

微積分学 I (1 年) 定期試験 (2008 年 7 月 31 日)

【重要】 答案は、別紙の答案用紙に記入すること。問題用紙は回収しない。
解答は所定の解答欄に記入し、小問題の番号を記載すること。
答案には答えだけでなく、導出の過程も記すこと。

問題 1 (1)–(3) を求め、(4), (5) に答えよ。

(1) $\frac{d}{dx} \left(6 \sin x + 5 \cos x + 4x^3 + 2 + \frac{1}{x} \right)$

(2) $\frac{d}{dx} (4\sqrt{x} + e^{-3x} + \log 2x + \tan x)$ (ただし、 $x > 0$)

(3) $\frac{d}{dx} (x^3 \log x)$ (ただし、 $x > 0$)

(4) ライブニッツの公式

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

を利用して、 $\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - x) \sin x$ を求めよ。

(5) 増減表を作成して、 $y = xe^x$ のグラフを描け。グラフ中には極値の値も記入せよ。
ただし、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ である。

問題 2 以下の (1)–(5) を求めよ。

(1) $\int \left(6 \sin x + 5 \cos x + 4x^3 + 2 + \frac{1}{x} \right) dx$

(2) $\int \left(4\sqrt{x} + e^{-3x} + \frac{\sin x}{\cos x} \right) dx$

(3) $\int x^3 \log x dx$ (部分積分)

(4) $\int \frac{dx}{x^2 - 4}$ (部分分数)

(5) $\int_0^{a/2} \sqrt{a^2 - x^2} dx$ (置換積分)

問題 3 関数 $f(x)$ の $x = a$ におけるテーラー展開が、次式で表されることを利用して、次の問いに答えよ。

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

(1) $\cos x$ を $x = 0$ のまわりでテーラー展開 (マクローリン展開) し、6 次の項まで示せ。

(2) e^{3x} をマクローリン展開せよ。

(3) $\frac{1}{1-x}$ (ただし、 $|x| < 1$) をマクローリン展開せよ。

問題 4 2 問を選択して答えよ。

(1) $f(x, y) = x^3 - 3axy - y^2$ (a は定数) の 2 次偏導関数をすべて求めよ。

(2) $z = \sin(x - y)$, $x = u^2 + v^2$, $y = 2uv$ とする。合成関数の微分を用いて、 z_u, z_v を求めよ。

(3) $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とする。 x, y の r, θ に関するヤコビアン $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ。