

アインシュタインが16歳のときに考えたこと
— 相対性理論とブラックホール入門 —

真貝寿明 (しんかいひさあき, 大阪工業大学)



1時間目

特殊相対性理論 (1905年)

アインシュタイン26歳

2時間目

一般相対性理論 (1915年)

アインシュタイン36歳





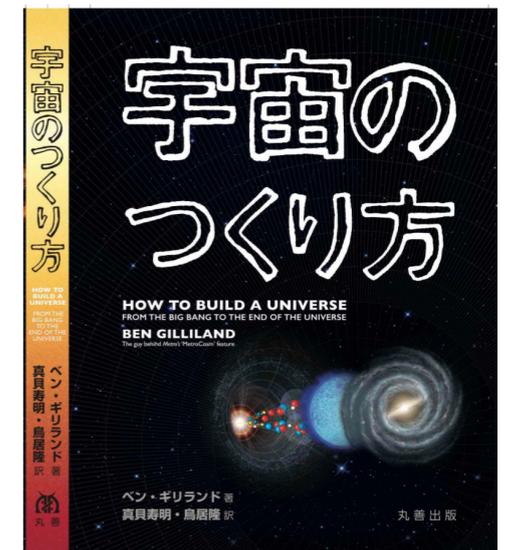
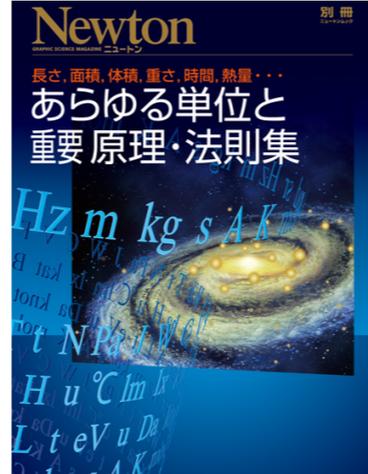
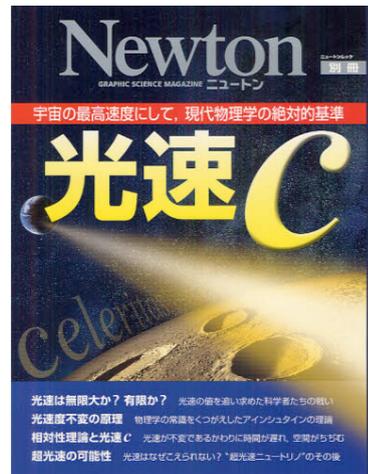
真貝寿明 (しんかい ひさあき)

大阪工業大学情報科学部 (枚方市北山)

<http://www.oit.ac.jp/is/~shinkai/>

相対性理論, ブラックホール, 重力波 を専門に研究.

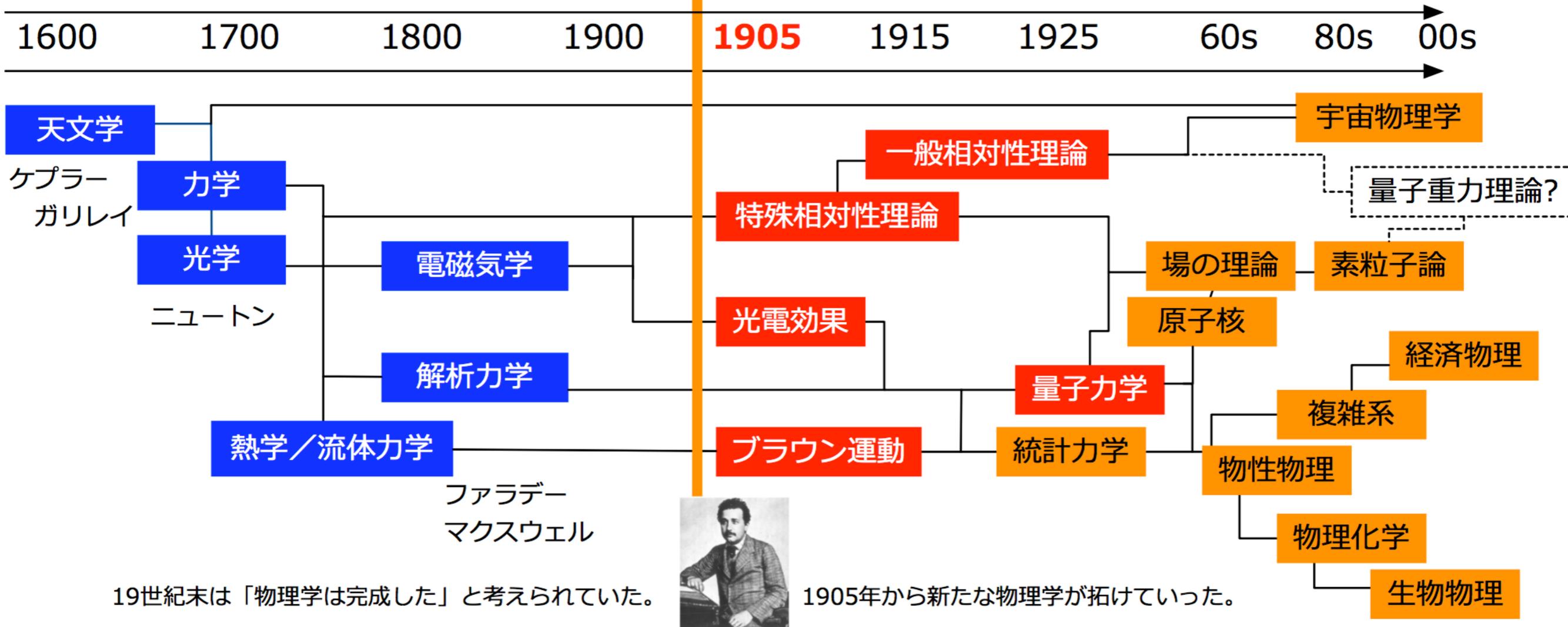
現在, 日本の重力波観測プロジェクトKAGEAの科学部門委員長



物理学は1905年で区切られる

近代物理学の進展

現代物理学の進展



1. 惑星は「だ円」を描く (1) ケプラーの法則

1.1 ケプラーの惑星運動の法則

ケプラーの惑星運動の法則 (1609年, 1618年)

- 第1法則 だ円軌道の法則
惑星は太陽を1つの焦点とするだ円軌道を描く。
- 第2法則 面積速度一定の法則
太陽と惑星を結ぶ線分が単位時間に描く扇形の面積 (面積速度) は、惑星それぞれについて一定である。
- 第3法則 調和の法則
惑星の公転周期 T の2乗と、惑星の描くだ円の長軸半径 (長軸の長さの半分) R の3乗の比 T^2/R^3 は、惑星によらず一定である。

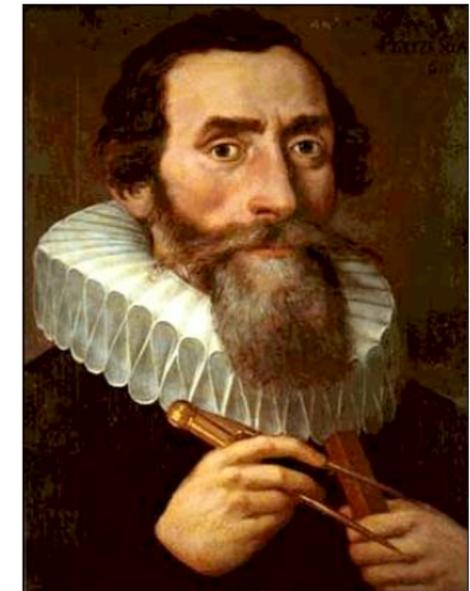


図1: ヨハネス・ケプラー (1571-1630)

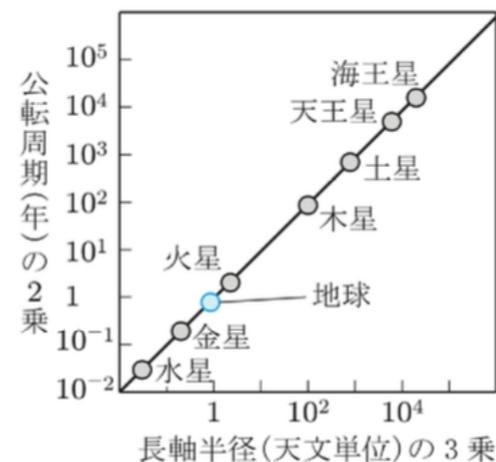
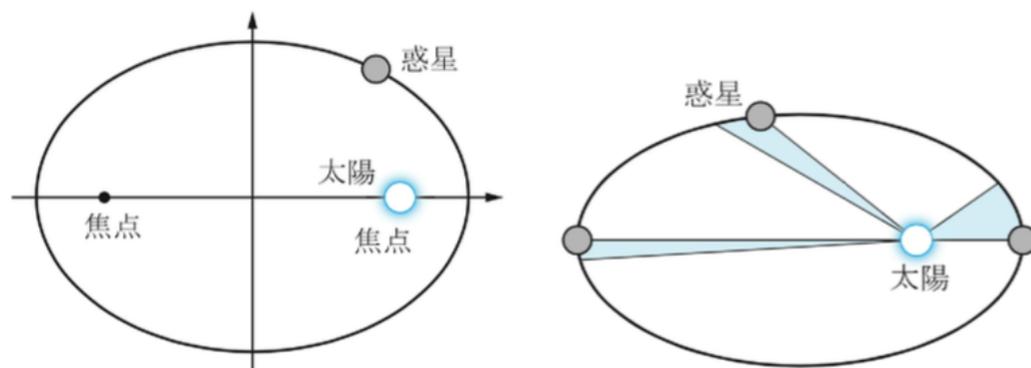


図3: ケプラーの惑星運動の法則

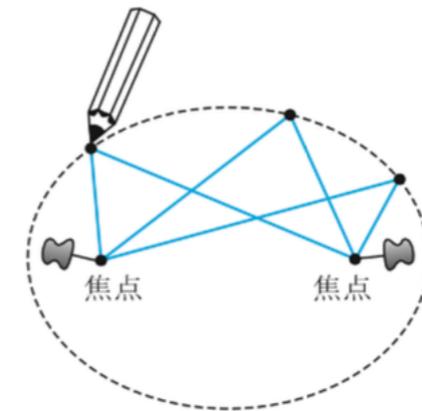


図2: 「だ円」は2つの焦点をもつ。

1. 惑星は「だ円」を描く (2) ニュートンの法則

1.2 ニュートンの運動法則

ニュートンの運動法則 (1687年)

- 第1法則 慣性の法則
何も力がはたらかなければ、物体は等速直線運動を続ける。
- 第2法則 運動の法則
力がはたらくと、物体には加速度が生じる。
- 第3法則 作用反作用の法則
一方に力を加えると、同じ大ききで逆向きの力が反作用として生じる。

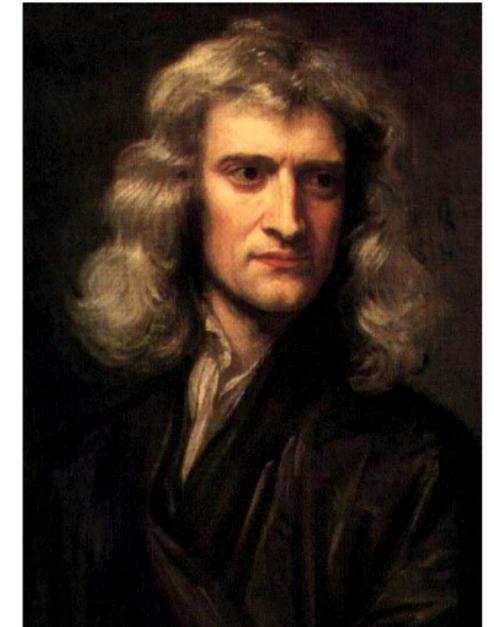


図4: アイザック・ニュートン (1642–1726)

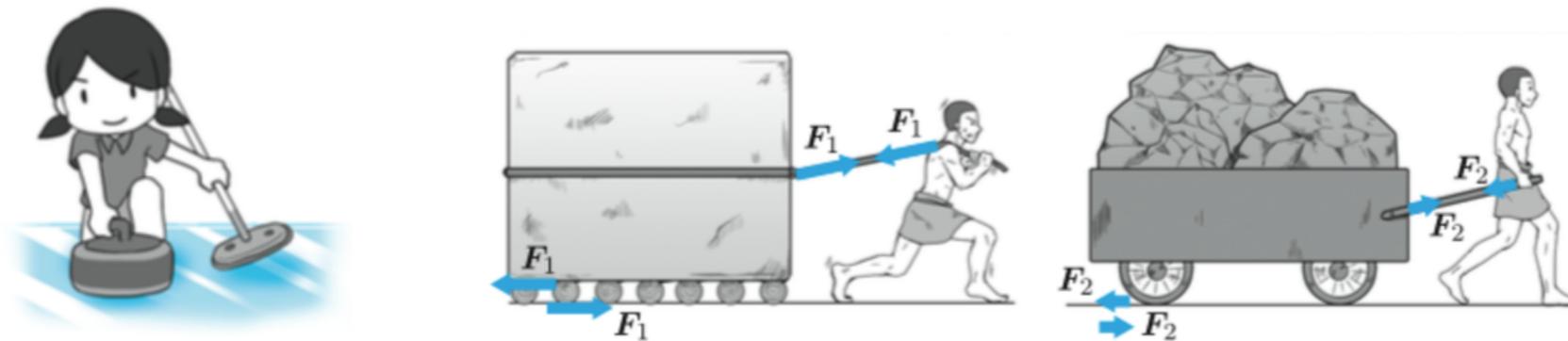


図5: (左) 慣性の法則. (右) 作用反作用の法則.

重力の正体は？



by Frits Ahlefeldt

<http://hikingartist.com/>



by Frits Ahlefeldt



amanaimages



by Frits Ahlefeldt



by Frits Ahlefeldt

by Frits Ahlefeldt

重力の正体は？



by Frits Ahlefeldt

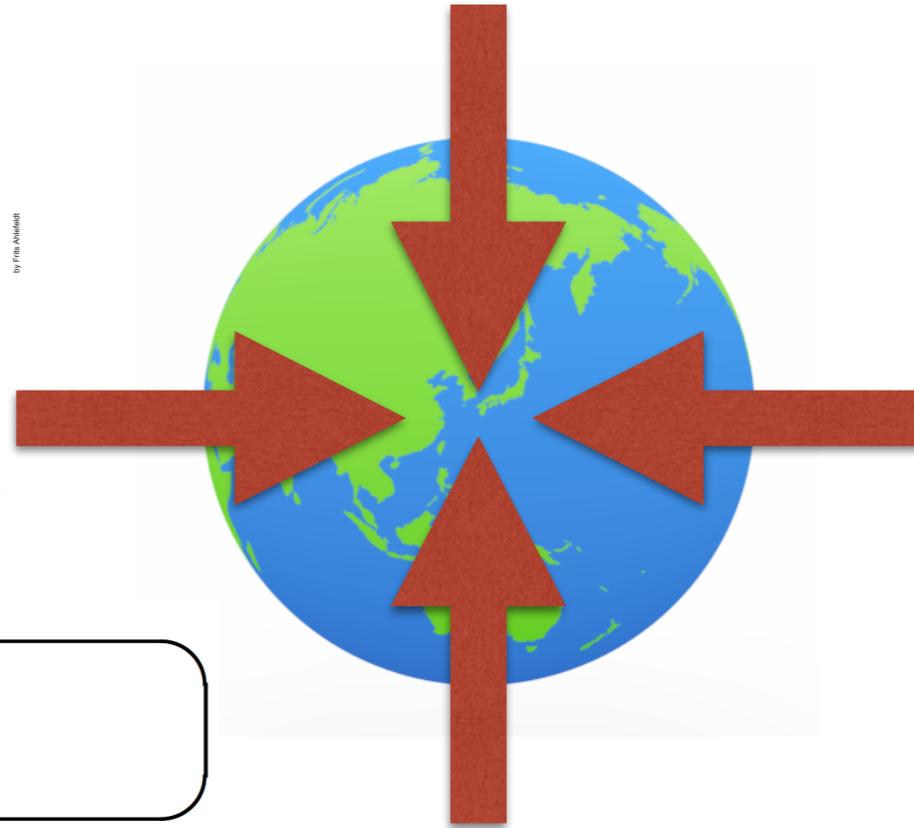
<http://hikingartist.com/>



by Frits Ahlefeldt



by Frits Ahlefeldt



by Frits Ahlefeldt

万有引力

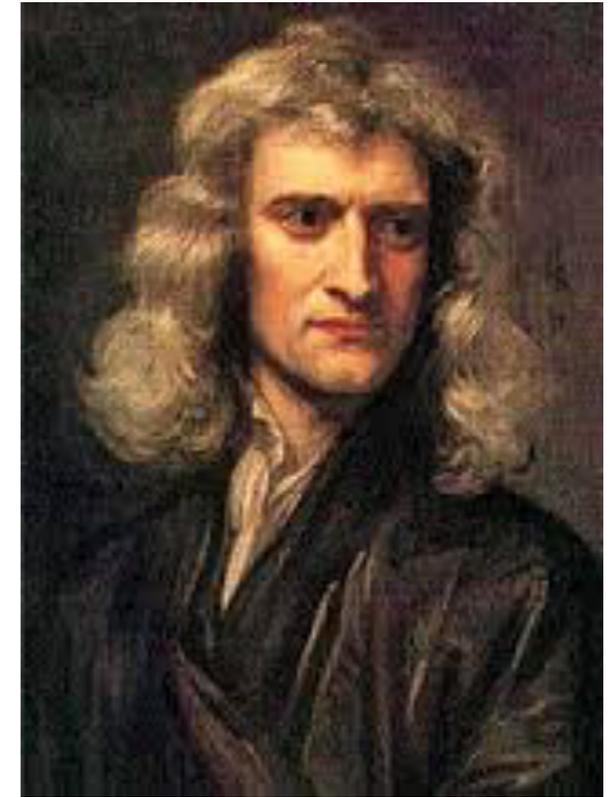
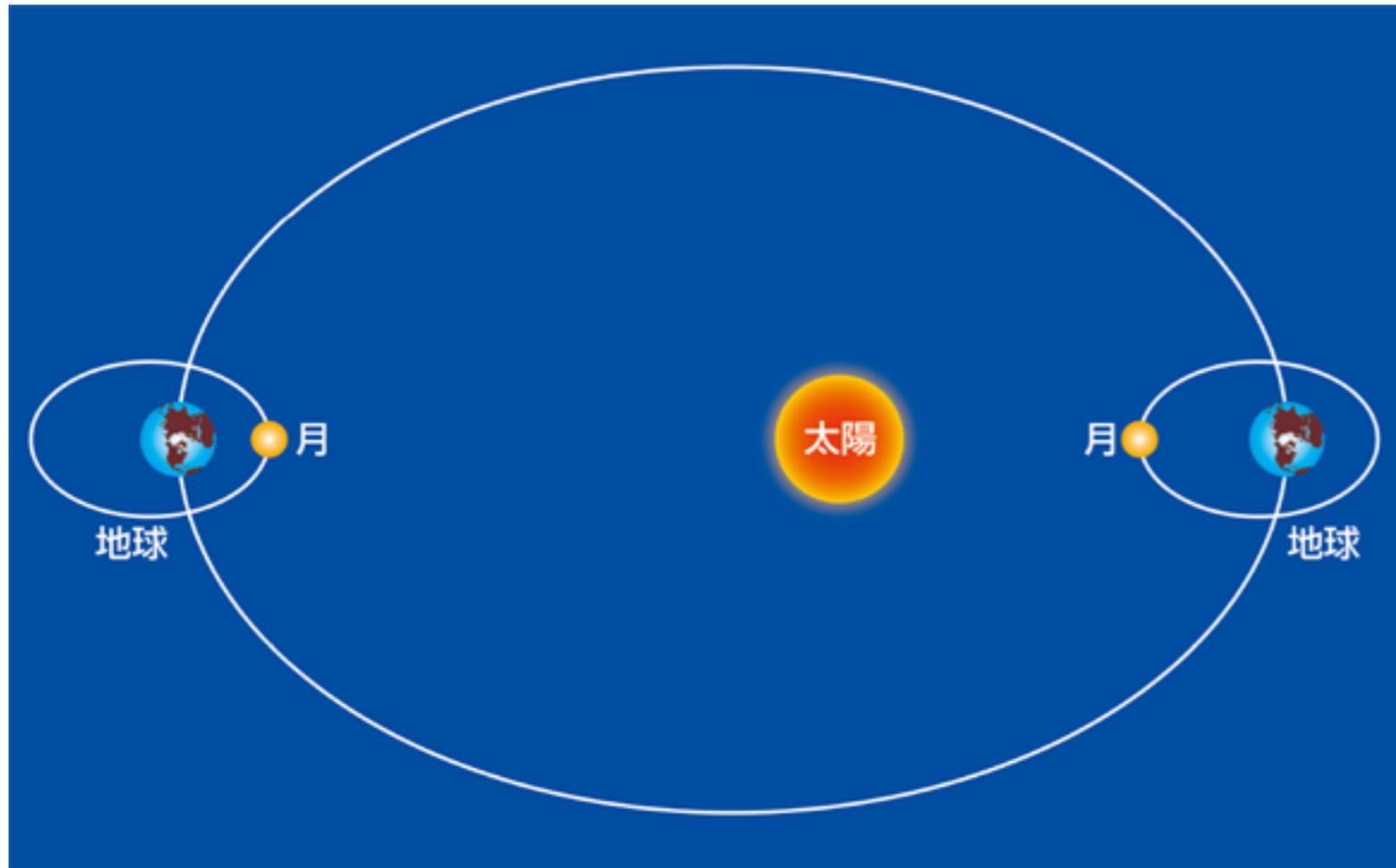
すべての物質は、たがいに引力を及ぼしあっている。

- リンゴも地球もお互いに引っ張り合っている。これが重力。
- 地球も月もお互いに引っ張り合っている。
- 太陽も地球もお互いに引っ張り合っている。



by Frits Ahlefeldt

重力の正体は？



ニュートン

万有引力

＝すべてのものは引力で引き合う

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

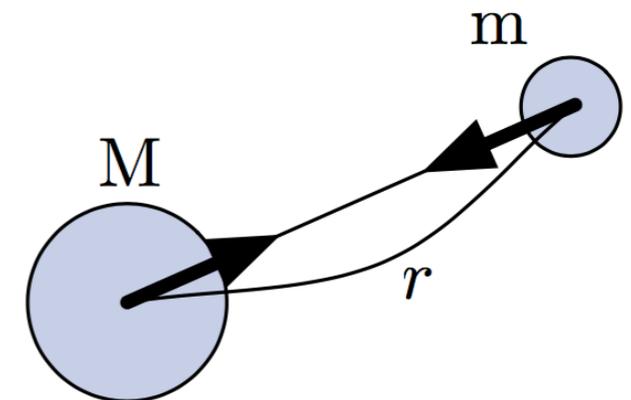
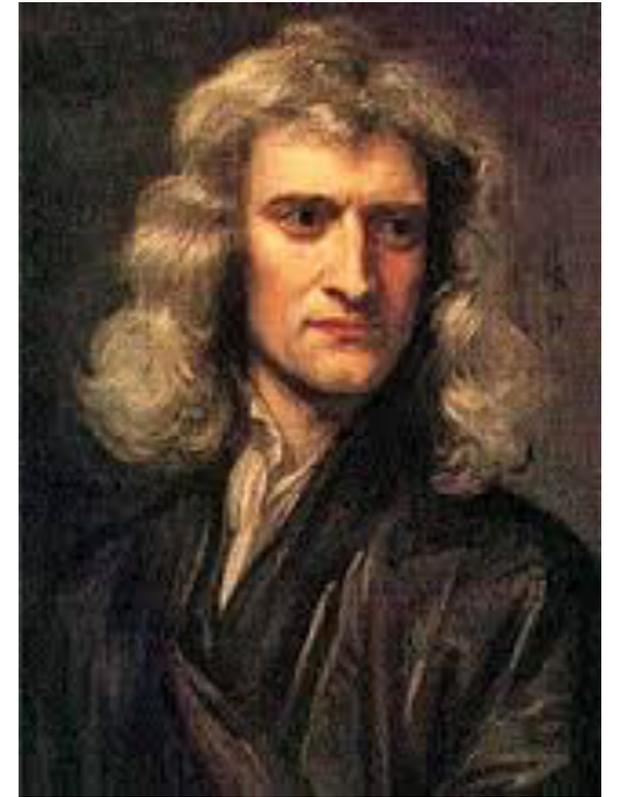
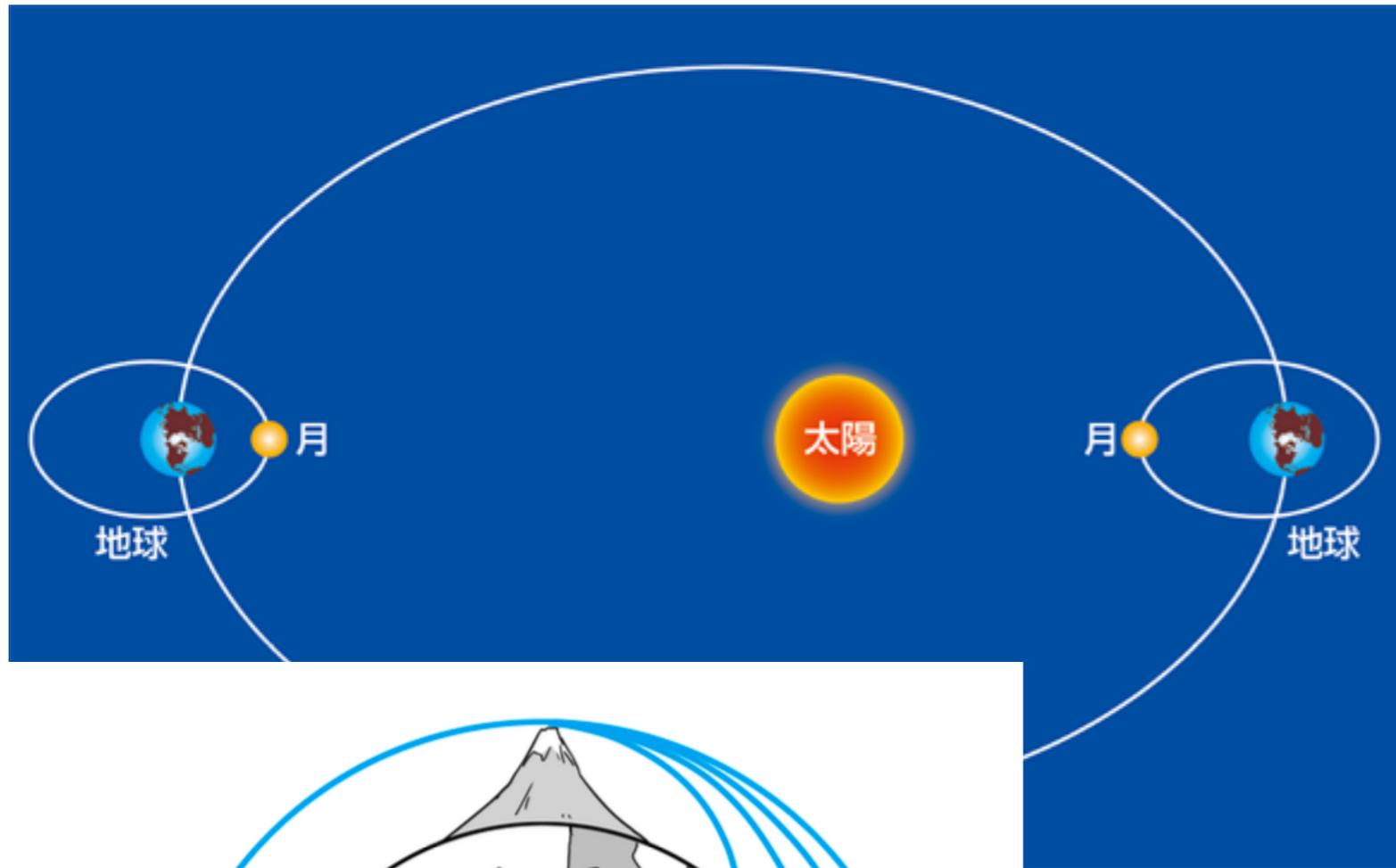


図 6: 万有引力の法則

万有引力があるなら，月はなぜ落ちてこない？



ニュートン

ニュートンの運動法則から出てくる保存則 (1)

(A) 運動量保存則

衝突の前後では、全体の運動量は保存する。



$$\text{運動量} = \text{質量} \times \text{速度}, \quad p = m \times v$$

図 9: 氷の上で、太った人とやせた人がお互いに相手を押し出すと... ?

