第 3 章　2 階および高階微分方程式

3.1　2 階の定数係数同次線形微分方程式

3.1.1　概略

3.1.2　解の重ね合わせ

3.1.3　解の存在と一意性

3.1.4　関数の 1 次独立・1 次従属

例題 3.1
次の関数の組は 1 次独立か．a, b は定数とする．

(1) $(e^{ax},\, e^{bx})$　　(2) $(e^{ax},\, xe^{ax})$

(3) $(\sin x,\, \cos x)$　　(4) $(1,\, x,\, x^2)$

問題 3.2
次の関数の組は 1 次独立か，そうでないか．

(1) $(\sin x,\, \sin 2x)$　　(2) $(\sin x,\, x\sin x)$

(3) $(\sin ax,\, \cos ax)$　　(4) $(e^x \sin x,\, e^x \cos x)$

3.1.5　特性方程式

例題 3.3
複素数 λ に対する微分公式　$\dfrac{d}{dx}e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$　を示せ。

例題 3.4　$y(x)$ に対する次の微分方程式を解け．

(1) $y'' - 9y = 0$　　(2) $y'' + 9y = 0$

(3) $y'' + 2y' - 3y = 0$　　(4) $y'' + 2y' + y = 0$

(5) $y'' + 2y' + 5y = 0$　　(6) $y'' = 0$

問題 3.5　$y(x)$ に対する次の微分方程式を解け．

(1) $y'' - 5y' + 6y = 0$　　(2) $y'' - y' = 0$

(3) $y'' + y = 0$　　(4) $y'' + 4y' + 4y = 0$

(5) $y'' - 2y' + 2y = 0$　　(6) $y'' + 4y' + 13y = 0$

問題 3.6
次の条件をみたす，2 階の微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ の係数 a, b を定めよ．

(1) 基本解が e^{-2x} と e^{3x} である．

(2) 基本解に xe^{3x} を含む．

(3) 基本解に $e^{-x}\sin 2x$ を含む．

3.1.6　初期値問題

例題 3.7
次の初期条件のもとで，$y(x)$ に対する微分方程式を解け．

(1) $y'' - 4y = 0,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

(2) $y'' - 4y = 0,\ \ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$

問題 3.8
次の初期条件のもとで，$y(t)$ に対する微分方程式を解け．

(1) $y'' + 4y = 0,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = -2$

(2) $y'' + 4y = 0,\ \ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$

(3) $y'' + 4y = 0,\ \ y(0) = 2,\ y'(0) = 2$

応用例　**単振動**

例題 3.9
ばね定数 k のばねに，質量 m のおもりをつけて，摩擦のない水平面上で運動させる．おもりの位置 $x(t)$ を振動方向を x 軸，振動中心を $x = 0$ とした軸で表すことにすると，ばねにつけたおもりの運動方程式は，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

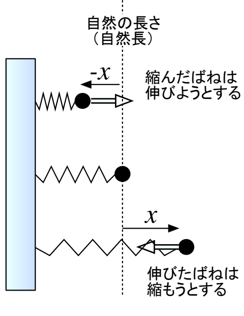
となる．

(1) この方程式の一般解を求めよ．

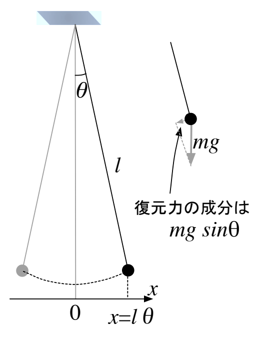
(2) この単振動の周期（1 往復する時間）を求めよ．

(3) 時刻 $t = 0$ で，位置 $x = x_0$ にあったおもりが，静かに固定を放たれたときの解を求めよ．

(4) 時刻 $t = 0$ で，位置 $x = 0$ にあったおもりが，初速度 $v = v_0$ を与えられたときの解を求めよ．



例題 3.9 の図



例題 3.10 の図

応用例　**振り子**

例題 3.10
質量 m のおもりをつけた長さ ℓ の振り子を考える．時刻 t における振り子が鉛直方向となす角度 $\theta(t)$ は，おもりの変位 x と，$x = \ell\theta$ の関係になるので，おもりの加速度 a は，$a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ell\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ となる．したがって，おもりに働く運動方程式は，

$$m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

となる．θ が微小であれば，$\sin\theta \simeq \theta$ と近似できるので，次の微分方程式になる．

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

一般解を求め，運動の周期 T を求めよ．

応用例　**減衰振動**

例題 3.11
ばね定数 $k(>0)$ のばねにつながれた質量 m の物体が，抵抗力を受けながら運動する状況を考える．抵抗力は速度 v に比例すると考えて cv（ただし，c は正の定数）とする．ばねの自然長の位置を原点とする x 座標を考えると，運動方程式は，時間を t として

