki Shinkai

RIKEN Institute

Gen Yoneda

Waseda University

(日本応用数理学会論文誌サーベイ論文原稿 2003年10月1日)

Abstract. We review recent efforts to re-formulate the Einstein equations for fully relativistic numerical simulations in general relativity. The so-called “numerical relativity” is a promising research field matching with ongoing astrophysical observations such as gravitational wave astronomy. Many trials for longterm stable and accurate simulations of binary compact objects have revealed that mathematically equivalent sets of evolution equations show different numerical stability in free evolution schemes. After reviewing the efforts of the community in the decade, we introduce our idea for understanding all the efforts in a unified way using eigenvalue analysis of the constraint propagation equations. The modifications of (or adjustments to) the evolution equations change the character of constraint propagation, and several particular adjustments using constraints are expected to diminish the constraint-violating modes. We propose several new adjusted evolution equations, and present some numerical demonstrations.

概要： 一般相対性理論は、重力の正体が時空の歪みであることを説く、時空の物理法則である。基本方程式は非線形な Einstein 方程式で、10本の2階の偏微分方程式（楕円型と双曲型）から構成される。現在、一般相対論が予言する「重力波」を直接地球上で捉える観測プロジェクトが世界各地で進行しており、それに対応して重力波波形を数値シミュレーションであらかじめ求めることが急務とされている。通常の数値計算では、拘束条件式を初期に解き、時間発展の際には拘束条件をモニターして、計算精度を判定している。最近、Einstein 方程式の定式化の違いで、数学的には等価であっても、数値的な安定性が変わることが確かな事実として認識されてきた。本稿では、より安定性の高いシミュレーションを求めて、最近10年間に渡るこの分野の進展を振り返ると共に、著者が提案する「拘束条件式の時間発展解析を用いた補正定式化」を紹介する。基本的なアイデアは拘束条件を持つ他の時間発展問題にも転用可能と考えられる。

1 Overview

1.1 「数値相対論」

一般相対性理論（以下、一般相対論と呼ぶ）は、強い重力場を記述する物理法則である。適用対象は、重くて小さな天体や宇宙全体である。基礎方程式である Einstein 方程式は物理の基本法則としては珍しく非線形であり、これまで Einstein 自身の想像をも超えた「ブラックホール」や「膨張宇宙」を描き出し、いずれも観測的に支持されている。しかし、Einstein 方程式の解析解を、時空に対称性を課さず、あるいは動的な現象について得ることは、ほとんど絶望的である。

近年の一般相対論研究の中心の一つは、ブラックホールや中性子星連星の合体に伴って発生する重力波（時空の歪みが光速で伝播する現象）である。重力波の存在自体は、Einsteinによって予言されたものだが、これまで直接確認されたことはない。（電波観測によって、連星となっている中性子星パルサーの軌道周期の変化から、重力波が系よりエネルギーを取り去っていることが示されているので、重力波の存在は間接的には確認されている。）現在日本をはじめ世界各地で、重力波を地上で直接観測するレーザー干渉計が本格的に運用され始めており、運が良ければ数年以内に重力波の初観測の報が飛び交うであろう。連星合体の前後で放出される重力波の波形情報から、星の軌道パラメータや原子核の状態方程式、あるいはブラックホール存在の直接証拠が得られると期待されている。

重力波研究に対する理論研究の課題は、予測される波形をでき得る限り正確に計算することである。重力波波源の最有力候補とされる、中性子星連星やブラックホール連星の合体における最終段階では、非線形な重力場を記述する Einstein 方程式を直接数値的に解くことが必要であり、そのために、「数値相対論」と呼ばれる研究分野に現在大きな期待が寄せられている。数値相対論研究は、日本を含め世界の数拠点で精力的に進められているが、現在でも、その基本的手法が確立していない発展途上の分野である。計算の途中で物理量が破綻し、シミュレーションが続けられなくなってしまうのが最大の問題である（図1）。数年前までは、安定した時間発展が実現できないのは計算機能力が不足しているからだと考えられてきたが、最近になって、これまで「標準」として使われていた Einstein 方程式の表現方法（Arnowitt-Deser-Misner(ADM)形式 [13]）が、実は数値計算に必ずしも適していないことが次第に明らかになってきた。

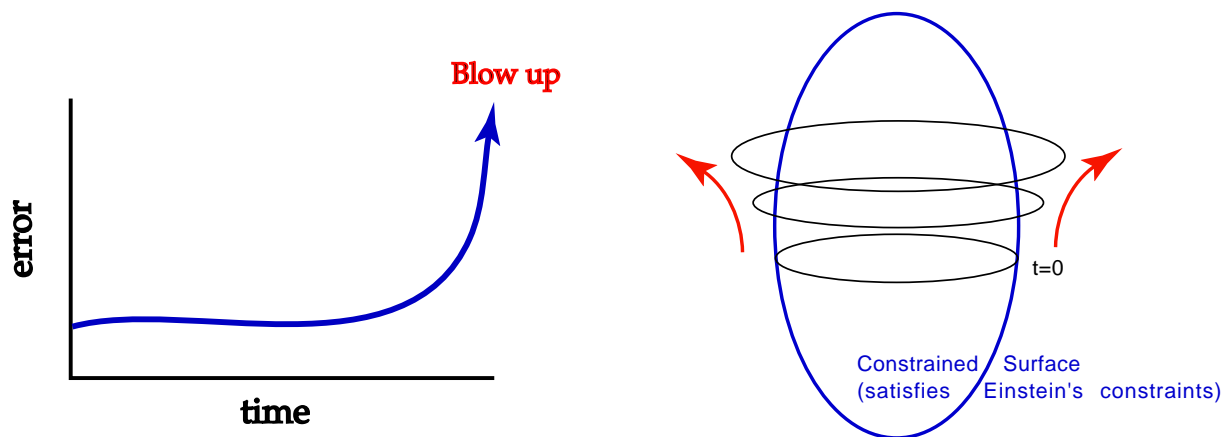


図 1: 数値相対論の問題：数値解が拘束面より離れていってしまう。

本稿では、この 10 年間、数値相対論業界が模索してきた状況を振り返り、併せて著者のアイデアを紹介しながら、現状の問題点をまとめたい。著者の一人、真貝は、先にシドニーで開かれた応用数学国際会議 (ICIAM5) で、表記の講演をミニシンポジウムで依頼され、そこで初めて応用数学者達が同様な問題で悩んでいることを知った。「数値相対論」の分野は、歴史的に独自の発展をしており、時として数値流体の研究者からは「ガラパゴス諸島に棲んでいるのではないか」とまで揶揄される。遠い昔に捨て去られた数値テクニックがいまだ主流であったりするからだ。本稿の内容がそうでないことを願うが、何より応用数理学会会員に問題の現状を理解していただき、ご指導を仰ぎたいと思い、本稿を執筆した次第である。

「数値相対論」の現状の課題は、**Box 1.1** にまとめたように多岐に渡る。本稿ではそのうちのごく一部、「Einstein 方程式を 3+1 次元に分解し自由発展させた場合、拘束条件が破れていってしまうのは何故か」という問題を扱うに過ぎない（もっとも標準的なアプローチに内在する大問題なのではあるが）。より一般的な解説については、巻末の文献を参照していただきたい。

0. どのように時空を分割して、時間発展問題に帰着させるか？
Cauchy (3 + 1 次元分解), characteristic (2 + 2 次元分解), またはその組み合わせ

⇒ 3 + 1 次元分解を選択した場合 …

1. どのように初期値を用意するか

理論的な問題: 拘束条件式を解くための定式化？
現実的な物理モデルをつくるためにはどうしたらよいか？
背景重力波の影響を取り入れた初期値をどうやって作るか？
post-Newtonian 近似で得られている解析とスムーズにつなげることが可能か？

数値的な問題: 連立楕円型偏微分方程式の解を得ることができるか？
適切な境界条件は何か？

2. どのように時間発展を行うか？

理論的な問題: 自由発展 (free evolution) か, 途中で拘束条件を解き直すか (constrained evolution) ?
数値計算に適した発展方程式の定式化は何か？ ←←← 本稿の主題
適したゲージ条件は何か？

数値的な問題: 時間発展を行うスキームは何か？
適切な境界条件は何か？ ブラックホールが発生したときの境界条件は？星の境界の取り扱いや衝撃波の発生にどう対処するか？
コードの並列化

3. 数値計算からどのように物理量を取り出すか

理論的な問題: 重力波情報の抽出はどうするか？
他の近似との整合性比較

数値的な問題: どのようにブラックホール境界を決定するか？
数値計算結果の可視化

1.2 数値相対論における定式化問題: Overview

以下, 4次元時空を, 3次元空間の時間発展問題と解釈する「時空の3+1分解」をもとに議論を進める. Einstein 方程式を3+1分解すると, 楕円型の拘束条件式(第1種拘束条件)と(物理的に双曲型の)発展方程式に分解される. 系の構造自体は, 電磁気学に登場する Maxwell 方程式 (Box 1.2) とよく似たものになっている.

Maxwell 方程式:

Box 1.2

発展方程式: $(\partial_t = \partial/\partial t)$

$$\partial_t \mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{j}, \quad \text{and} \quad \partial_t \mathbf{B} = -\text{rot } \mathbf{E} \quad (1.1)$$

拘束条件式:

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad \text{and} \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

Maxwell 方程式は, 変数は (E, B) の計6成分に対し, 方程式は8本あるが, そのうちの2本は拘束条件と考えられ, 初期に満たしていれば, 時間発展途上でも自動的に満足することが簡単に示される.

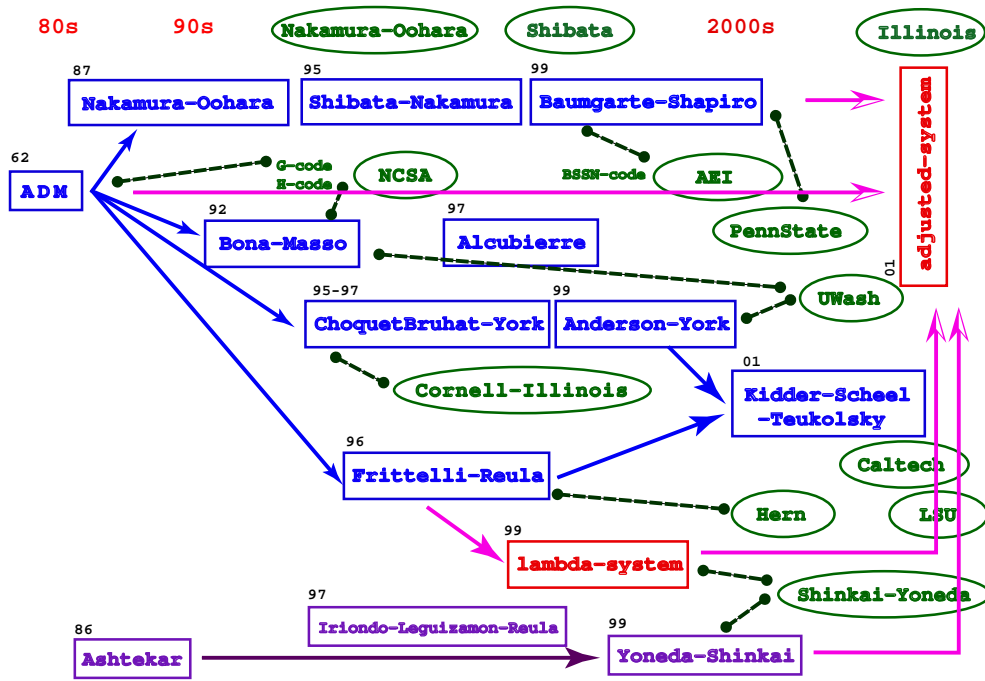


図 2: 数値相対論における定式化問題研究の歴史的概略。枠囲みは定式化の提案，丸囲みは実際に数値計算テストを行った仕事を示す。それぞれの文献については，[1] の表 1 を参照されたい。

Einstein 方程式を 3+1 分解した，ADM 形式 [13] (§2) の拘束条件も同様に，第 1 種の拘束条件式であり，初期に満たしていれば後の時間でも自動的に満たされることが解析的に示される（そこで，拘束条件式は時間発展の間，計算精度のモニターとして使われる）。ところが，現実の数値シミュレーションではそうはなかなかいかず，計算が途中で破綻してしまう（図 1）。途中で拘束条件式を解き直す，という提案もあるが，数値的には時間がかかるし，途中でブラックホールが発生すると特異点の境界条件が厄介になる，という問題があるため，未だ自由発展が計算の主流である。

数年前まで，数値相対論に見られる計算の破綻は，ゲージ条件の取り方や数値積分の方法，あるいは計算機の能力不足によるものだ，と考えられていた。しかし最近，Einstein 方程式の定式化の違いで，数学的には等価であっても，数値的な「安定性」が変わることが確かな事実として認識されてきた¹。

現段階では，長く安定な時間発展を得る方法として，(互いに完全に独立なものではないが) 3つのアプローチがある。

- (1) 京都大学のグループ [36, 37, 42] によって考案された，修正 ADM 形式 (BSSN 形式) (§2.1)。
- (2) 発展方程式が陽に一階の双曲性を持つように，ADM 変数に新たに変数を加えるなどの操作を加える双曲形式アプローチ (§2.2)。
- (3) 発展方程式系が，拘束面をアトラクターとして持つように，作為的に方程式を修正する「漸近的拘束」形式 (§2.3)。

¹ 「安定性」という用語は業界によって異なる意味をもつらしいので，ここでコメントしておく。

- 我々は，数値シミュレーションが破綻せず拘束条件を満たしながら進むことに対して「数値的安定性」がある，という。
- 偏微分方程式論で，ノルムが発散しないという意味で使われる適切性条件 (well-posedness) に現れる安定性を「数学的安定性」と呼ぶことにする。
- 数値解析においては，von Neumann 解析に代表される，差分スキームの「安定性」という概念もある。数値誤差が時間発展によって増大しないという意味を持つ。

本稿で論じるのは，拘束条件の破れの原因が，数値スキームに依らず，使用する方程式の定式化に由来するという現象である。

我々は第3の方法に注目し、簡単で有効な再定式化を推進している。元の発展方程式に拘束条件式を Lagrange 乗数的に組み込むことで、「漸近的拘束」形式を得ることができる、というのが主張である。乗数決定の指針として、拘束条件式の発展方程式に対する固有値解析を提案した [54, 55, 46]。§3 では、このアイデアを述べ、上記の BSSN 形式への応用 [56] や、元の ADM 形式への応用 [55, 46] について言及する。図2は年表である。我々の「補正システム (adjusted system)」が総てを統一的に理解しようとしていることを言い添えたい。

2 標準的な方法と3つのアプローチ

2.0 Strategy 0: ADM 形式

2.0.1 Original ADM 形式

4次元時空を時間と空間に分割するという「3+1分解」のアイデアは、60年代始め、Arnowitt, Deser, and Misner (ADM) [13] によって定式化された。彼らの目的は量子重力を考察するための正準形式を構築することだったが、3次元空間の時間発展という概念は直観的に時空のダイナミクスを追う方法として受け入れやすく、数値シミュレーションを行うときの標準的な方法となっている²。

「3+1分解」は計量を次のように分解することが基本になる。

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt), \quad (2.7)$$

ここで、 α と β_j は $\alpha \equiv 1/\sqrt{-g^{00}}$ 及び $\beta_j \equiv g_{0j}$, で定義され、それぞれラプス関数 (lapse function), シフトベクトル (shift vector) と呼ばれる。3次元超曲面 (hypersurface) Σ に直交する単位ベクトル $n_\mu = (-\alpha, 0, 0, 0)$ [$n^\mu = g^{\mu\nu} n_\nu = (1/\alpha, -\beta^i/\alpha)$] を用いて、3次元空間への射影演算子 $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu$ が定義される。 γ_{ij} は3次元空間を表現する内的 (intrinsic) 計量である (図3)。3次元超曲面が、4次元時空内にどのように埋め込まれているかを示すために、外的曲率 (extrinsic curvature)

$$K_{ij} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_n \gamma_{ij}, \quad (2.8)$$

を定義する。Gauss-Codacci 関係式を用いると、Einstein 方程式を導く Hamiltonian 密度は

$$\mathcal{H}_{GR} = \pi^{ij} \dot{\gamma}_{ij} - \mathcal{L}, \quad \text{where } \mathcal{L} = \sqrt{-g} R = \alpha \sqrt{\gamma} [{}^{(3)}R - K^2 + K_{ij} K^{ij}], \quad (2.9)$$

² 本稿の notation は教科書 [4] に従う。すなわち、時空の符号は $(-+++)$ とし、計量は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1)$$

とする。各項で同じ添え字がある場合は和を取る、という Einstein の記法を用いる。添え字の動く範囲は、ギリシャ文字については $\mu, \nu = 0, \dots, 3$, ローマ文字については $i, j = 1, \dots, 3$ とする。Christoffel 記号と、Riemann 曲率・Ricci 曲率・Ricci スカラーは、 $\partial_\alpha g_{\mu\nu} = (\partial/\partial x^\alpha) g_{\mu\nu}$ として

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\nu g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \quad (2.2)$$

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\nu\alpha}^\mu + \Gamma_{\sigma\alpha}^\mu \Gamma_{\nu\beta}^\sigma - \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma \quad (2.3)$$

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\alpha_{\mu\alpha\nu} \quad (2.4)$$

$$R \equiv R^\mu_{\mu} \quad (2.5)$$

で定義する。光速を $c = 1$ とする単位系を取る。以上により、Einstein 方程式は、宇宙項を Λ , エネルギー運動量テンソルを $T_{\mu\nu}$ として

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \Lambda \quad (2.6)$$

となるが、さらに議論は、真空の時空についてのみとするので (物質が存在する場合の議論も変わらない [47]), (2.6) の右辺はゼロと考えて良い。

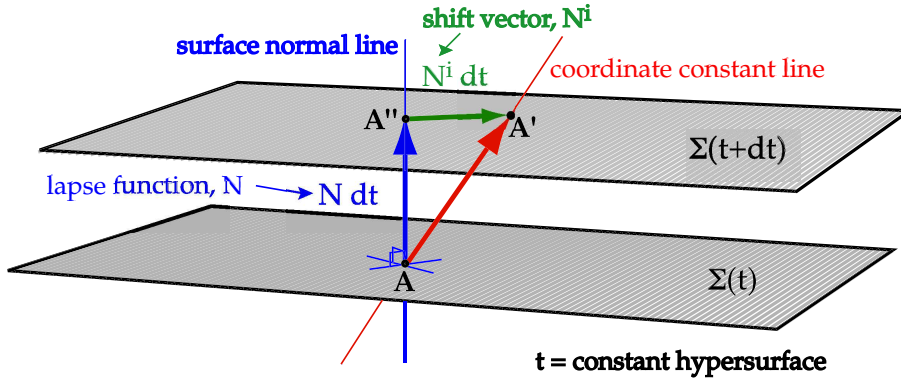


図 3: 時空の発展の概念: 3次元超曲面 Σ の時間発展. 計量の 0 成分に現れるラプス関数 (α または N と表記) とシフトベクトル (β^i または N^i) は, ゲージ条件ともよばれ, 時間発展を行う際に座標の自由度を固定する.

と記述することができる. ここで, π^{ij} は γ_{ij} に対応する正準運動量で,

$$\pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} = -\sqrt{\gamma}(K^{ij} - K\gamma^{ij}), \quad (2.10)$$

であり, 境界項は省略している. \mathcal{H}_{GR} を α や β_i で変分することで拘束条件式が得られ, $\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\delta \mathcal{H}_{GR}}{\delta \pi^{ij}}$ と $\dot{\pi}^{ij} = -\frac{\delta \mathcal{H}_{GR}}{\delta h_{ij}}$ より, 運動方程式が与えられる.

2.0.2 Standard ADM 形式

Smarr と York は, π^{ij} よりも, K_{ij} を基本変数とする ADM 形式を数値相対論屋向けに紹介した. これを本稿では「Standard ADM 形式」と呼ぶ.

Standard ADM 形式 [49, 58]:

Box 2.1

基本変数は (γ_{ij}, K_{ij}) , すなわち 3次元計量と外的曲率. 3次元超曲面 Σ を, ゲージ関数 (α, β^i) を定めつつ, 時間方向に発展させていく.