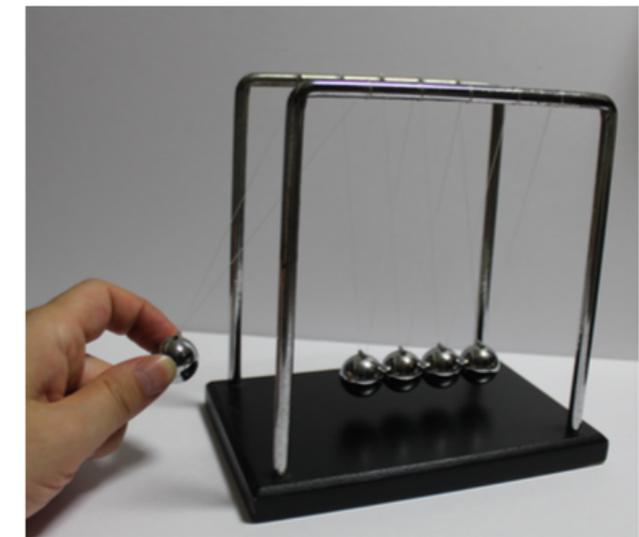


図 8: ニュートンのゆりかご

ニュートンの運動法則から出てくる保存則 (2)

(B) エネルギー保存則

位置エネルギーと運動エネルギーの合計は一定である。

$$mgh_0 + 0 = mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = 0 + \frac{1}{2}mv_3^2$$

位置エネルギー + 運動エネルギー = 一定

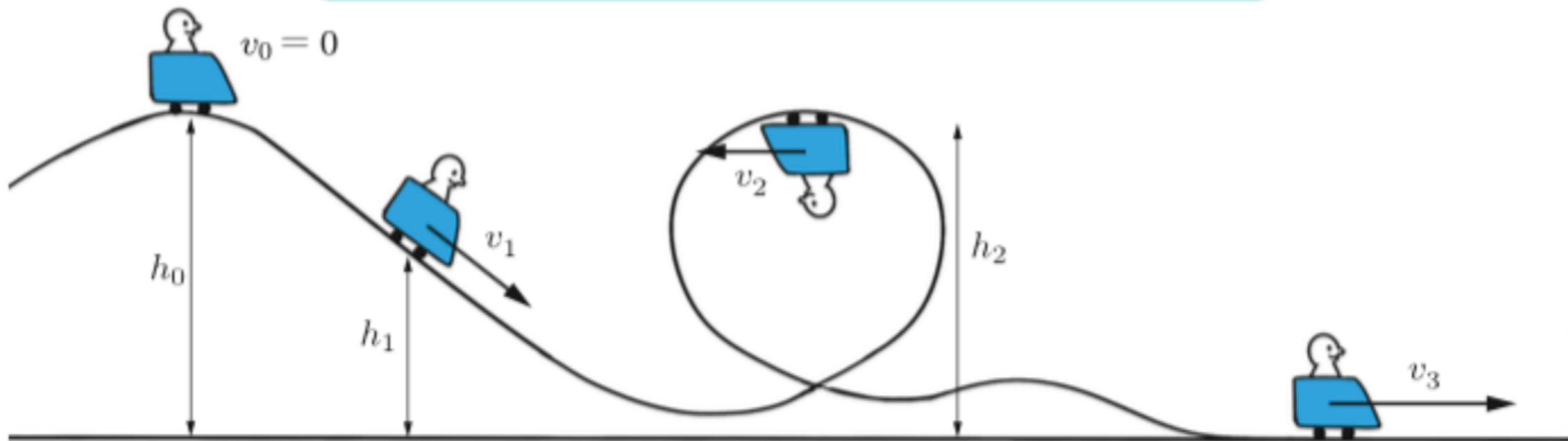


図 10: ジェットコースターは、はじめに一番高いところまで引き上げられて、あとはすべりおりのだけ。

ニュートンの運動法則から出てくる保存則 (3)

(C) 角運動量保存則

回転しようとする運動量 (角運動量) は, 保存する.

- 角運動量 = 半径 × 質量 × 速度, $L = r \times m \times v$
- ケプラーの面積速度一定の法則は, 角運動量の保存則だった.

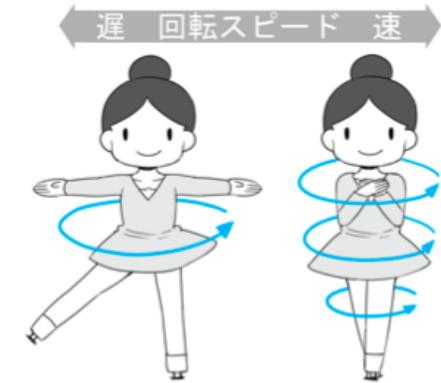


図 11: フィギュアスケートの回転. はじめに大きく手を広げ, あとは手を体につけるとはやく回る.

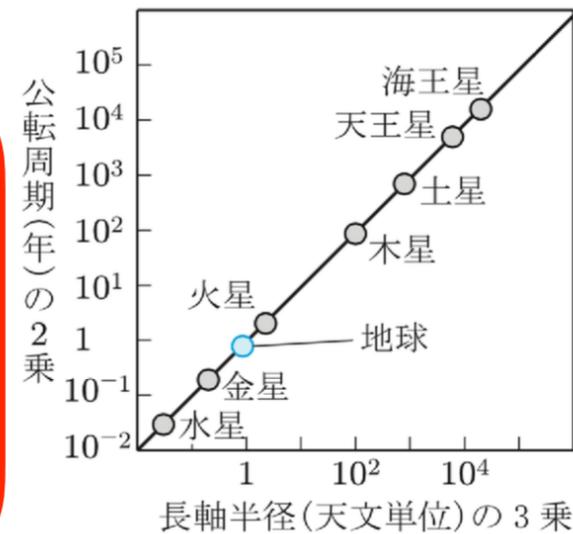
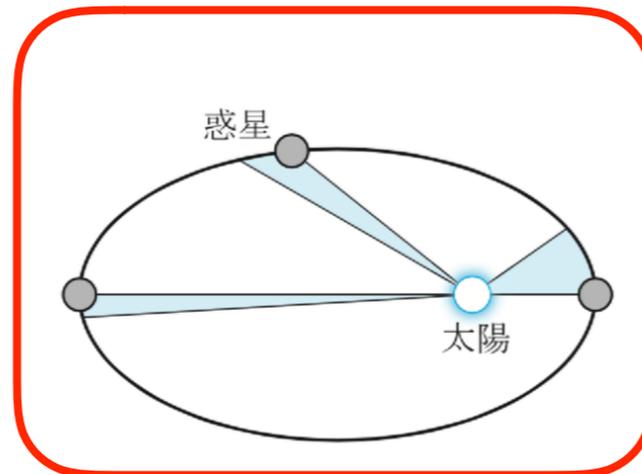
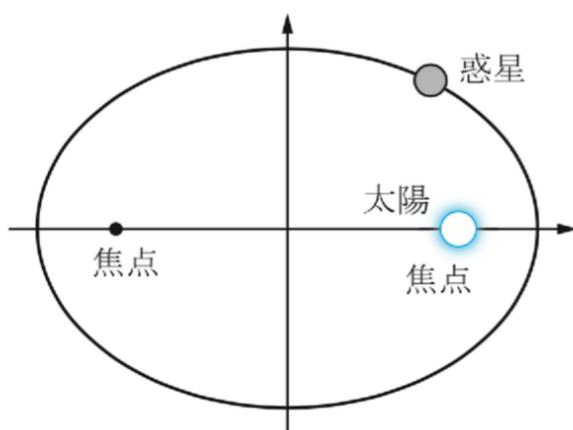
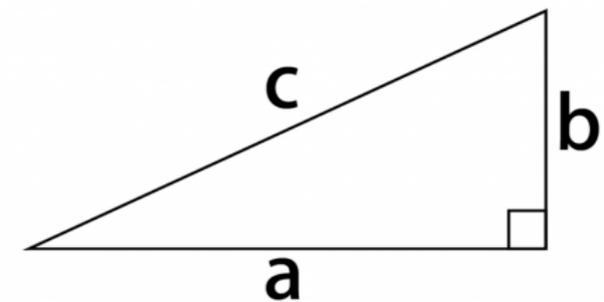


図 3: ケプラーの惑星運動の法則

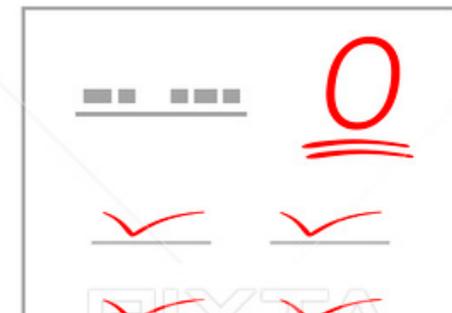
2. アインシュタインの考えたこと

2.1 若いころのアインシュタイン

- アルベルト・アインシュタインは、1879年3月14日、ドイツ南部の中都市ウルムで、父ヘルマン、母パウリーネの長男として生まれた。2歳下には妹マヤが生まれた。
- 4歳か5歳の頃、父親から方位磁石を見せられて、磁石の針がいつも決まった方向を向いていることに非常に興味を持った。ものごとの背後には深く隠された何かがあるにちがいない、という考えをこのときに持ったそうだ。
- また、「ピタゴラスの定理」について説明されたときには、この定理をなんとか自分で証明しようと努力し、ついに証明方法の1つを発見したという。証明できた達成感が、楽しさになったそうだ。12歳でユークリッドの『平面幾何学』の本に出会ったときには、幾何学の「明瞭さと正確さ」に深い感銘を受けたという。
- 数学と科学は得意だったが、それ以外は苦手だった。高校生のとき、とても優秀だったので、大学の入試を特別に受けさせてもらった。結果は数学と科学は十分に合格点だったが、歴史・地理・国語の得点が足りずに不合格となる。浪人一年。



$$c^2 = a^2 + b^2$$



2. アインシュタインの考えたこと

■ 16歳のときの疑問

光のはやさで飛べることができたら、自分の目の前に置いた鏡に自分の顔が映るのだろうか？ 16歳のときに、ふと考えたこの疑問が、10年後に相対性理論となる。



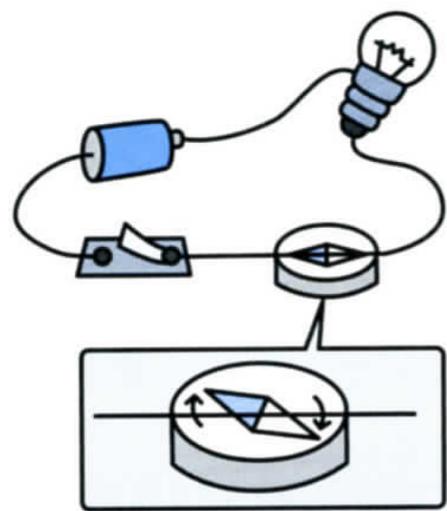
NHK 100分で名著のwebページより.

http://www.nhk.or.jp/meicho/famousbook/17_einstein/index.html#box01

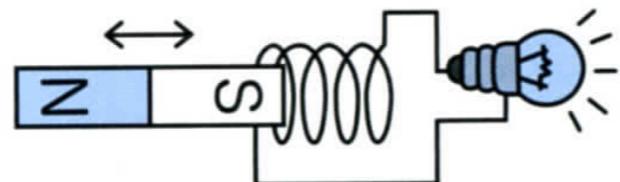
図 12: 光のはやさで飛べることができたら、自分の目の前に置いた鏡に自分の顔が映るのだろうか？

2.2 アインシュタインの考えたこと: 特殊相対性理論

電気と磁気のなぞ



電流が流れると方位磁針の針が振れる。



ファラデー

コイルに磁石を出し入れすると電流が流れるぞ。

電磁誘導現象の発見 (1831年)

電気力と磁石の力は関係しあうから「電磁気学」としてまとめよう。

電磁気現象を説明する「マクスウェルの方程式」を完成させ (1864年)、電場と磁場が互いに作用して電磁波として伝わることを示す。



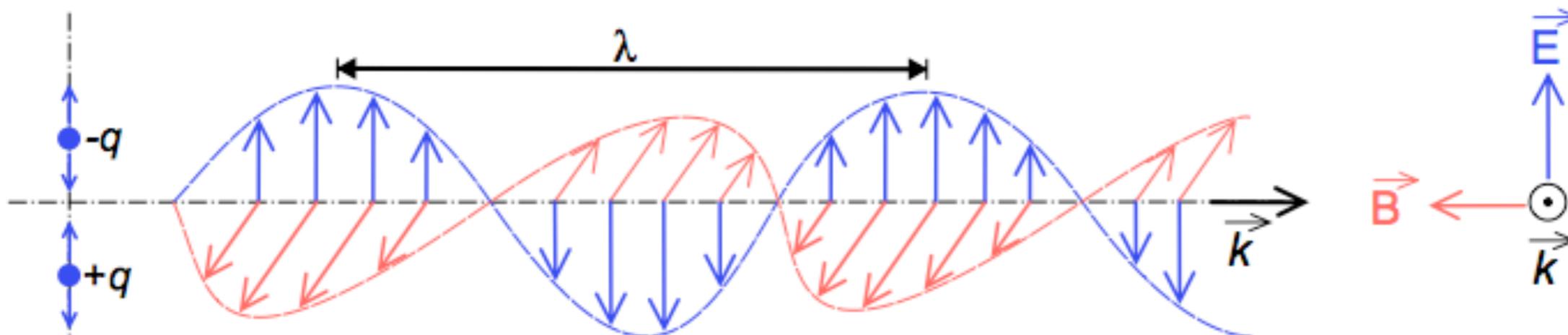
マクスウェル

電磁波は確かに光の速さで伝わっていた。



ヘルツ

電磁波 (電波) の受発信に成功し、光の電磁波説を実証する (1888年)



マクスウェルの方程式 (1864)



Figure 12: James C. Maxwell (1831-1879)

電磁気学の基本方程式

次の4本の方程式から成り立つ。 \mathbf{E} は電場ベクトル, \mathbf{B} は磁場ベクトル, ρ は電荷密度, \mathbf{j} は電流ベクトル, c は光速とする。また, ∇ は微分演算子とする。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (2.20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.21)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (2.22)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.23)$$

具体的には, 各ベクトルは

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}, \quad \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

などと書け, \cdot と \times はベクトルの内積と外積を表す。したがって,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

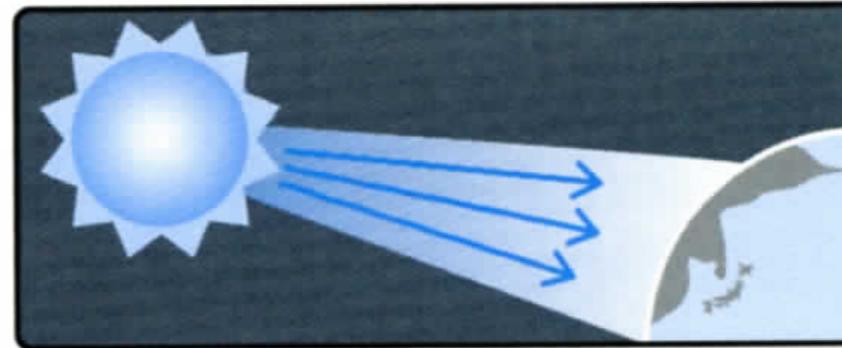
などとなる。

電気と磁気のなぞ

疑問1 電磁波を伝えるもの(媒質)は何か?



音波は空気中の分子の振動が伝える。



電磁波(光)は真空中を満たす未知の媒質エーテルが伝える?

疑問2 電磁波が伝わる速度が「光速」であるとは、誰から見た時の光速なのか?



時速140km



時速120km

車中の人からはパトカーの速度は時速20kmに見える。
(速度は相対的なもの)

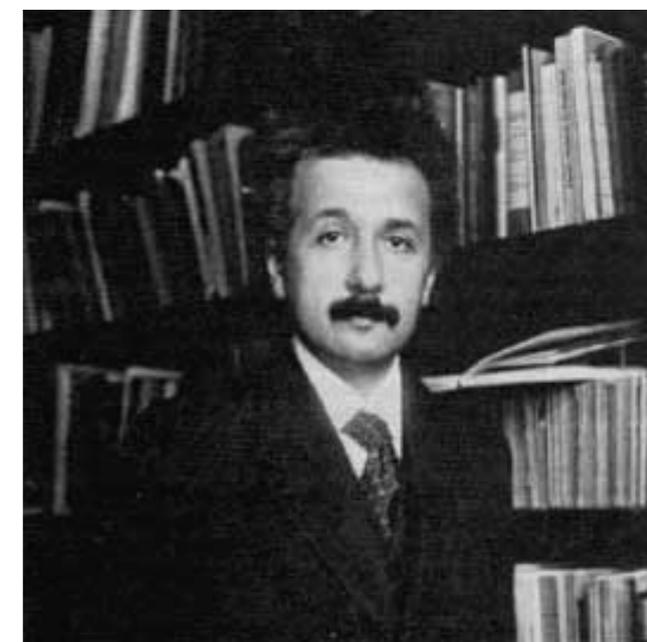
2.2 アインシュタインの考えたこと: 特殊相対性理論

アインシュタインの提案

アインシュタインは、『動いている物体の電気力学』というタイトルの1905年の論文で、次の2つの簡単な仮定によって電磁気学の問題が説明できることを示した。

特殊相対性原理

- (a) 相対性原理：物理法則は、どのように運動をする人からみても（どのような座標系から見ても）同じ形にならなくてはいけない。
- (b) 光速度一定の原理：真空中の光の速度は、どのような座標系から見ても同じである。



この仮定をすれば、確かに誰からみても光の速度は一定なので、方程式は正しいことになる。しかし、私たちの日常の感覚とは違う話になる。

疑問2

電磁波が伝わる速度が「光速」であるとは、誰から見た時の光速なのか？



「誰から見ても、光速は同じ」と考えれば、何も問題はない。

速度のたし算は、 $v_1 + v_2$ ではない

■ 速度のたし算

「どのような座標系から見ても光速は同じである」という原理は、日常の感覚からは信じがたいが、そうなるような新しい速度の足し算をアインシュタインは提案した。

ニュートンの力学では、 v_1 の速度で動く電車の中で、 v_2 の速度でボールを投げた場合、ボールの速度を地上から見ると $v_1 + v_2$ になる。これは我々が日常的に正しいと思っている速度の足し算である。光の速度 c で飛ぶロケットが進行方向に光を出したら、 $2c$ の速度の光になりそうである。

しかし、相対性理論では、速度の足し算は $v_1 + v_2$ ではなく、

$$v_1 \text{ と } v_2 \text{ の和は、 } \frac{v_1 + v_2}{1 + (v_1 \times v_2 / c^2)} \text{ となる}$$

と結論する。

速度のたし算は, v_1+v_2 ではない

v_1 と v_2 の和は, $\frac{v_1 + v_2}{1 + (v_1 \times v_2/c^2)}$ となる

v_1	v_2	v_1+v_2	$\frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 \times v_2}$
0.001	0.001		
0.01	0.01		
0.10	0.10		
0.90	0.90		
0.99	0.99		
1	1		

速度のたし算は, v_1+v_2 ではない

v_1 と v_2 の和は, $\frac{v_1 + v_2}{1 + (v_1 \times v_2/c^2)}$ となる

v_1	v_2	v_1+v_2	$\frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 \times v_2}$
0.001	0.001	0.002	0.001999
0.01	0.01		
0.10	0.10		
0.90	0.90		
0.99	0.99		
1	1		

速度のたし算は, v_1+v_2 ではない

v_1 と v_2 の和は, $\frac{v_1 + v_2}{1 + (v_1 \times v_2/c^2)}$ となる

v_1	v_2	v_1+v_2	$\frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 \times v_2}$
0.001	0.001	0.002	0.001999
0.01	0.01	0.02	0.01999
0.10	0.10	0.20	0.1980
0.90	0.90	1.80	0.9945
0.99	0.99	1.98	0.999949
1	1	2.00	1.00

これまでの物理学を否定せず、拡張した理論！

特殊相対性理論

光の速さに近い場合の力学

「時間の進み方は観測者によって異なる」

ニュートン力学

$$F = ma$$

2. アインシュタインの考えたこと

■ 16歳のときの疑問

光のはやさで飛べることができたら、自分の目の前に置いた鏡に自分の顔が映るのだろうか？ 16歳のときに、ふと考えたこの疑問が、10年後に相対性理論となる。

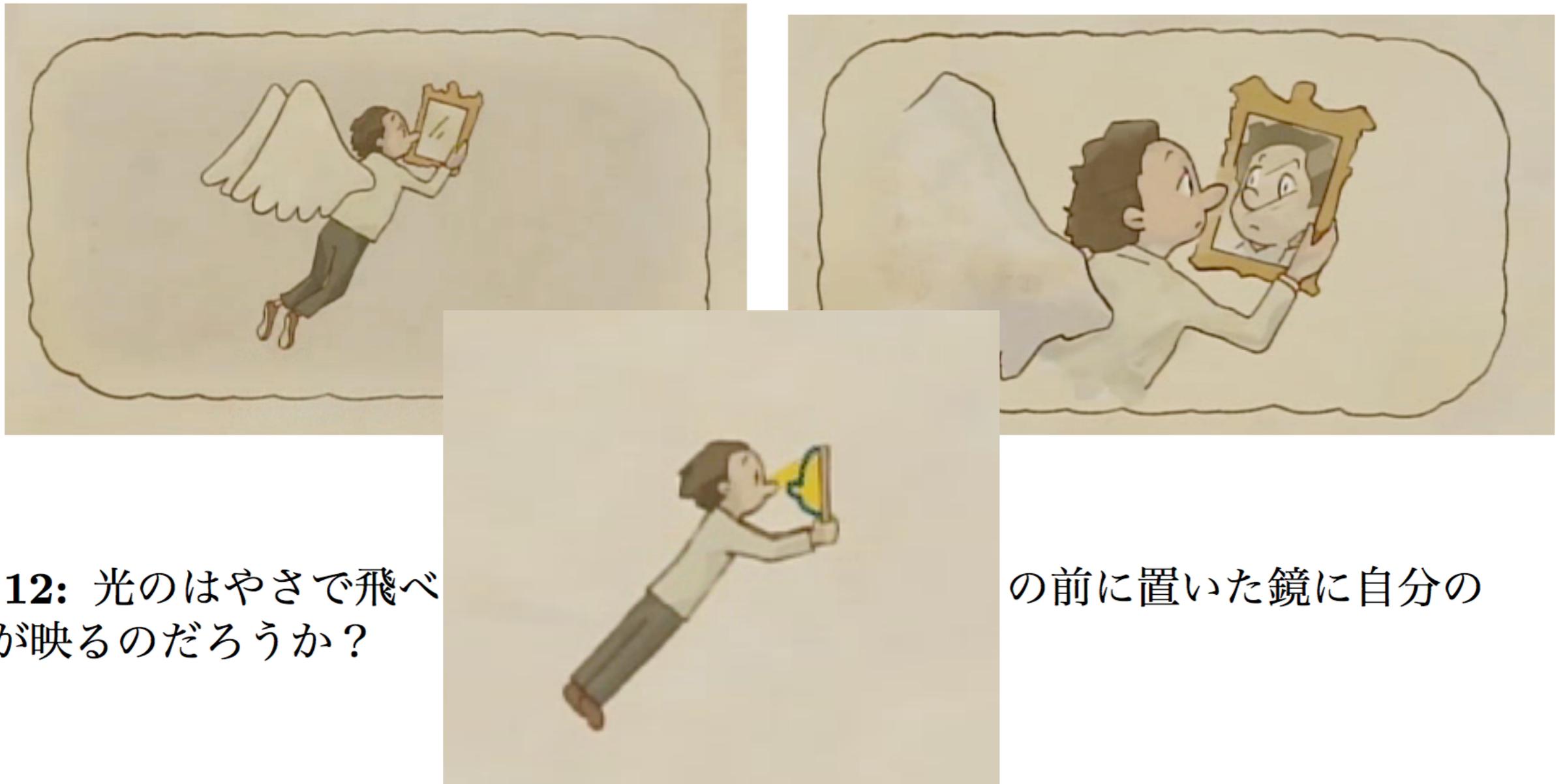
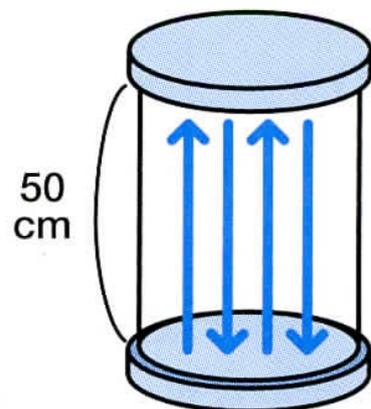


図 12: 光のはやさで飛べ
顔が映るのだろうか？

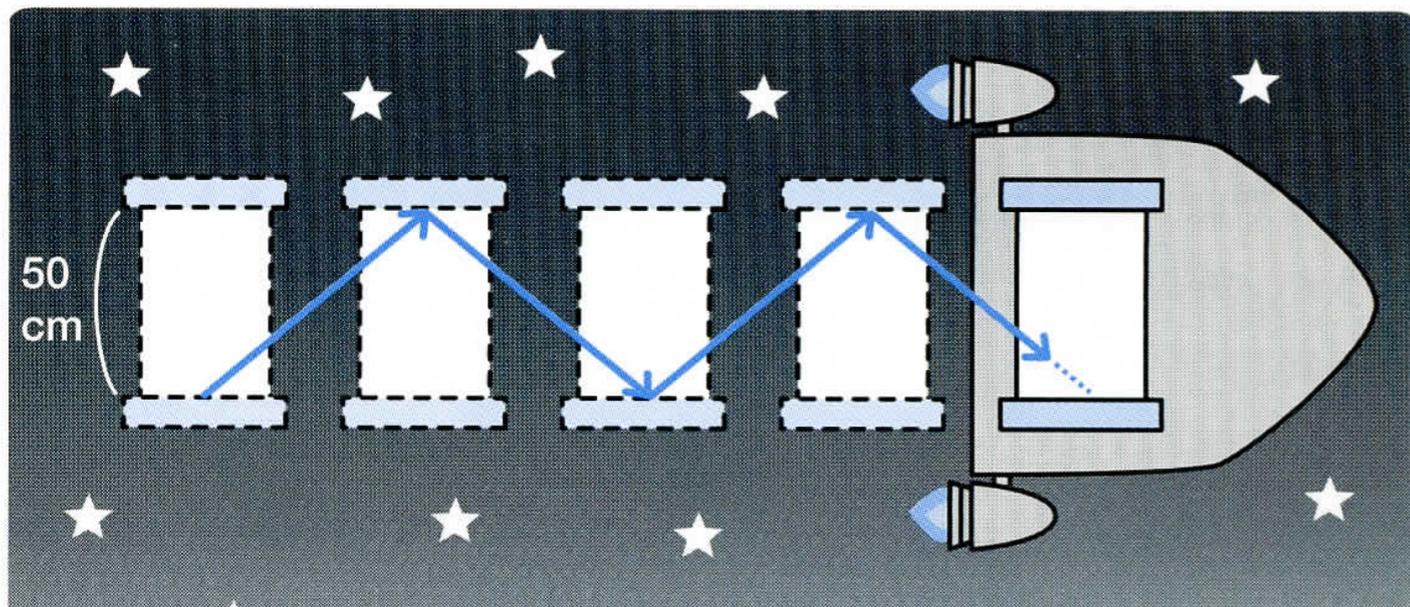
の前に置いた鏡に自分の

光速一定を認めると、時間の進み方が相対的になる



光時計

光が2億9979万2458回往復すると「1秒」を刻む時計



地球の人がロケット内の光時計を見ると、ロケットが移動するので光は斜めの経路を進み、その分長い距離を進まなければならない。光の速度は誰から見ても一定なので、ロケット内の光時計は2億9979万2458回往復するのに地球の1秒より長い時間がかかる。つまりロケット内の光時計はゆっくりと時を刻んでいる。

