3 C プログラムを用いた微分方程式実習

3.1 ファイルのダウンロードと展開

次の手順に従って，サンプルプログラム２つをダウンロードして，自分のディレクトリに準備する．

演習室での授業の初回に行う

1. ターミナルソフトウェアで，この授業専用のディレクトリを作成する．

```
cd ~
mkdir DE
cd DE
```

2. Firefox など，WWW ブラウザを起動し，本授業の web ページを開く．
   ポータルサイトから「学習支援サイト (Learning Support Sites)」へ，情報科学部「情報システム学科」へ，そして「真貝」へ,「担当授業に関するページ」をクリックして進む．
   あるいは以下の URL を指定する．
   `http://www.oit.ac.jp/is/~shinkai/lecture/`
   さらに「微分方程式」を開き，`DE1.c` と `DE2.c` のファイルを 2 つダウンロードする．（それぞれファイル名を右クリックして「名前をつけててリンク先を保存」する）．
   ダウンロードしたファイルは，先ほど作成した DE ディレクトリに入れる．

3. ターミナルで，`ls` して，2 つのファイル（`DE1.c` と `DE2.c`）があることを確認しよう．この２つのプログラムファイルは，何度も書き換えるので，不用意に破壊しないように，はじめにコピーをとっておくとよい．

```
cp DE1.c DE1_original.c
cp DE2.c DE2_original.c
```

3.2 基本的な利用方法

いくつかの課題に対して，次のことを行う．

1. プログラムファイル（`DE1.c`, `DE2.c`）を必要に応じて編集する．

`DE1.c`	1 階の微分方程式を Euler 法で解くプログラム．解析解もプロットできる．
`DE2.c`	2 階の微分方程式を Euler 法で解くプログラム．解析解もプロットできる．

2. プログラムをコンパイルする．
   `DE1.c` のプログラムをコンパイルするときには，

```
gcc -o DE1.exe DE1.c -lm
```

   `-lm` は，math.h をインクルードするためのオプションである．`-o` の直後は生成される実行ファイルの名前になる．

3. プログラムを実行する．
   上記のコマンドを用いてコンパイルすると，実行ファイルは，`DE1.exe` になるので，

```
./DE1.exe
```

4. プログラムは，2 つのファイル（`output.numerical`, `output.analytic`）を結果として生成する．

`output.numerical`	Euler 法で解いた結果ファイル．式の入力，初期条件の設定が正しければ，それなりの正しい結果になるはず．
`output.analytic`	解析解ファイル．自分で解いた答えを関数として入力しておき，その数値を出力する．自分の解と入力が正しければ，数値解と一致するはず．

   両者を gnuplot でグラフにして，一致しているかどうかを確かめる．gnuplot を開き，

```
gnuplot> plot "output.numerical", "output.analytic"
```

   あるいは

```
gnuplot> plot "./output.numerical", "./output.analytic"
```

   図を点ではなく，線で描くときには

```
gnuplot> plot "output.numerical" with line, "output.analytic" with line
```