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\,\frac{dx}{dt}$$

となる．この微分方程式の一般解を論じよ．また，初期に自然長の位置から x_0 引きのばして静かに手を放した場合（すなわち $x'(0) = 0$）の解をグラフで表せ．

3.2　2 階の定数係数非同次線形微分方程式

3.2.1　解の構造

3.2.2　未定係数法

例題 3.12
$y(x)$ に対する次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $y'' - 5y' + 6y = 4e^x$　(2) $y'' - 4y' - 5y = 13\sin x$

(3) $y'' - y' = 4e^x$　(4) $y'' + 2y' + 5y = 5x - 3$

(5) $y'' + y = 4\cos x$

問題 3.13
$y(x)$ に対する次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $y'' - 3y' + 2y = 12e^{-x}$　(2) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$

(3) $y'' + 4y' + 4y = 8x^2$　(4) $y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x}$

(5) $y'' + 4y = 2\sin x$　(6) $y'' + y = 6\sin x$

問題 3.14
$y(x)$ に対する次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $y'' - 3y' + 2y = x + x^2$

(2) $y'' - 3y' + 2y = 4e^{2x} + 3e^x$

(3) $y'' - 4y = \sinh x$

(4) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sin 2x$

(5) $y'' + y' + y = (1 + x)xe^x$

(6) $y'' + 4y' + 5y = 4e^{-2x}\cos x$

応用例　**RLC 直列回路（直流・交流）**

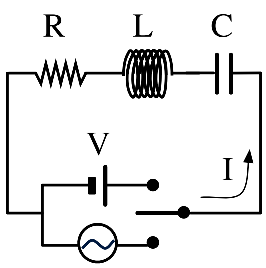
例題 3.15
抵抗値 R の抵抗，インダクタンス L のコイル，容量 C のコンデンサで構成される RLC 直列回路を考える．V を回路の起電力とすると，Kirchhoff の法則により，時間 t を変数にする電流 $I(t)$ に対して次の微分方程式が成り立つ．

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dV}{dt}$$

R, L, C は正の定数とする．

(1) 与式の右辺をゼロとした同次微分方程式の一般解 $I_1(t)$ を求めよ．

(2) $V = V_0\sin\omega t$ のとき，与式の特殊解 $I_2(t)$ を求めよ．ただし，V_0, ω は正の定数である．



応用例　**強制振動**

例題 3.16
ばね定数 $k(>0)$ のばねにつながれた質量 m の物体が，速度に比例する抵抗力 $-c\dfrac{dx}{dt}$（c は定数で $c \geq 0$）と，時間に依存する外力 $F(t)$ を受けながら運動する状況を考える．ばねの自然長の位置を原点とする x 座標を考えると，運動方程式は，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\,\frac{dx}{dt} + F(t)$$

となる．$F(t) = F_0\cos\omega t$ であるとして，運動を論ぜよ．

3.2.3 定数変化法

例題 3.17
$y(x)$ に対する次の微分方程式を定数変化法で解け．

$$y'' + y = \tan x \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$$

問題 3.18
$y(x)$ に対する次の微分方程式の一般解を定数変化法で求めよ．

(1) $y'' - y = e^x$　　(2) $y'' + 3y' + 2y = x$

3.3 2 階の変数係数非同次線形微分方程式

3.3.1 一般的な議論

3.3.2 変数係数の同次微分方程式

3.3.3 変数係数の非同次微分方程式

例題 3.19
$y(x)$ に対する微分方程式

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y = \sqrt{x}$$

の一般解を求めよ．ただし，右辺をゼロとする同次方程式の基本解が

$$y_1(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad y_2(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

であることを用いてよい．

問題 3.20
$y(x)$ に対する微分方程式

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{9}{4x^2}\right) y = x\sqrt{x}$$

の一般解を求めよ．ただし，右辺をゼロとする同次方程式の基本解が

$$y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right), \quad y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\cos x}{x} + \sin x\right)$$

であることを用いてよい．

3.3.4 Euler の微分方程式

例題 3.21
$y(x)$ に対する微分方程式 $x^2y'' - 4xy' + 6y = 8x^4$ を解け．

3.4 高階の定数係数同次線形微分方程式

例題 3.22　次の微分方程式を解け．

(1) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$

(2) $y''' - 3y' + 2y = 0$

(3) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

(4) $y''' - 4y'' + 5y' = 0$

(5) $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$

問題 3.23　次の微分方程式を解け．

(1) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

(2) $y''' - 3y'' - 3y' + y = 0$

(3) $y''' - y = 0$

(4) $y''' + y = 0$

(5) $y^{(4)} - 4y'' + 4y = 0$

(6) $y^{(4)} - 4y''' + 10y'' - 12y' + 5y = 0$

(7) $y^{(4)} - 8y''' + 32y'' - 64y' + 64y = 0$

問題 3.24
次の条件をみたす，もとの微分方程式を求めよ．

(1) 基本解に e^{-2x} と $\sin 3x$ を含む 3 階の微分方程式．

(2) 基本解に x^3e^{-2x} を含む 4 階の微分方程式．

3.5 境界値問題

例題 3.25　次の Dirichlet 境界値問題の解を求めよ．

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}) \\ y(0) = a_1, \ \ y(\pi/2) = a_2 \end{cases}$$