動いている状態ほど
時間の進み方が遅くなる

光時計の不思議

NHK 100分de名著「相対性理論」第2回 (2012年)

2:30'

未来へ行こう！

$$\Delta T' = \sqrt{1 - (v/c)^2} \Delta T$$

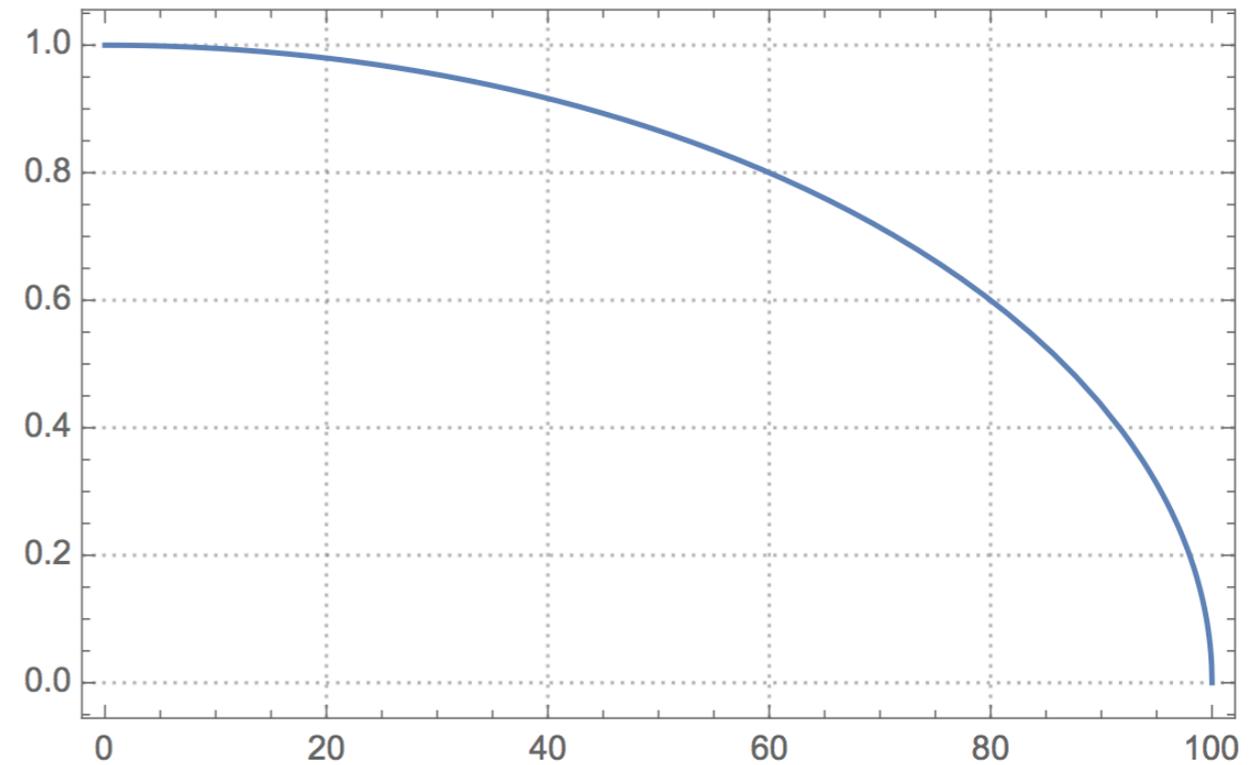
速度 v で動く人の
時計の進み

地球の時計で測る
時間 = たとえば1時間

表 1

v	$\sqrt{1 - (v/c)^2}$
$0.1 c$	0.99499
$0.5 c$	0.86603
$0.9 c$	0.43589
$0.99c$	0.14107
$0.999c$	
$0.9999c$	

静止している時計に対する時間の進み方
(静止系から見た時間の遅れ)



移動する速度 (光速を100とする)

国際宇宙ステーションの乗務員の寿命も延びる！



ISSは秒速 7.8km

1年間乗務すると, . . .

0.01067秒 地表より時間が短くなる

旅客機の乗務員の寿命も延びる！

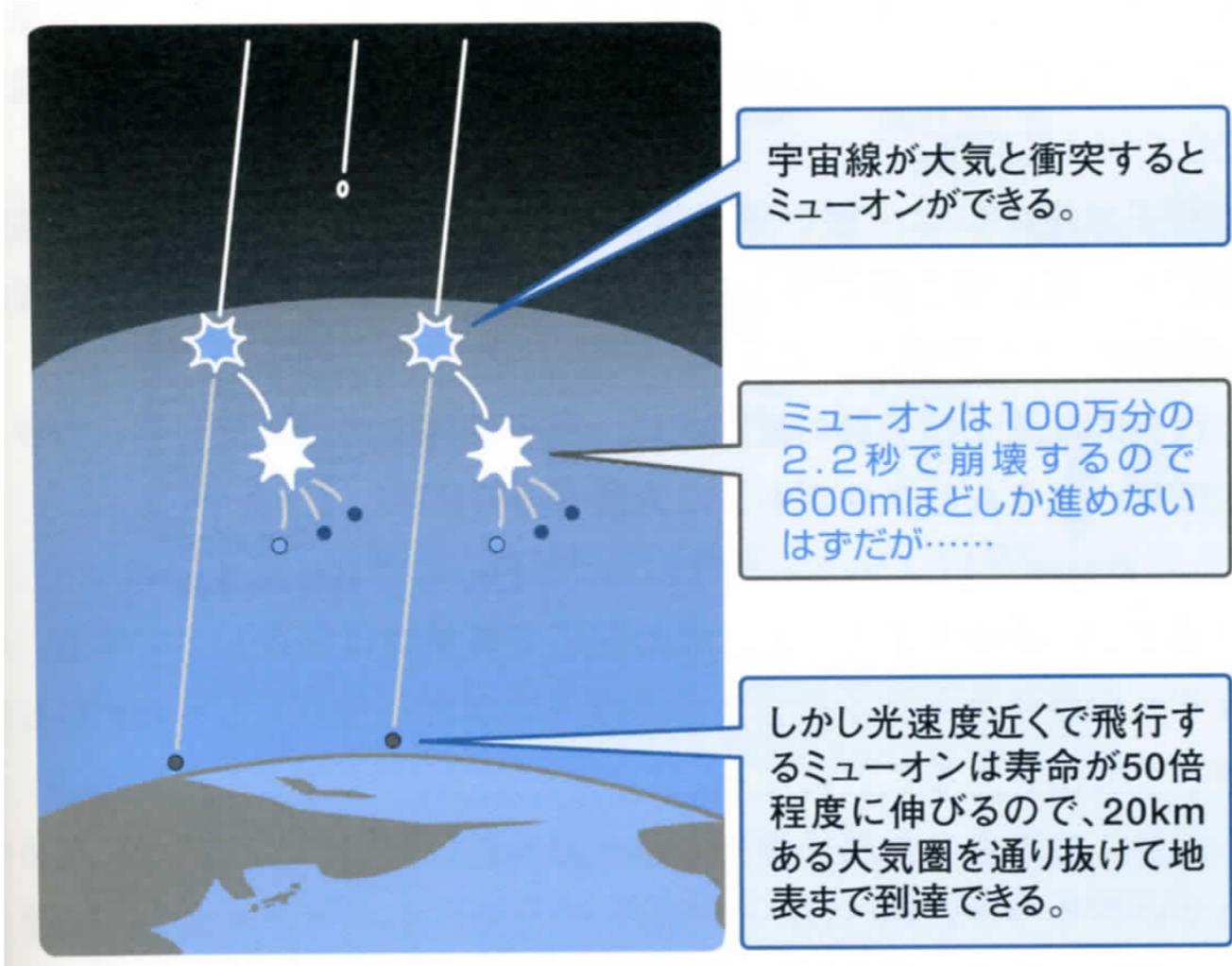
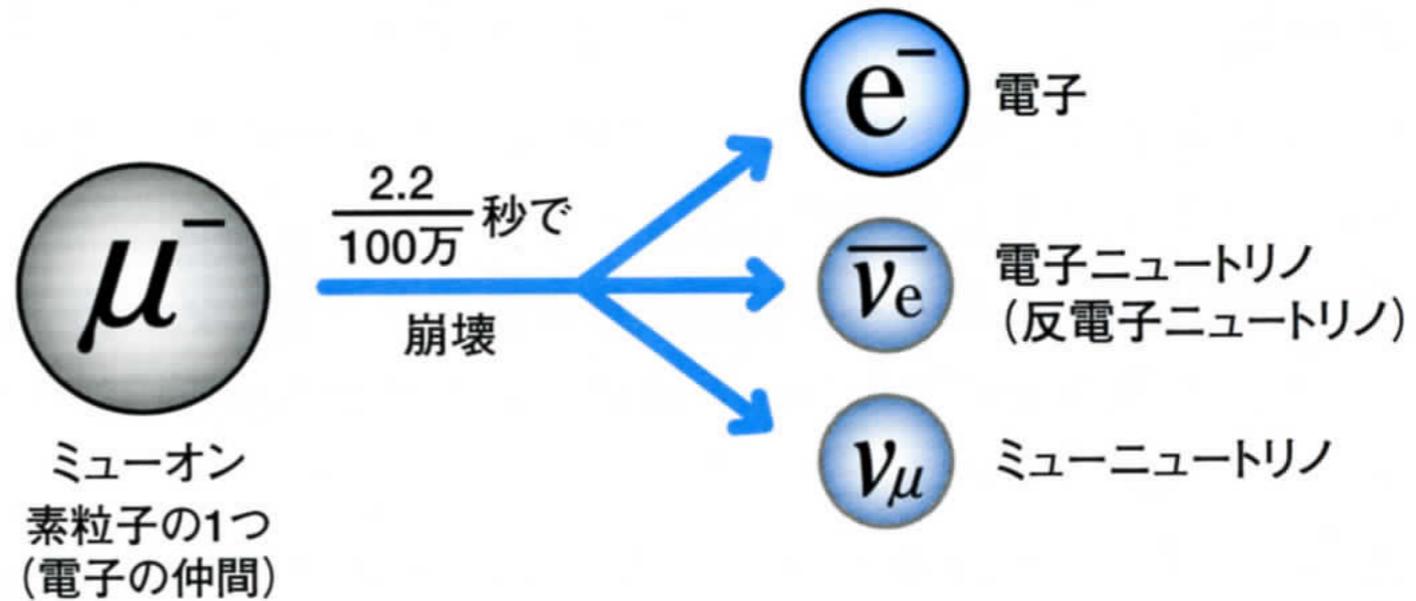