3.3 DE1.c

プログラムファイル DE1.c である．解読せよ．

どこを書き換えたら良いか，を理解すること．

```
#include <stdio.h>                                          おまじない
#include <math.h>

#define Y0 2          /* Initial Value  y(0) */      Y0   は初期値.
#define X0 0          /* starting coord x0 */        X0   は始めの x の値.
#define XMAX 10       /* ending coord xmax */        XMAX は始めの x の値.

int main(void)
{
  char filename1[] = "output.numerical";
  char filename2[] = "output.analytic";
  FILE *fp1, *fp2;
  double x=0, dx=0.01;
  double y=0;
  double z=0;
  double dydx=0;
  // open files
  fp1 = fopen(filename1, "w");
  fp2 = fopen(filename2, "w");
  // x-Loop
  x = X0;
  y = Y0;
  while(x < XMAX){
    // *** Set your problem below
    //     dydx = right-hand side of the 1st order DE
    dydx = -0.5*cos(x)*y;
    dydx = -0.5*y + exp(-0.2*x);                    ここに問題となる微分方程式を
    dydx = -0.5*y + sin(x);                         書き加える．いくつ書いても，
    dydx = -0.5*y + 1;                              いちばん下の行のものが有効に
    dydx = -0.2*x*y;                                なる．
    dydx = -0.2*y;
    //     Set your problem  ... end
    // *** Write your analytic solution below
    z = exp(x)*Y0;                                  ここに自分の解いた答えを書き
    z = exp(-0.2*x)*Y0;                             加える．いちばん下の行が有効
    //     Analytic solution ... end                に．
// output
printf("%10.3f %11.5f %11.5f %12.8f \n", x,y,z,y-z);
fprintf(fp1,"%12.5f %12.5f\n", x,y);
fprintf(fp2,"%12.5f %12.5f\n", x,z);
    // Forward Difference
    y += dydx*dx;
// next x
    x += dx;
  } // end of x-loop
  // close files
  fclose(fp1);
  fclose(fp2);
  return 0;
}
```

3.4 微分方程式の計算【1 階の微分方程式】

$\boxed{\text{C.1}}$ プログラム DE1.c と DE2.c で用いているのは，微分方程式を解く手段としては，最も基本的な前進 Euler 法と呼ばれるものである．教科書を読んで，原理を理解せよ． 教科書 §7.1.3 と §7.1.4.

$\boxed{\text{C.2}}$ 以下の問題を解き，その答えを得た後，プログラム DE1.c で問題となる微分方程式と解答となる解析解を入力し，両者が一致することを確かめよ．

(1) $y' = -2y, \quad y(x=0) = 2$
(2) $y' = 3y, \quad y(x=0) = 0.1$
(3) $y' = y(y-2), \quad y(x=0) = 1$
(4) $y' = y(y-2), \quad y(x=0) = -1$
(5) $y\,y' + x = 0, \quad y(x=0) = 2$
(6) $y' + y = 2x^2 + 4x - 1, \quad y(x=0) = 2$
(7) $y' + y = 2e^x, \quad y(x=0) = 1$
(8) $y' - y = 2e^{-x}, \quad y(x=0) = 0$
(9) $y' + 2y = e^{-2x}, \quad y(x=0) = -2$
(10) $y' + 3y = 5\sin x - 5\cos x, \quad y(x=0) = 2$

$\boxed{\text{C.3}}$ 積分の部分を，前進 Euler 法ではなく，台形公式やシンプソン公式を用いて改良してみよう． 余裕のある人のみ．

3.5 微分方程式の計算【2 階の微分方程式】

$\boxed{\text{C.4}}$ プログラム DE2.c では，2 階微分方程式を解いているが，どのように解いているか，解読せよ．

$\boxed{\text{C.5}}$ 関数 $y(t)$ について以下の微分方程式を解け．プログラム DE2.c で問題となる微分方程式と解答となる解析解を入力し，両者が一致することを確かめよ．

(1) $y'' + 4y = 0, \quad y(t=0) = 2,\ y'(t=0) = 0$
(2) $y'' + 4y = 0, \quad y(t=0) = 0,\ y'(t=0) = 2$
(3) $y'' - 4y = 0, \quad y(t=0) = 1,\ y'(t=0) = 0$
(4) $y'' - 4y = 0, \quad y(t=0) = 1,\ y'(t=0) = -1$

$\boxed{\text{C.6}}$ 関数 $y(t)$ について以下の微分方程式を解け．プログラム DE2.c で問題となる微分方程式と解答となる解析解を入力し，両者が一致することを確かめよ．