- 発展方程式: ($K = K^i_i$, ${}^{(3)}R_{ij}$ は 3次元 Ricci 曲率, D_i は 3次元共変微分)

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} = & \alpha {}^{(3)}R_{ij} + \alpha K K_{ij} - 2\alpha K_{ik} K^k_j - D_i D_j \alpha \\ & + (D_i \beta^k) K_{kj} + (D_j \beta^k) K_{ki} + \beta^k D_k K_{ij} \end{aligned} \quad (2.12)$$

- 拘束条件式: (${}^{(3)}R = {}^{(3)}R^i_i$)

$$\mathcal{H}^{ADM} := {}^{(3)}R + K^2 - K_{ij} K^{ij} \approx 0, \quad (2.13)$$

$$\mathcal{M}_i^{ADM} := D_j K^j_i - D_i K \approx 0. \quad (2.14)$$

(2.13) は Hamiltonian 拘束条件式 (エネルギー拘束条件式), (2.14) は運動量拘束条件式と呼ばれる. ADM 形式は, 時間に関して 1 階の 12 個の変数 (γ_{ij}, K_{ij}) から構成されている. 常にゲージの自由度が 4 つ (α, β_i) あり, 4 本の拘束条件式 (2.13) と (2.14) が存在するので, 物理的な自由度は 4 である. これは, 重力波の自由度が 2 であることに対応している.

Standard ADM と Original ADM 方程式の違いは, 発展方程式 (2.12) の右辺に拘束条件式 (2.13) が使われて Ricci スカラー R が陽に出ないような形になっていることである.

拘束条件式 (2.13) と (2.14) の時間発展方程式 (拘束伝播方程式) を記すと次のようになる [27].

拘束伝播方程式 Constraint Propagations of the Standard ADM:

Box 2.2

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{H} &= \beta^j (\partial_j \mathcal{H}) + 2\alpha K \mathcal{H} - 2\alpha \gamma^{ij} (\partial_i \mathcal{M}_j) \\ &\quad + \alpha (\partial_l \gamma_{mk}) (2\gamma^{ml} \gamma^{kj} - \gamma^{mk} \gamma^{lj}) \mathcal{M}_j - 4\gamma^{ij} (\partial_j \alpha) \mathcal{M}_i, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{M}_i &= -(1/2)\alpha (\partial_i \mathcal{H}) - (\partial_i \alpha) \mathcal{H} + \beta^j (\partial_j \mathcal{M}_i) \\ &\quad + \alpha K \mathcal{M}_i - \beta^k \gamma^{jl} (\partial_i \gamma_{lk}) \mathcal{M}_j + (\partial_i \beta_k) \gamma^{kj} \mathcal{M}_j. \end{aligned} \quad (2.16)$$

この 2 式は、『もし初期時刻に拘束条件が満たされている ($\mathcal{H} \approx 0, \mathcal{M}_i \approx 0$) ならば, 以後の時間発展の間もそのまま継続して満たされる』ことを示す. この事実を根拠にして, 一般相対論の数値シミュレーションは, 長い間「Standard ADM 形式を用い, 初期に拘束条件を解き, 時間発展の最中は拘束条件式をモニターする」という方法で行われてきた.

この標準的な方法は, 重力崩壊やブラックホール形成の臨界現象, 宇宙論などの数値計算で確実な成功を収めてきた. しかし, コンパクト連星合体による重力波の発生メカニズムのように, 強い重力場を長時間発展させなければならない問題に対しては綻びが見え始めた. 上記の『...』の記述は, 数値計算上は必ずしも正しくないのではないかと, 研究者が気づいたのは 90 年代始めである. §3 でも述べるが, 我々が, この Standard ADM 形式に, 拘束条件の破れがあるとそれが増大してしまうモードの存在があることを解析的に示したのは 2002 年である [46].

2.1 Strategy 1: 中村らによる修正 ADM 形式 (BSSN 形式)

2.1.1 基本変数と方程式

現在のところ, 大規模数値シミュレーションでもっとも良く使われているのが, 京都大学の中村卓史ら [36, 37, 42] によって考案された修正 ADM 形式である. 業界では, 柴田・中村の論文 [42] に使われていたこの定式化を再発見した Baumgarte-Shapiro [15] の頭文字もとって, BSSN 形式と呼ばれてしまうことも多い.

ここでは広く使われている notation [15] で紹介しよう. 基本変数は, ADM 変数 (γ_{ij}, K_{ij}) の代わりに

$$\varphi = (1/12) \log(\det \gamma_{ij}), \quad \tilde{\gamma}_{ij} = e^{-4\varphi} \gamma_{ij}, \quad K = \gamma^{ij} K_{ij}, \quad (2.17)$$

$$\tilde{A}_{ij} = e^{-4\varphi} (K_{ij} - (1/3) \gamma_{ij} K), \quad \tilde{\Gamma}^i = \tilde{\Gamma}_{jk}^i \tilde{\gamma}^{jk}. \quad (2.18)$$

で定義される $(\varphi, \tilde{\gamma}_{ij}, K, \tilde{A}_{ij}, \tilde{\Gamma}^i)$ を用いる. 共形部分とそれ以外に分けたことになるが, BSSN 形式では共形変換ファクター φ を, 常に $\tilde{\gamma} := \det \tilde{\gamma}_{ij} = 1$, とするよう時間発展の最中に再定義する. これは変数の定義であるが, 拘束条件の一つとも数えられるだろう. まとめると次のようになる.

BSSN 形式 (修正 ADM 形式) [36, 37, 42, 15]:**Box 2.3**基本変数は $(\varphi, \tilde{\gamma}_{ij}, K, \tilde{A}_{ij}, \tilde{\Gamma}^i)$.3次元超曲面 Σ をゲージ関数 (α, β^i) で固定しつつ, 時間発展する.

- 発展方程式:

$$\partial_t^B \varphi = -(1/6)\alpha K + (1/6)\beta^i (\partial_i \varphi) + (\partial_i \beta^i), \quad (2.19)$$

$$\partial_t^B \tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha \tilde{A}_{ij} + \tilde{\gamma}_{ik} (\partial_j \beta^k) + \tilde{\gamma}_{jk} (\partial_i \beta^k) - (2/3)\tilde{\gamma}_{ij} (\partial_k \beta^k) + \beta^k (\partial_k \tilde{\gamma}_{ij}), \quad (2.20)$$

$$\partial_t^B K = -D^i D_i \alpha + \alpha \tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} + (1/3)\alpha K^2 + \beta^i (\partial_i K), \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \partial_t^B \tilde{A}_{ij} = & -e^{-4\varphi} (D_i D_j \alpha)^{TF} + e^{-4\varphi} \alpha (R_{ij}^{BSSN})^{TF} + \alpha K \tilde{A}_{ij} - 2\alpha \tilde{A}_{ik} \tilde{A}^k_j \\ & + (\partial_i \beta^k) \tilde{A}_{kj} + (\partial_j \beta^k) \tilde{A}_{ki} - (2/3)(\partial_k \beta^k) \tilde{A}_{ij} + \beta^k (\partial_k \tilde{A}_{ij}), \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \partial_t^B \tilde{\Gamma}^i = & -2(\partial_j \alpha) \tilde{A}^{ij} + 2\alpha (\tilde{\Gamma}^i_{jk} \tilde{A}^{kj} - (2/3)\tilde{\gamma}^{ij} (\partial_j K) + 6\tilde{A}^{ij} (\partial_j \varphi)) \\ & - \partial_j (\beta^k (\partial_k \tilde{\gamma}^{ij}) - \tilde{\gamma}^{kj} (\partial_k \beta^i) - \tilde{\gamma}^{ki} (\partial_k \beta^j) + (2/3)\tilde{\gamma}^{ij} (\partial_k \beta^k)). \end{aligned} \quad (2.23)$$

- 拘束条件式:

$$\mathcal{H}^{BSSN} = R^{BSSN} + K^2 - K_{ij} K^{ij}, \quad (2.24)$$

$$\mathcal{M}_i^{BSSN} = \mathcal{M}_i^{ADM}, \quad (2.25)$$

$$\mathcal{G}^i = \tilde{\Gamma}^i - \tilde{\gamma}^{jk} \tilde{\Gamma}^i_{jk}, \quad (2.26)$$

$$\mathcal{A} = \tilde{A}_{ij} \tilde{\gamma}^{ij}, \quad (2.27)$$

$$\mathcal{S} = \tilde{\gamma} - 1. \quad (2.28)$$

(2.24) と (2.25) は Hamiltonian 拘束条件式・運動量拘束条件式 (いわば「運動学的」拘束条件) である。他の3つは「代数的」拘束条件であるが, 時間発展を通じて守られなければならないのは同じである。

2.1.2 Remarks

何故 BSSN 形式が Standard ADM 形式より, 安定性において優れているのだろうか. いくつかの説明がなされたが, 決定的なものはない.

新しい変数 $\tilde{\Gamma}^i$ は, Ricci 曲率をより正確に計算する目的で導入された. BSSN 形式では, Ricci 曲率は $R_{ij}^{ADM} = \partial_k \Gamma_{ij}^k - \partial_i \Gamma_{kj}^k + \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^k - \Gamma_{kj}^l \Gamma_{li}^k$, とせず $R_{ij}^{BSSN} = R_{ij}^\varphi + \tilde{R}_{ij}$ で計算する. ここで R_{ij}^φ は共形ファクター φ から算出される項, 後者はそれ以外の項である. この表現の差はわずかではあるが, 平坦な時空で重力波摂動を考えた時, R_{ij}^{BSSN} は波の伝播を陽に記述するオペレータを再現するので好ましい, と中村らは説明する. しかし, これは弱い重力のときにのみ有効な議論である.

ドイツのグループ [8, 10] は, 数値計算の比較から, BSSN 形式の安定性改善は, 発展方程式の右辺を運動量拘束条件を用いて修正したからではないか, と報告した. 彼らは同時に, BSSN 発展方程式を平坦な時空の摂動に適用して固有値解析した時に, ADM の場合に比べ「ゼロ固有値」が少なかったことから, 不安定性は「ゼロ固有値」によって引き起こされるのではないかと, とも報告している.

発展方程式を線形化して, 双曲形式の分類をすることで BSSN 形式の利点を説明しようとしたものもある [8, 39]. (ADM 形式と同様, BSSN 形式は右辺に Ricci 曲率を含むので, 陽に双曲型ではない). こ

れらは BSSN 形式にある種のサポートを与えることは確かであるが、(ADM 形式と同様に) 不適切な解 (ill-posed solution) の存在 [28] も示されており、どの説明も完全に納得できるものではない。

後に述べる我々の解析は、BSSN 形式の利点は「新変数の導入よりも、運動量拘束条件を用いた修正に依る」という結論になった。我々はさらに「BSSN 方程式を拘束条件を用いて再修正することによって、漸近的拘束システム (§2.3) が構築できる」ことも示している [56] (§3)。

2.2 Strategy 2: 陽に双曲形式を目指す定式化

2.2.1 定義, 期待される特性

第 2 のアプローチは、発展方程式が陽に 1 階の双曲形式となるように Einstein 方程式を定式化する方法である。応用数理学会会員には釈迦に説法かと思われるが、一応定義を書いておくと、

双曲形式

Box 2.4

基本変数 u_α ($\alpha = 1, \dots, n$) に対する発展方程式が右辺に 2 階以上の空間微分を含まないとき、その系を 1 階の (準線形) 偏微分方程式と呼ぶ。すなわち、

$$\partial_t u_\alpha = M^{l\beta}{}_\alpha(u) \partial_l u_\beta + \mathcal{N}_\alpha(u), \quad (2.29)$$

と書けて、特性行列 M および項 \mathcal{N} が u の微分項を含まないときである。さらに、次のように分類される。

- 特性行列の固有値がすべて実であるとき、弱双曲形式
- 特性行列が対角化可能かつすべての固有値が実なとき、強双曲形式 (対称化可能形式)。
- 特性行列がエルミート行列のとき、対称双曲形式。

双曲形式に関する包含関係は

$$\text{対称双曲型} \subset \text{強双曲型} \subset \text{弱双曲型}. \quad (2.30)$$

発展方程式を陽に双曲形式に書くことは、その系の適切性 (well-posedness) を証明するのに有効である。ここで適切性とは、発展方程式の解 $\{u\}$ が、(1°) 少なくとも一つ存在し (local existence), (2°) 唯一性 (uniqueness) が言え、(3°) 安定性 (stability) を満たすことを言う。3 つ目の解の安定性とは、解 $\{u\}$ を Cauchy データとして与えた時、その解に近い解を与えて時間発展すれば、元の解の時間発展と近いままである、という意味である。系の適切性は、結果として、ノルムに関するエネルギー不等式

$$\|u(t)\| \leq e^{\alpha\tau} \|u(t=0)\|, \quad \text{where } 0 < \tau < t, \quad \alpha = \text{const}. \quad (2.31)$$

が存在すること、として表現することができる。このことは、初期値によって解のノルムの上限が押さえられるということ为好ましく聞こえるが、解のノルムが一定であることを保証するものではない。

弱双曲型では、一般に、Cauchy 問題は C^∞ 適切である、と言うことができない。強双曲型/対称双曲型では、特性行列が u に依存しない場合、エネルギーノルムの有限性を示すことができる (cf [50])。特性行列が u に依存する場合は、限られた場合についてのみ適切性が証明される。

数値シミュレーションの立場で見ると、この双曲形式分類が魅力的なのは、数学的な適切性の証明だけではない。次のような利点が考えられる。

- (a) すでに Newton 流体計算では、衝撃波を扱うために、双曲形式に基づく流速保存スキームなどが開発されている。
- (b) 特性速度（特性行列の固有値）は、その系の情報伝達速度を代表するものと考えられるので、シミュレーションを行うモデルの物理的情報伝達速度の検討が可能になる。
- (c) 特性速度の存在は、数値的境界条件の工夫に役立つだろうと期待されている。また、初期値境界値問題 (initial boundary value problem, IBVP) では、現在のところ Cauchy 問題が適切に定義されるのは双曲形式に限られる。

数値相対論の定式化問題アプローチの一つとして、双曲形式に立脚した議論は、このような期待に端をなしている。§2.2.3 で再び議論するが、上記の期待はすべて妥当に聞こえるものの、実際の数値計算でその利点が必ず再現されているわけではない。

2.2.2 双曲形式の Einstein 方程式

ほとんどの物理的なシステムは、対称双曲型発展方程式で記述できると考えられる [30]。Einstein 方程式の適切性を証明するためにも、Einstein 方程式を双曲化することは、数学的相対論研究の一つの長いテーマとなっている。奇しくも、数値相対論の最近の発展は、数学者たちの研究と結びつくことになった。

残念ながら、ADM 形式はそのままでは 1 階双曲型ではない。(2.12) の右辺には Ricci 曲率があり、2 階の空間微分を含むからである。これまで、非常に多くの双曲化された Einstein 方程式が提案されてきた。双曲化する際よく行われるステップは、(1°) 新しい変数を導入（多くの場合、計量の 1 階空間微分を新変数とする）、(2°) 発展方程式を拘束条件式を用いて修正、そして時として、(3°) ゲージ条件の制限、および (4°) 変数の再スケールリングである。(1°) のステップのため、基本変数の数は ADM 形式の場合より必ず多くなる。

紙数制限の関係上、ここではこれまでに提案されたもののうち、いくつかを次にリストするにとどめることにする（短い解説は [1] にある）。図 2 の年表も参照していただきたい。

- The Bona-Massó formulation [17, 18]
- The Einstein-Ricci system [24, 5] / Einstein-Bianchi system [11]
- The Einstein-Christoffel system [12]
- The Ashtekar formulation [14]
- The Frittelli-Reula formulation [29, 50]
- The Conformal Field equations [26]
- The Kidder-Scheel-Teukolsky (KST) formulation [33]

最後の、KST 形式は、多くの双曲形式をまとめあげたものなので、ここで紹介しておこう (Box 2.5)。KST 形式は、基本的には ADM 形式から出発して構築されたものの、変数は 30、拘束条件は 22、そして 12 の自由に設定できるパラメータが存在する。パラメータの設定方法には物理的な指針がないので、数値計算に適用する時には試行錯誤的にパラメータサーチが必要になってしまう。

- 変数の組 $(g_{ij}, K_{ij}, d_{kij} \equiv \partial_k g_{ij})$ を用いて, 基本変数 $(g_{ij}, P_{ij}, M_{kij})$ を次のように定義する.

$$P_{ij} \equiv K_{ij} + \hat{z}g_{ij}K, \quad (2.32)$$

$$M_{kij} \equiv (1/2)[\hat{k}d_{kij} + \hat{e}d_{(ij)k} + g_{ij}(\hat{a}d_k + \hat{b}b_k) + g_{k(i}(\hat{c}d_j) + \hat{d}b_j)], \quad (2.33)$$

ここで $d_k = g^{ab}d_{kab}$, $b_k = g^{ab}d_{abk}$ であり, $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{e}, \hat{k}, \hat{z})$ は, 「運動学的 (kinematical)」パラメータである.

- 3次元超曲面 Σ をゲージ条件 (α, β^i) で固定しながら時間発展させることを基本にするが, 実際は重み付ラプラス関数 $Q = \log(\alpha g^{-\sigma})$ を用いてパラメータ σ の自由度を導入しておく.
- 発展方程式を拘束条件式で修正する. $(g_{ij}, K_{ij}, d_{kij})$ の方程式に対して, $\hat{\partial}_0 = \partial_t - \mathcal{L}_\beta$ として

$$\hat{\partial}_0 g_{ij} = -2\alpha K_{ij}, \quad (2.34)$$

$$\hat{\partial}_0 K_{ij} = (\dots) + \gamma \alpha g_{ij} \mathcal{H} + \zeta \alpha g^{ab} \mathcal{C}_{a(ij)b}, \quad (2.35)$$

$$\hat{\partial}_0 d_{kij} = (\dots) + \eta \alpha g_{k(i} \mathcal{M}_{j)} + \chi \alpha g_{ij} \mathcal{M}_k, \quad (2.36)$$

とする. $(\gamma, \zeta, \eta, \chi)$ はパラメータである. (\dots) の部分は, 元の ADM 形式の式に対応する項を示す (具体的には [33] の (2.14) と (2.24)). 実際にはこれらを $(g_{ij}, P_{ij}, M_{kij})$ の発展方程式に変換する.

- 拘束条件式は $\mathcal{C}_{klj} \equiv \partial_{[k} d_{l]j}$ として, $(\mathcal{H}, \mathcal{M}_i, \mathcal{C}_{klj})$.

KST 形式の最大の進展は「運動学的 (kinematical)」パラメータの導入である, と我々は考えている. この6つのパラメータは,

- 発展方程式の固有値を変えない.
- 拘束伝播方程式の特性部分を変化させない.
- 発展方程式の固有ベクトルを変える.
- 発展方程式・拘束伝播方程式の非特性項を変える.

という特徴を持つ. ルイジアナ州立大学のグループ [21] は, 平坦な時空での線形摂動を KST 方程式で表した時, 非特性項 (non-principal terms) がゼロに成り得ることから, 運動学的パラメータの導入が, 双曲形式の数学的特徴をそのまま数値的な結果に結びつけるキーになるだろう, と予想している. Lindblom-Scheel [34] は, KST 方程式を数値シミュレーションに用いた時に, 発展方程式の特性行列から得られるノルムの増大率と数値的な誤差増大率を対応させようとした. 両者は完全には一致しなかったが, 非線形破綻が始まる前までは近いオーダーで対応していることを示している.

2.2.3 双曲形式に対する Remarks

双曲形式の発展方程式を数値的な安定性と結びつけて議論する時には, 次の点を明らかにしなければならないであろう.

Q 時間発展方程式の定式化という視点から考えて、双曲化が数値的安定性に実際に効果をもたらすものなのか。あるいは、どのような状況下で、双曲化の利点が見られるのだろうか。

残念ながら、現在の数値相対論は、まだこの質問に答えることはできていない。双曲化が注目された初期の頃の数値計算は、安定化に対する利点を強調したものが多かった [18, 19, 40, 41] が、これは Standard ADM 形式との比較に基づくものである。比較する ADM 形式がもともと性質が悪いことを考慮すれば ([46]) 当然の結果と言えないこともない。最近、平坦な時空を非自明なゲージ条件で発展するモデル問題を用いて、弱双曲型と強双曲型の違いが長時間積分した際の計算寿命に反映される、という報告がなされた [22]。しかし、双曲化のアプローチは必ずしも薔薇色ではない、という印象も受ける。

Objections from numerical experiments

- 双曲型アプローチの定式化を用いて報告されているすべての数値計算例は、やはり最終的に数値的破綻を迎えてしまっている。
- ゲージ関数も同様に双曲化する試みが一時提案された [17] が、伝播速度の有限性は数値計算で病的な衝撃面 (pathological shock formations) を発生させる場合があることが示された [6, 7]。
- 変数を同じにした、弱双曲型・強双曲型・対称双曲型の統一的な数値比較では、数値的安定性に関して、3 者の間に顕著な差が見られなかった。(Frittelli-Reula 形式 [29] を用いた Hern の計算 [31]、および、Ashtekar 形式 [14, 53] を用いた我々の計算 [45])
- 対称双曲型の方程式を用意すれば、必ずしも最良の数値シミュレーションが実現されるわけではない。多くの場合、対称双曲型をさらに一工夫する必要がある。(Einstein-Ricci system [41] や Einstein-Christoffel system [16], conformal field equations [32], KST 形式 [34] など)

もちろん、これらの結果は、特定の定式化・特定のモデルに基づくものなので、一般化して理解するのは危険である。今後の比較研究の上で、注目しなければならない事項は次のようなことであろう。

Remarks on hyperbolic formulations

- (a) 偏微分方程式の適切性に関する数学的証明は、多くの場合非常に簡単な対称双曲型および強双曲型方程式に基づくものである。特性行列の成分に基本変数依存性がある場合 (すべての Einstein 方程式の双曲化では複雑な依存性がある)、適用できるような証明がほとんどない。
- (b) 適切性の議論で登場する「安定性」は、ノルムの上限が存在することを述べるものであり、ノルムが一定あるいは減少することを保証するものではない。
- (c) 双曲型の議論では、特性部分のみが注目され、他の非特性項は無視されている。

我々は、数値相対論業界における双曲形式への過度の期待と混乱は、これらの事項にあると考えている。特に (c) の非特性項の影響は重要である。上記の Ashtekar 形式や Frittelli-Reula 形式での数値計算が双曲型分類の違いを示さなかったのは非特性項の影響は無視できないからであったと考えられる。この点に関して、KST 形式の登場は、非特性項の影響を小さくすることができるもので、今後の比較計算が期待される。

もし安定性に関する解析的な予想と数値計算の振る舞いが一致するならば、双曲形式のアプローチは数値相対論で非常に有効な手段として残るであろう。将来的に数値相対論で IBVP 研究を真剣に行うことにつながるようになるかもしれない。

次の章では、第 3 のアプローチを紹介するが、そこでの我々の解析は、上記の非特性項の影響も含めたものであることをここで一言予告しておきたい。

2.3 Strategy 3: 漸近的拘束システム (Asymptotically constrained systems)

第3のアプローチは、拘束条件の破れに対して堅牢なシステムを積極的に作ろうとする試みである。具体的には、時間発展のアトラクターが拘束面であるようなシステムを構築するアプローチを指す (図4)。このアイデアは、Brodbeckら [20] によって「 λ -システム」と命名されて提案されたのが初めてであるが、その後、我々はより簡略化したステップで同様の効果を得ることができる「補正システム (adjusted system)」を提案 [54] し、前章までのアプローチの統一を試みている。

2.3.1 “ λ -システム”

Brodbeckら [20] は、対称双曲型の発展方程式に対して、さらに新変数 λ を導入し、 λ の発展方程式を意図的に設定することによって、元の系が拘束面に収束するような手法を提案した。新変数 λ は、拘束条件式の破れを測るような量で、 λ の発展方程式は拡散方程式を想定しており、 λ が指数関数的にゼロに収束するように設定される。

“ λ -システム” (Brodbeck-Frittelli-Hübner-Reula) [20]:

Box 2.6

対称双曲型の発展方程式に対して、新変数 λ を導入し、時間発展が拘束面をアトラクターとなるような人工的な力を加える。

手順:

- | | | |
|----|--|--|
| 1. | 対称双曲型の発展方程式を準備する | $\partial_t u = M \partial_i u + N$ |
| 2. | 新変数 λ を導入 (λ は拘束条件の破れの指標)
λ の時間発展は意図的に拡散型とする | $\partial_t \lambda = \alpha C - \beta \lambda$
($\alpha \neq 0, \beta > 0$) |
| 3. | 変数 (u, λ) の組を新たな基本変数とする | $\partial_t \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} A & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} \partial_i \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix}$ |
| 4. | 発展方程式が対称双曲型になるように補正する
補正する | $\partial_t \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \bar{F} \\ F & 0 \end{pmatrix} \partial_i \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix}$ |

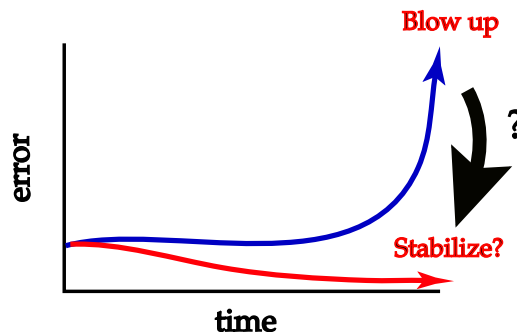
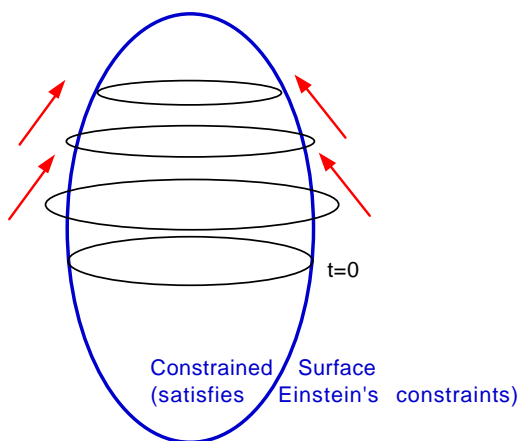


図4: 「漸近的拘束システム」の発展イメージ図。

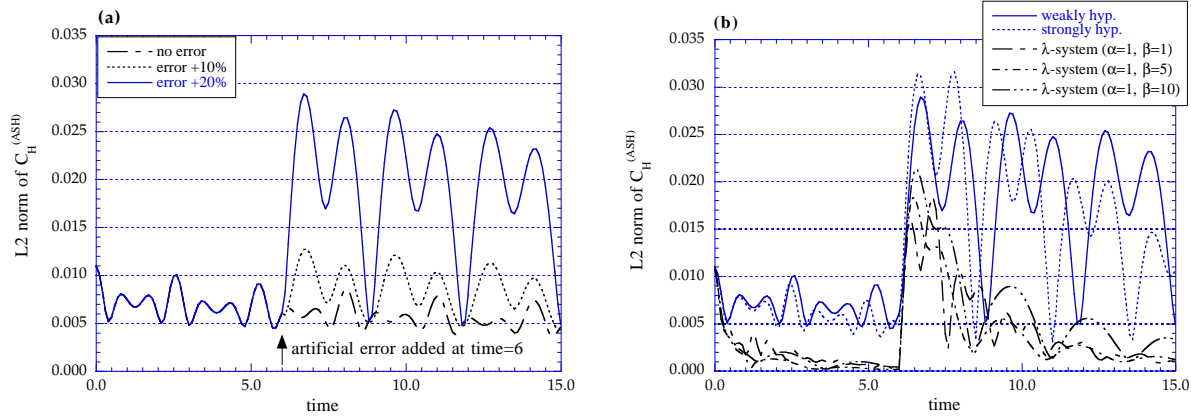


図 5: Ashtekar- λ システムの数値計算例. 対称 1 次元時空を伝播する平面重力波を周期境界条件の元で数値シミュレーションを行った. 図は Hamiltonian 拘束条件式 C_H の L2 ノルムの時間変化である. 時刻 $t=6$ で, 人工的なエラーを挿入し, それがその後のシミュレーションにどう影響するかを示している. 図 (a) は $t=6$ での人工的なエラーの大きさとその後の拘束条件の破れ具合の比較. 3 例とも発展方程式を全く修正していないオリジナル (弱双曲型 Ashtekar 形式) なものの場合. 図 (b) は 補正されたシステムの効果の比較. いずれも図 (a) の人工的なエラー 20% を $t=6$ で与えているが (実線はオリジナルなシステムの場合で両図共通), 「 λ システム」は明らかに拘束条件の破れを減少させている. その違いは, オリジナルな方程式を強双曲型に修正した場合の違い (図の点線) よりも大きい [54].)

新しい発展方程式も対称双曲型であるように設計されているので, 系の発展は適切であり, 解の一意性も保証されていると考えられる. Brodbeck らは, 解析的に, 十分小さな $\lambda (> 0)$ に対しては, 適当な係数 α と β を取ることによって λ がゼロに収束することを示している.

Brodbeck らは, Einstein 方程式の対称双曲型の一つである Frittelli-Reula 形式 [29] について具体的な「 λ システム」を書き示したが, 具体的な数値計算は行っていない. 我々は, Ashtekar によって提案された Einstein 方程式の新しい正準変数を用いて, システムの「 λ 化」を行い, 拘束条件式の破れとともに実数条件の破れも制御できうることを示した (Ashtekar 形式は複素多様体を扱うため, 実多様体に制限することも拘束条件として必要になる) [44]. 我々は実際に数値計算も行い, 電磁気学の Maxwell 方程式を λ 化したシステムと Ashtekar- λ システムの両方で, 期待された拘束面への収束が, 数値的に実現することを示した (図 5) [54]. 人工的に拘束面へ回帰した数値解がはたして本当の方程式の解なのか, という疑問も呈されている [48] が, 元来我々は差分誤差程度で長時間発展を保つことができれば満足なのであることを考えると, 誤差の小さいうちにその拡大を防ぐという発想はとても魅力的であると思う.

しかし, 「 λ システム」には代償も多い. (i) 元のシステムが対称双曲型であることを前提としているので, Einstein 方程式ではその応用が限られる. (ii) 新たに拘束条件の数だけ新しい変数を加えるので数値計算にも負担がかかる. そして, (iii) 「 λ システム」が非線形レベルの拘束条件の破れに対応できるかどうかは不明である. また, 空間微分を含まない拘束条件に対して, このアイデアが適用できるかも定かではない.

2.3.2 補正システム (adjusted system)

いよいよ我々の提案を紹介しよう. 「 λ システム」と目的を同じに保ちながら, その代償をなくすシステムである.

補正システム (adjusted system) (まとめ) [54]:**Box 2.7**

- 目的: 拘束面をアトラクターとするシステムを運動方程式を補正することによってつくり, 拘束条件の破れを制御する.
- 手順: 運動方程式の右辺に拘束条件式を加え, その係数 (Lagrange 乗数) を調節する.
- 理論武装: 係数 (Lagrange 乗数) の決め方は, 拘束伝播方程式を先に導いておき, 右辺の Fourier モードの固有値解析を行うことにより, ある程度予測される.
- 利点: 元の発展方程式が, 対称双曲型でなくてもよい.
- 利点: 基本変数の数が, 元の発展方程式と同じに保たれる.

より詳しくは, 次の章を参照して頂きたい. 手順について補足すると次のようになる.

補正システム (adjusted system) (手順):**Box 2.9**

1. 発展方程式を用意する (陽に双曲型でなくてもよい) $\partial_t u = J\partial_i u + K$
2. 発展方程式の右辺に拘束条件を加える $\partial_t u = J\partial_i u + K + \underbrace{\kappa C}$
3. 拘束伝播方程式を先に導いておき, 右辺の Fourier モードの固有値解析を行うことにより, 係数 (Lagrange 乗数) κ を決定する. 固有値予測の指針は, 実負または純虚 (Box 3.2, 3.3 参照) $\partial_t C = D\partial_i C + EC$
 $\partial_t C = D\partial_i C + EC + \underbrace{F\partial_i C + GC}$

運動方程式を拘束条件式で補正する, という点から言えば, 手法そのものは前章までに紹介したものと同じである. しかし我々は, 双曲型方程式の構築原理を捨て, 「拘束伝播方程式」に着目し, その固有値を「拘束条件破れの拡大ファクター」と見なし, その制御を能動的に行おうとするのである. 次章でそれを説明したい.

3 統一的な理解へ向けて: 「補正システム (adjusted system)」

この章では, 漸近的に拘束面に近づく発展方程式をつくる, という我々の「補正システム (adjusted system)」の観点から, 前章で紹介した他のアプローチの統一的な理解を試みる. 元論文は [54, 55, 46, 56, 57] 等である.

3.1 手順：拘束伝播方程式と我々の提案

時間発展を行う基本変数の組が $u^a(x^i, t)$ であるとして、発展方程式を

$$\partial_t u^a = f(u^a, \partial_i u^a, \dots), \quad (3.1)$$

満たさなければならない（第1種）拘束条件式を

$$C^\alpha(u^a, \partial_i u^a, \dots) \approx 0. \quad (3.2)$$

とする。ここで、発展方程式 (3.1) が、1階の双曲型であることは要請しない。我々は、数値計算を実行する以前に、拘束条件 C^α の時間発展方程式（拘束伝播方程式, constraint propagation）

$$\partial_t C^\alpha = g(C^\alpha, \partial_i C^\alpha, \dots), \quad (3.3)$$

を用意して、拘束条件の破れ具合を解析的に把握することを提案する。必ずしも、(3.3) を (3.1) と共に数値的に同時に解くことを想定しているわけではない。

さて、発展方程式 (3.1) の右辺が、拘束条件式を用いて補正（修正、置換, adjustment）されたとしよう。

$$\partial_t u^a = f(u^a, \partial_i u^a, \dots) + F(C^\alpha, \partial_i C^\alpha, \dots), \quad (3.4)$$

そうすると、この補正に応じて、対応する拘束伝播方程式も変化を受ける。

$$\partial_t C^\alpha = g(C^\alpha, \partial_i C^\alpha, \dots) + G(C^\alpha, \partial_i C^\alpha, \dots). \quad (3.5)$$

したがって、補正によって、数式上は「ゼロを加える」という操作であっても、拘束条件の破れ、という観点から見れば、その増大や減少の違いが明確に現れるはずである。

拘束伝播方程式を導いたとして、その双曲性を議論することも有用かもしれない。しかし、扱う方程式によっては、必ずしも (3.3) が1階双曲型にならないことも多いので、他の手段を模索することが必要である。双曲型の議論では、無視されてしまう特性部分以外の項の影響が、数値的安定性の議論への不一致を導いているかもしれないことを前章で述べたが、その解析方法の改良として、ここでは、(3.3) のモード解析を提案したい。

拘束伝播方程式の振幅拡大ファクター (CAF) :

Box 3.1

(3.3) を、例えば Fourier 変換によってモード分解し、常微分化 (homogenization) された拘束伝播方程式

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{C}^\alpha &= \hat{g}(\hat{C}^\alpha) = M^{\alpha\beta} \hat{C}^\beta, \\ \text{where } C(x, t)^\rho &= \int \hat{C}(k, t)^\rho \exp(ik \cdot x) d^3k, \end{aligned} \quad (3.6)$$

に対して固有値解析を行う。行列 $M^{\alpha\beta}$ を拘束伝播行列 (constraint propagation matrix) と呼び、行列 $M^{\alpha\beta}$ の固有値 Λ を振幅拡大ファクター (Constraint Amplification Factor, 以後 CAF) と呼ぶ。

CAF は、拘束条件の破れが存在したとき、その時間変化を示唆するものと考えられる。

CAF が求められたとして、どういう基準で判定が可能であろうか。我々は次の仮説を用意した。

CAF（拘束伝播方程式の振幅拡大ファクター）判定に対する仮説:

Box 3.2

- (A) もし CAF の「実部が負」であれば、拘束条件の破れはゼロに収束するように発展してゆくと考えられるので、「CAF 実部が正」のシステムより数値的に安定である。
- (B) もし CAF が「虚部を持つ」のであれば、拘束条件の破れは波動として伝播してゆくと考えられるので、「CAF が実数」のシステムより数値的に安定である。

我々は、これらの条件を満たす CAF が多ければ多いほど、システムが数値的に安定なのではないかと予想する。

3.2 一般的な議論

一般に、拘束伝播方程式の発展形態は次の 3 つに分類できる [57].

拘束伝播方程式の分類:

Box 3.3

拘束条件のノルムの発散が数値的安定性に直接関与している、と考えるのであれば、次の分類が成り立つ。証明は [57].

- (C1) 漸近的に拘束条件を満たす (*Asymptotically constrained*): すべての拘束条件の破れがゼロに収束してゆく。これが実現するのは、すべての CAF の実部が負である場合のみである。
- (C2) 漸近的に拘束条件の破れが有界に収まる (*Asymptotically bounded*): すべての拘束条件の破れが有界に収まる (上記のゼロに収束する場合も含む)。これが実現するのは、(a) すべての CAF の実部が非正であり、かつ拘束伝播行列 (CP matrix) $M^{\alpha\beta}$ が対角化可能であるか、(b) すべての CAF の実部が非正であり、かつ縮退している CAF の実部がゼロでないときである。
- (C3) 拘束条件の破れが発散する (*Diverge*): 少なくとも一つの拘束条件式が発散する。分類 (C2) の補集合である。

これらは **Box 3.2** で与えた経験的な仮説 (A) を大筋で支持していると言える。この分類は一般論であるが、拘束伝播行列を評価する際の変数の値を固定した、ある一時刻での判定であることに注意されたい。CAF を得たときの便宜的な分類方法をフローチャートで示すと、図 6 のようになる。

3.3 応用

陽に双曲形式を目指す定式化との比較 §2.2 で紹介した、陽に双曲形式を目指す定式化との比較は、Maxwell 方程式と Einstein 方程式の Ashtekar による定式化 (対称双曲型) の 2 つのシステムについて数値計算を行った [45, 54]. 我々は「 λ システム」の有効性を示した場合と同じモデルで、「補正システム (adjusted system)」を試したところ、期待していた「拘束面への漸近的収束」を示すことに成功した

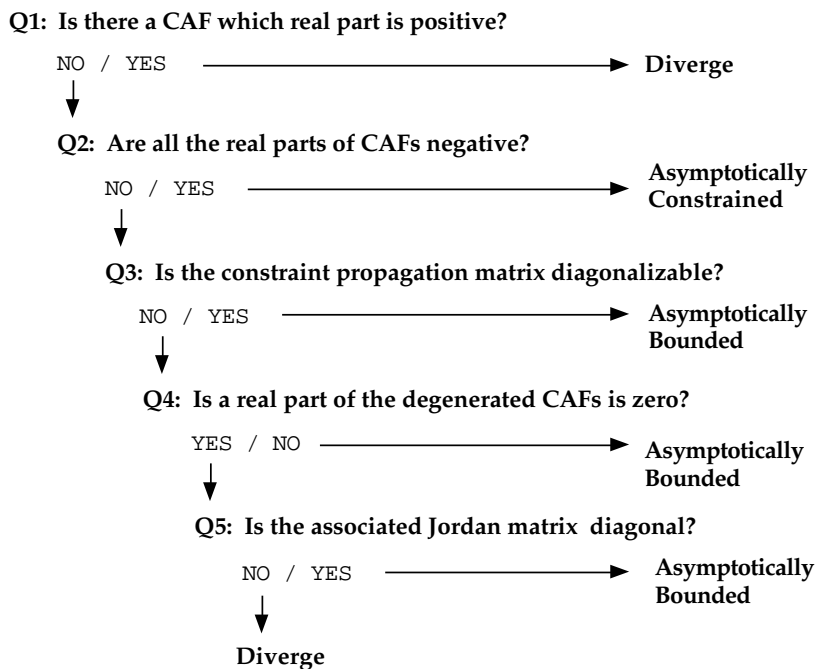


図 6: 拘束伝播方程式の分類 (Box 3.3) の便宜的な方法

(図 7). これらは, 数値的安定性という観点から言えば, 弱双曲型・強双曲型といった双曲型分類の違いを超える実用的なものであった.

ADM 形式への応用 §2.0 で紹介した, ADM 形式そのものに補正システムは有効だろうか. ADM 形式は 1 階双曲型には分類されないで, 「 λ システム」を作ることはできない. しかし, **Box 2.8** の手順を行い, **Box 3.1, 3.2** の CAF 評価を行うと拘束条件の破れが存在した場合の数値計算の運命が予測できる.

驚くべきことに, ブラックホール時空 (Schwarzschild 時空) を背景時空として, Standard ADM 形式の拘束伝播方程式の解析を行うと, ブラックホールの近傍になるほど CAF の実部が正負に分離してしまうことが示された [46]. これは即ち, 「Standard ADM 形式は, 拘束条件の破れを加速するモードを持ち (減速するモードもあるが), 強い重力場ほどその効果が顕著に現れる」ことを意味する. もちろん, 我々の固有値解析は背景時空の選択や, 座標の取り方にも依存するのですべての場合で Standard ADM 形式を悪者扱いにすることはできないが, これまで「1 階の双曲形式でないから Standard ADM 形式は不安定なのだ」という曖昧な解釈からは一歩前進した理解になったと言えるだろう.

さらに, Standard ADM 形式に対してある特定の補正を施せば, CAF の実部が非正になり得ることもわかった [55, 46]. ADM 形式でも漸近的に拘束条件を満たすようなシステムに変わり得るのである. 我々は, 数値的安定性が良いと期待される補正方法をいくつか提案 [46] し, 現在実際に数値シミュレーションを行ってその確認を進めている. 進行中のプロジェクトであるが, 結果の一部を示したい.

図 8 (a) は, 平坦な時空に摂動を加えた時の時空発展を, ある補正方法 (Detweiler 型 [25]) のパラメータ L を変えて比較した図である. パラメータ $L > 0 (< 0)$ は実部が負 (正) の CAF を与える. L の正負による拘束条件の破れの具合が CAF 解析で判定できることを示している. (もっとも L が大きな正の値をとりすぎると拘束条件の破れは直ちに加速するが, これは方程式にエラーを加えすぎたためと考えられる. 簡単な差分方程式ではこのようなパラメータの上限を von Neumann 解析で示すことができる [54]).

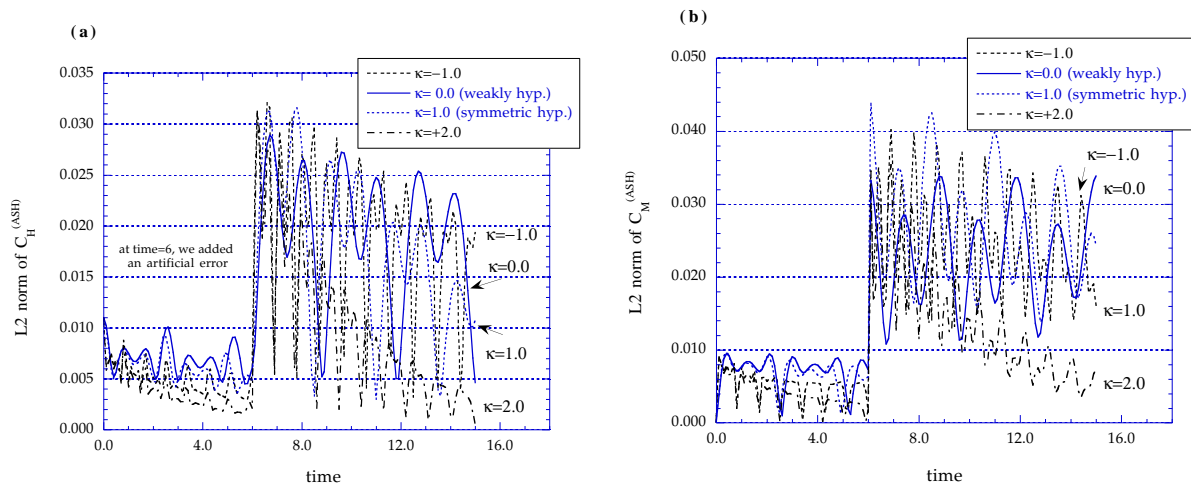


図 7: 補正システム (adjusted system) の計算事例. 弱双曲型 Ashtekar 形式に対する効果を図 5(b) で示したものと同一数値実験と比較した. 図 (a) は Hamiltonian 拘束条件 C_H , 図 (b) は運動量拘束条件式 C_{Mx} の L2 ノルムの時間変化を示す. どちらも実線は, 補正されていないオリジナルな弱双曲型 Ashtekar 形式 (パラメータ $\kappa = 0$) の場合. パラメータ $\kappa = 1$ は対称双曲型に分類されるが, $\kappa = 2$ の強双曲型の方が拘束条件の破れが減少していくことがわかる [54].

図 8 (b) は, 線形重力波 (Teukolsky 波 [51]) の伝播を周期境界条件を用いて長時間発展を行った計算結果である. 初期値やグリッドの大きさはすべて同じにしているのにも関わらず, 使用する方程式の違いによって拘束条件の破れ具合が異なっている. 図は Original ADM 形式/Standard ADM 形式/簡略 Detweiler 型補正 ADM 形式/Detweiler 型補正 ADM 形式の 4 つの例だが, 後 2 者は実部が負の CAF を持ち, 期待されたように指数関数的に拘束条件のノルムが減少していくのがわかる.

発展方程式の時間反転非対称化 上記の数値計算は, **Box 3.2** の仮説 (A) を実現できれば, 拘束面がアトラクターになるような発展システムが実現していることを示唆している. これは即ち, 拘束条件の破れが必ず減少するという「時間反転非対称」なシステムを構築することを意味する. 発展方程式を拘束条件式で補正する, と述べただけでは無限の組み合わせが考えられるが, 「時間反転非対称となるように補正項を加える」ことに注目すると, 補正項の候補を絞ることができる.

「漸近的拘束システム」を得るためのトリック:
= 発展方程式の時間反転対称性 (time reversal symmetry) を破る.

Box 3.4

1. 元の方程式の持つ, 時間反転に対するパリティを判定
時間の向きを逆にした時 ($\partial_t \rightarrow -\partial_t$), 符号を変えない (変える) 項をパリティ+ (-) と呼ぶことにする. 例えば $g_{ij}, \partial_t K_{ij}, \mathcal{H}, \dots$ は パリティ (+) であり, $K_{ij}, \partial_t \gamma_{ij}, \mathcal{M}_i, \dots$ は パリティ (-) である.
2. 元の方程式の持つパリティに対して, 異なるパリティの項を右辺に補正
例えば, パリティ(-) の発展方程式 $\partial_t \gamma_{ij}$ の右辺には, パリティ (+) の補正項 $\kappa \mathcal{H}$ を加える.

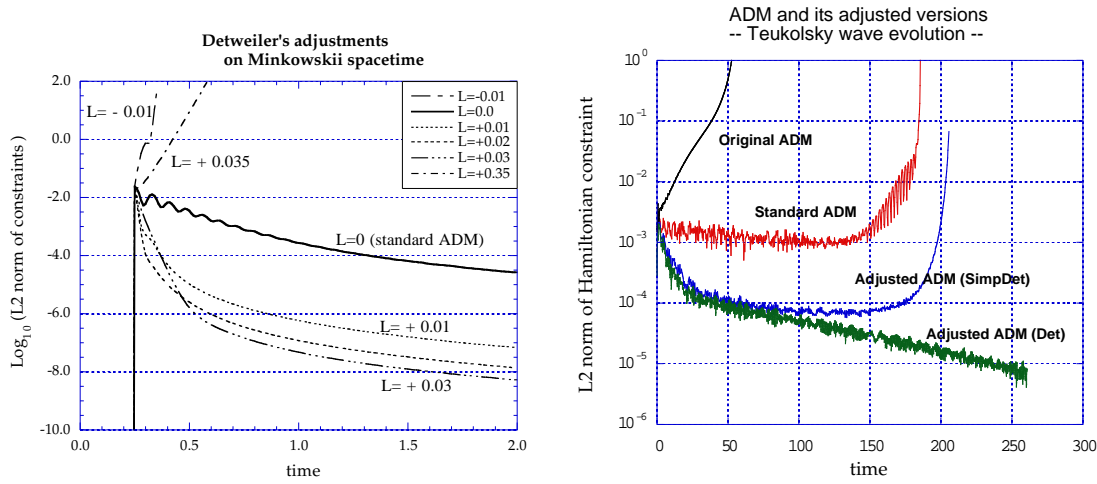


図 8: 補正 ADM 形式と元の ADM 形式の数値的安定性比較. (a) は, 平坦な時空に, 時刻 $t = 0.25$ で摂動を加えた時の時空発展を, ある補正方法 (Detweiler 型 [25]) のパラメータ L を変えて比較した図. 空間 1 次元の数値計算で, Hamiltonian 拘束条件 \mathcal{H}^{ADM} の L2 ノルムの時間変化を示している. (b) は, 線形重力波 (Teukolsky 波) の伝播を用いて長時間発展を見たもの. 空間 3 次元の数値計算で, 数種の adjusted ADM systems に対して比較している. 時間発展は harmonic スライス条件, 周期境界条件, iterative Crank-Nicholson 法を用いた.

BSSN 形式への応用 §2.1 で紹介した, 修正 ADM 形式 (BSSN 形式) の利点も, 我々の CAF で説明することができる [56]. それによると, 数値シミュレーションで経験的に知られていた [8] ように, 運動方程式の一部を運動量拘束条件式で置換していたことが, 決定的だったようだ. この置き換えがないと, BSSN 形式の CAF の実部は, 正と負の両方のモードを含み, 置き換えをすると, 実部がゼロかつ虚部が存在するようになる. すなわち拘束条件の破れを拡大するような不本意なモードが存在しなくなる. 我々の結論では, BSSN 形式の利点は, 新変数 Γ^i の導入ではなく, 単に運動方程式の補正のバランスが偶然に良かったからだ, ということになった.

それでは上記の「時間反転非対称化」を BSSN 形式に応用したら, より堅牢な方程式になるのではないだろうか. 我々は, BSSN 形式の CAF 実部を負にするようなシステムをつくるのが実際に可能であることを指摘し, 運動方程式の補正方法をいくつかの提案した [56]. この提案は, 直ちにイリノイ大学のグループによって数値実験され, 回転するブラックホール解のテスト計算で, 回転の大きさが J/M が $0.9M$ という非常に大きい場合でも, 長時間にわたって (これまでの BSSN 形式よりも数倍長い時間 $t \sim 6000M$) 安定に計算が続けられるようになったことが報告された [52]. 彼らの計算では, 数値解が確かに厳密解に近づいていることも示されている.

4 まとめと展望

本稿では, 一般相対論における安定な数値シミュレーションを行うための, Einstein 方程式の定式化問題を解説した. 近年のアプローチを (0) Standard ADM 形式 (§2.0, Box 2.1), (1) 修正 ADM 形式 (BSSN 形式) (§2.1, Box 2.3), (2) 陽に双曲形式を目指す定式化 (§2.2, Box 2.4), (3) 漸近的拘束システム (§2.3), に分類して理解することを試みた.