旅客機は時速900km (秒速 250 m)

10000時間乗務すると, . . .

0.000012517秒地表より時間が短くなる

素粒子の寿命は確かに延びている！



ウラシマ効果, 竜宮城はロケットだった?



- 「水の江の浦の島子を詠める一首」(万葉集 卷九 1740-41)
……家ゆ出でて 三歳の間に 垣もなく 家滅せめやと……

3年間竜宮城にいる間に, 300年も経っていた.

$$300 \text{ year} = \int_0^3 \text{year} \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} dt \implies v = 0.9999499c$$

竜宮城は光速の99.995%で動いていた.

もっとも有名な物理の公式

$$E = mc^2$$

エネルギー

質量 x 光速 x 光速

Energy = mass

質量とエネルギーは等価である。

質量が消えると、ばく大なエネルギーに変わる

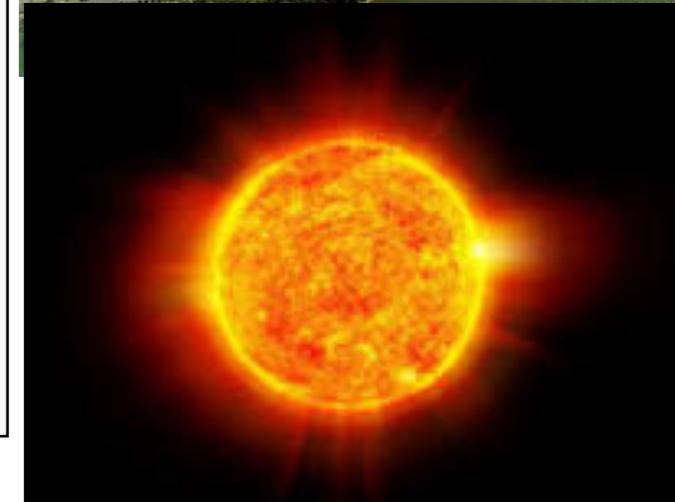
$$\frac{dp^i}{dt} = F^i$$

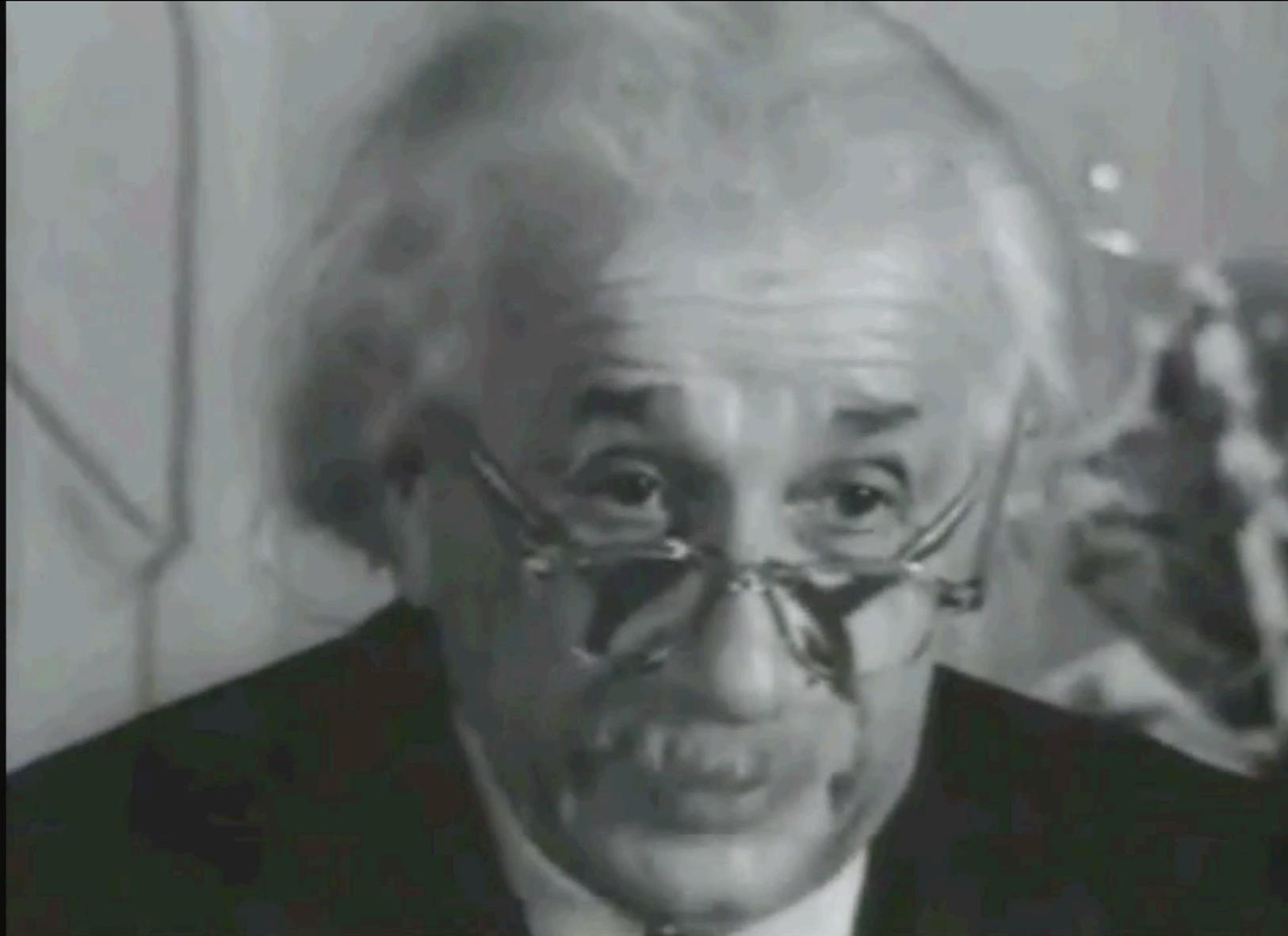
($ma = F$)



$$\frac{dp^i}{d\tau} = f^i$$

$$E \equiv mc^2 \frac{dt}{d\tau} = m \frac{c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$
$$= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \dots$$





$E = mc^2$ by Albert Einstein himself

It followed from the special theory of relativity that mass and energy are both but different manifestations of the same thing — a somewhat unfamiliar conception for the average mind.

Furthermore, the equation $E = mc^2$, in which energy is put equal to mass, multiplied by the square of the velocity of light, showed that very small amounts of mass may be converted into a very large amount of energy and vice versa.

The mass and energy were in fact equivalent, according to the formula mentioned before.

This was demonstrated by Cockcroft and Walton in 1932, experimentally.

ここまでのまとめ

- **電気と磁気の法則：**

光速 c が登場していたが、誰から見た速度なのか？

- **アインシュタインの考え（特殊相対性理論）：**

物理法則はシンプルなもの。

光速は誰から見ても一定と考えよう。

- **光速を一定と考えると、時間の進み方が、**

観測する人の状態で変わってくる。

未来へ行ける！

一般相対性理論

強い重力場での時空の力学

「空間が歪むのが重力の正体である」

特殊相対性理論

光の速さに近い場合の力学

「時間の進み方は観測者によって異なる」

ニュートン力学

$$F = ma$$