(6),(7) は $x = [0, 30]$ で plot せよ．

(1) $y'' - y' - 6y = 0, \quad y(t=0) = 1,\ y'(t=0) = -1$
(2) $y'' - y' - 6y = 0, \quad y(t=0) = 1,\ y'(t=0) = -2$
(3) $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(t=0) = 2,\ y'(t=0) = 6$
(4) $y'' + 2y' + 10y = 0, \quad y(t=0) = 3,\ y'(t=0) = 0$
(5) $y'' + 2y' - 8y = 18e^{-t}, \quad y(t=0) = -2,\ y'(t=0) = 1$
(6) $y'' + 5y' + 6y = 5\sin t, \quad y(t=0) = 3,\ y'(t=0) = 0$
(7) $y'' + 4y = \sin 2t, \quad y(t=0) = 1,\ y'(t=0) = 0$

$\boxed{\text{C.7}}$ Runge-Kutta 法を用いて積分できるように，プログラムを改良せよ． 教科書 §7.1.5 参照．余裕のある人のみ．

A 定期試験について

- 定期試験は，「参照・持ち込み許可物　なし」です．筆記用具のみで挑んでください．
- 試験範囲は，教科書 p29-63，p86-110 （ただし p130 の章末問題含む）
  1 階の微分方程式は定数変化法まで
  2 階の微分方程式は未定係数法まで　です．

B 救済レポートについて

成績は定期試験で判定します．合否が微妙な場合は，中間テスト（2 回分）の成績を（加点の意味で）加味します．

定期試験終了後，答案の出来に不安な諸君に対し，次の問題をレポートとして提出することにより，加点対象とします．

提出形式について

- レポートは 2 問で，定期試験 100 点満点に対して最大 15 点分の加算とします．
- A4 用紙，表紙は不要．形式は自由．
- 提出〆切は，定期試験終了後 6 日目の夕方 5 時．（試験終了 1 週間後に成績を事務に提出しなければならないため）
- 提出先は，1 号館 5 階 513 室の真貝の居室まで直接持参のこと．
- レポートは返却しません．（成績判定根拠として保存するため）

提出内容について

- 2 題とも，解いた過程についての解説をつけると共に，グラフは Mathematica や gnuplot などのソフトウェアで描いたものをプリントアウトしてください．
- 具体的な数値は適当に設定してよい．2 題とも，2 つ以上の初期条件を設定して解いた結果をレポートすること．

なお，レポートの問題レベルは，予定している定期試験よりも難しめです．

問題 1 【教科書 p82　研究課題 2.2　空気抵抗が速度の 2 乗に比例する場合のボールの軌跡】
雨滴の場合は速度に比例する抵抗力（これを粘性抵抗という）だが，落下傘・パラシュートなど運動量が大きな物体に対しては，速度の 2 乗に比例する抵抗力（慣性抵抗）が働くことが知られている．
いま，水平面から角度 θ の方向に，初速度 v_0 でボールを投げた．ボールには重力と共に速度の 2 乗に比例する抵抗力が働くとする．ボールの軌跡を求め，解いた結果をグラフにして示せ．

参考となる問題：教科書 p54　例題 2.12　粘性抵抗の場合のボールの軌跡
：教科書 p86　章末問題 $\boxed{2.3}$　慣性抵抗の場合のボールの落下

どちらの問題も，グラフは Mathematica や gnuplot などで描いたものを提出のこと．

問題 2 【教科書 p130　章末問題 $\boxed{3.3}$　バンジージャンプ】
質量 m の人が長さ L のゴムひもをつけて，バンジージャンプを行う．ゴムひもは L より伸びているときには，伸びた長さ Δx に比例して縮もうとする力 $k\Delta x$ （k は正の定数）を及ぼす．働く力は，重力・ゴムひもからの力・速度に比例する空気抵抗の 3 つとする．
飛び降りる点を $x = 0$ として下向きに x 軸を考え，重力加速度の大きさを g（したがって重力の大きさは mg），速度 v のときの空気抵抗の大きさは cv（c は正の定数）とする．どのような運動になるか概略を論じ，$x(t)$ のグラフを描け．