このうち, (2) の双曲形式のアプローチがもっとも伝統的な数学理論に基づくのだが, 複雑な Einstein 方程式ではこれまで証明された事実がそのまま適用できない場合が多く, 未だ主流であるとは言い難い. 我々は, §2.2.3 でも述べたように, 非特性項の影響を論じる手段を持つか, 非特性項が完全に除去され

た発展方程式を得ない限り、このアプローチで実用上の利点を得ることは難しいのではないかと考えている。

我々自身は、上記 (3) のアプローチを推進している。これは、時空のアトラクターが拘束面に向かうように運動方程式を Lagrange 乗数補正するものである (Box 2.9)。我々の理論武装は、拘束伝播方程式を併用して、拘束条件の破れを事前に回避することであり、そのために、拘束伝播方程式のモード解析 (Box 3.1) ・固有値解析 (Box 3.2) を行うことを提案した。現在までに得られている事実は次のようである。

- 拘束伝播方程式 (constraint propagation) をみると、元の発展方程式に本来ゼロである拘束条件式を加える操作 (補正操作, adjustment) によって、拘束条件の破れの拡大・縮小具合が変化することが予測できる。
- 拘束伝播方程式右辺の固有値解析によって、これまで標準とされてきた Standard ADM 形式が強い重力場では拘束条件の破れを増大するモードを (減少させるモードと共に) 含んでいることが明らかになった。
- 平坦な時空での摂動、という限られた場合についてだが、我々は、何故 BSSN 形式が ADM 形式よりも数値的に安定なのか、という説明を、拘束伝播方程式右辺の固有値解析によって明らかにした。
- 元の発展方程式を補正することによって、拘束条件の破れを増大するモードを除去することが可能である。発展方程式の時間対称性を破る補正 (Box 3.4) を行えば、拘束条件の破れが自己収束する「漸近的拘束システム」をつくることも可能である。
- 「漸近的拘束システム」は、ADM 形式でも BSSN 形式でも提案でき、いくつかの数値計算では、実際に数値的安定性が得られ、以前より長時間のシミュレーションが実現できた。

これまでのところ、(3) のアプローチは成功を収めているが、より複雑な時空のダイナミクスを追うときには、一層の工夫が必要となるだろう。事実、現在比較を進めている弱い重力波伝播の数値計算では、拘束面に近づいていく様子が見られても最終的に再び計算が破綻してしまう例がある。将来的には、「拘束面よりどれだけ離れてしまっているか」という「距離」の指標を確立し、「補正係数の自動応答制御」を可能にするなどの前進が必要だと考えている。

4.1 おわりに

数値相対論の「定式化問題」は、問題の認識が遅れていたこともあって、近年精力的に研究が続けられている。現在は、大型数値シミュレーションを通じてきちんと系統的に比較計算を実行しようという機運も高まっている。2002 年にはメキシコで、「定式化問題」の比較計算をするために、世界のグループが試みるべき共通問題の設定とプログラムインターフェースを作るという研究会が開かれた (著者も企画者の一人であった)。2 週間缶詰めになった研究会の成果の一部は、論文 [35] で察していただくことができると思う。

本稿では、Einstein 方程式を「拘束条件付きの発展方程式問題」という視点から一貫して記述した。しかしこの問題は、一般相対論固有のものではなく、他の分野 (電磁気学, 流体力学, 分子動力学, 機械工学, ...) でも登場する問題のようだ。最近、共通の問題意識をもつことを知った著者は、他の分野で培われてきた問題解決法を吸収しようとして努力しているところである。本稿をきっかけにして、異分野の方々からのご意見を伺ったり、さらなる共同研究に発展できれば幸いに思う。

謝辞

真貝は、本研究に関し、理化学研究所基礎科学特別研究員研究費、および文部科学省科学研究補助金若手研究(B) 課題番号 14740179 の交付を受けた。

参考文献

- [1] H. Shinkai and G. Yoneda, in *Progress in Astronomy and Astrophysics* (Nova Science Publ) to be published. 本稿の内容を、同業者向けに詳しく解説したレビュー。プレプリントサーバより取得可能。
(<http://xxx.lanl.gov/abs/gr-qc/0209111>).
- [2] L. Lehner, *Class. Quant. Grav.* **18**, R25 (2001). 数値相対論全体を広く浅く紹介したレビュー。
- [3] T.W. Baumgarte and S.L. Shapiro, *Phys. Rept.* **376**, 41 (2003). 連星中性子星問題を中心に数値相対論を解説したレビュー。
- [4] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, (Freeman, N.Y., 1973). 一般相対論の辞書的な教科書。
- [5] A. Abrahams, A. Anderson, Y. Choquet-Bruhat, and J.W. York, Jr., *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3377 (1995); *Class. Quant. Grav.* **14**, A9 (1997).
- [6] M. Alcubierre, *Phys. Rev. D* **55**, 5981 (1997).
- [7] M. Alcubierre and J. Massó, *Phys. Rev. D* **57**, R4511 (1998).
- [8] M. Alcubierre, G. Allen, B. Brügmann, E. Seidel and W-M. Suen, *Phys. Rev. D* **62**, 124011 (2000).
- [9] M. Alcubierre, W. Bengert, B. Brügmann, G. Lanfermann, L. Nerger, E. Seidel, and R. Takahashi, *Phys. Rev. Lett.* **87** 271103 (2001).
- [10] M. Alcubierre, B. Brügmann, T. Dramlitsch, J.A. Font, P. Papadopoulos, E. Seidel, N. Stergioulas, and R. Takahashi, *Phys. Rev. D* **62**, 044034 (2000).
- [11] A. Anderson, Y. Choquet-Bruhat, J.W. York, Jr., *Topol. Methods in Nonlinear Analysis*, **10**, 353 (1997).
- [12] A. Anderson and J. W. York, Jr, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4384 (1999).
- [13] R. Arnowitt, S. Deser and C.W. Misner, in *Gravitation: An Introduction to Current Research*, ed. by L.Witten, (Wiley, New York, 1962).
- [14] A. Ashtekar, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2244 (1986); *Phys. Rev.* **D36**, 1587 (1987).
- [15] T.W. Baumgarte and S.L. Shapiro, *Phys. Rev. D* **59**, 024007 (1999).
- [16] J.M. Bardeen, L.T. Buchman, *Phys. Rev. D.* **65**, 064037 (2002).
- [17] C. Bona, J. Massó, *Phys. Rev. D* **40**, 1022 (1989); *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1097 (1992).
- [18] C. Bona, J. Massó, E. Seidel and J. Stela, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 600 (1995); *Phys. Rev. D* **56**, 3405 (1997).
- [19] C. Bona, J. Massó, E. Seidel, and P. Walker, gr-qc/9804052.
- [20] O. Brodbeck, S. Frittelli, P. Hübner, and O.A. Reula, *J. Math. Phys.* **40**, 909 (1999).
- [21] G. Calabrese, J. Pullin, O. Sarbach, and M. Tiglio, *Phys. Rev. D* **66** 064011 (2002).
- [22] G. Calabrese, J. Pullin, O. Sarbach, and M. Tiglio, *Phys. Rev. D* **66**, 041501 (2002).
- [23] M.W. Choptuik, *Phys. Rev. D* **44**, 3124 (1991).
- [24] Y. Choquet-Bruhat and J.W. York, Jr., *C.R. Acad. Sc. Paris* **321**, Série I, 1089, (1995).
- [25] S. Detweiler, *Phys. Rev. D* **35**, 1095 (1987).
- [26] H. Friedrich, *Proc. Roy. Soc.* **A375**, 169 (1981); *ibid.* **A378**, 401 (1981).

- [27] S. Frittelli, Phys. Rev. D **55**, 5992 (1997).
- [28] S. Frittelli and R. Gomez, J. Math. Phys. **41**, 5535 (2000).
- [29] S. Frittelli and O.A. Reula, Phys. Rev. Lett. **76**, 4667 (1996).
- [30] R. Geroch, in *General Relativity*, ed. by G.S. Hall and J.R. Pulham (Institute of Physics Publishing, 1996), available as gr-qc/9602055.
- [31] S. D. Hern, PhD thesis, gr-qc/0004036.
- [32] S. Husa, in the Proceedings of the conference “The Conformal Structure of Spacetimes: Geometry, Analysis, Numerics”, ed. by J. Frauendiener and H. Friedrich, by Springer Verlag, Lecture Notes in Physics series), available as gr-qc/0204043; in the Proceedings of the 2001 Spanish Relativity meeting, eds. L. Fernandez and L. Gonzalez, to be published by Springer, Lecture Notes in Physics series), available as gr-qc/0204057.
- [33] L.E. Kidder, M.A. Scheel, S.A. Teukolsky, Phys. Rev. D **64**, 064017 (2001).
- [34] L. Lindblom and M. Scheel, gr-qc/0206035
- [35] Mexico Numerical Relativity Workshop 2002 participants, gr-qc/0305023.
- [36] T. Nakamura, K. Oohara and Y. Kojima, Prog. Theor. Phys. Suppl. **90**, 1 (1987).
- [37] T. Nakamura and K. Oohara, in *Frontiers in Numerical Relativity* edited by C.R. Evans, L.S. Finn, and D.W. Hobill (Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1989).
- [38] Proceedings of *Black Holes and Gravitational Waves* ed. by T. Nakamura and H. Kodama, as the issue of Prog. Theor. Phys. Suppl. **136** (1999).
- [39] O. Sarbach, G. Calabrese, J. Pullin, and M. Tiglio, Phys. Rev. D **66**, 064002 (2002).
- [40] M.A. Scheel, T.W. Baumgarte, G.B. Cook, S.L. Shapiro, S.A. Teukolsky, Phys. Rev. D **56**, 6320 (1997).
- [41] M.A. Scheel, T.W. Baumgarte, G.B. Cook, S.L. Shapiro, S.A. Teukolsky, Phys. Rev. D **58**, 044020 (1998).
- [42] M. Shibata and T. Nakamura, Phys. Rev. **D52**, 5428 (1995).
- [43] M. Shibata and K. Uryu, Prog. Theor. Phys. **107**, 265 (2002).
- [44] H. Shinkai and G. Yoneda, Phys. Rev. D **60**, 101502 (1999).
- [45] H. Shinkai and G. Yoneda, Class. Quant. Grav. **17**, 4799 (2000).
- [46] H. Shinkai and G. Yoneda, Class. Quant. Grav. **19**, 1027 (2002).
- [47] H. Shinkai and G. Yoneda, submitted to Gen. Rel. Grav. (2003).
- [48] F. Siebel and P. Hübner, Phys. Rev. D **64**, 024021 (2001).
- [49] L. Smarr, J.W. York, Jr., Phys. Rev. D **17**, 2529 (1978).
- [50] J.M. Stewart, Class. Quant. Grav. **15**, 2865 (1998).
- [51] S.A. Teukolsky, Phys. Rev. D **26**, 745 (1982).
- [52] H-J. Yo, T.W. Baumgarte and S.L. Shapiro, Phys. Rev. D **66**, 084026 (2002).
- [53] G. Yoneda and H. Shinkai, Phys. Rev. Lett. **82**, 263 (1999); Int. J. Mod. Phys. D. **9**, 13 (2000).
- [54] G. Yoneda and H. Shinkai, Class. Quant. Grav. **18**, 441 (2001).
- [55] G. Yoneda and H. Shinkai, Phys. Rev. D **63**, 124019 (2001).
- [56] G. Yoneda and H. Shinkai, Phys. Rev. D **66**, 124003 (2002).
- [57] G. Yoneda and H. Shinkai, Class. Quant. Grav. **20**, L31 (2003).
- [58] J.W. York, Jr., in *Sources of Gravitational Radiation*, ed. by L. Smarr, (Cambridge, 1979).

[1, 2, 3] は review, [4] は一般相対論の辞書的な教科書である。他はアルファベット順。