例題 3.26　次の Dirichlet 境界値問題の解を求めよ．

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 \quad (0 < x < \pi) \\ y(0) = 0, \ \ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

例題 3.27　次の Dirichlet 境界値問題の解を求めよ．

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 \quad (0 < x < \pi) \\ y(0) = 1, \ \ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

例題 3.28
自然数 k を含む微分方程式

$$y''(x) + k^2y(x) = 0 \quad (0 < x < \pi)$$

の解のうち，次の境界条件を満たす解を求めよ．

(1) Dirichlet 境界条件　$y(0) = 0, \ \ y(\pi) = 0$

(2) Neumann 境界条件　$y'(0) = 0, \ \ y'(\pi) = 0$

3.6　発展的応用

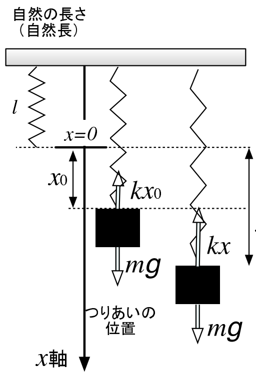
3.6.1　重力による単振動

例題 3.29
鉛直面上で上下に振動するばねに取り付けられた物体の運動を考えよう．長さ ℓ のばねを天井に取り付け，鉛直に垂らす．ばねの最下点を原点とし，下向きに x 軸を取る．質量 m の物体を取り付けると，物体には鉛直下向きに重力 mg が働くとともに，ばねの伸びが x のときには弾性力 kx を受ける．

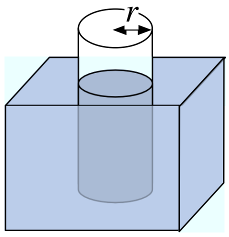
(1) 重力と弾性力がつりあって，おもりが静止するとき，ばねの伸びを x_0 とする．x_0 を求めよ．

(2) おもりが位置 x のときの運動方程式を立式せよ．

(3) 一般解を求め，振動の中心・振動の周期を求めよ．



例題 3.29 の図



例題 3.30 の図

3.6.2　重力と浮力による単振動

例題 3.30
半径 r，質量 m の円柱があり，密度 ρ の液体中に浮かべる．重力加速度を g とする．円柱が完全に沈むことはないとする．

(1) 円柱が縦のまま途中まで沈んで静止しているとする．円柱に加わる重力 mg と液体から受ける浮力のつりあいから，円柱の液体表面より下の部分の高さ h を求めよ．

(2) (1) のつりあいの位置を原点 $x = 0$ とする x 軸を上向きに考える．つりあいの位置からわずかにずれた円柱は単振動を行うが，どのような周期になるか．

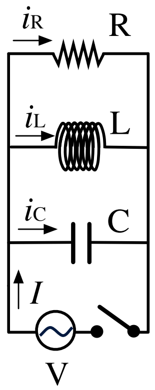
問題 3.31
例題 3.30 と同様の設定で，正三角柱のときを考えよう．

(1) 正三角柱の断面は，一辺の長さが $2r$ の正三角形であるとする．全体の質量は m で，密度 ρ の密度 ρ の液体中に浮かべる．重力加速度を g とする．正三角柱が完全に沈むことはないとする．縦のまま重力と浮力の平衡点にあり，わずかにずれたとき，どのような周期で単振動を行うか．

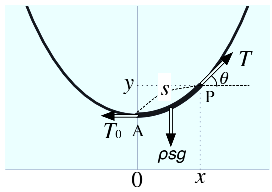
(2) 例題 3.30 の円柱も，本問の正三角柱も真横から見れば同じ横幅 $2r$ である．周期を観測して形状を決定することができるだろうか．

3.6.3　RLC 並列回路

例題 3.32
抵抗（抵抗値 R），コンデンサ（容量 C），コイル（インダクタンス L）の素子を図のようにつなぎ，流れる電流をそれぞれ i_R, i_C, i_L とする．電源電圧 $V = V_0 \sin \omega t$ をかけるとき，回路全体を流れる電流 $I = i_R + i_C + i_L$ を求めよ．



例題 3.32 の図



例題 3.33 の図

3.6.4　懸垂線

例題 3.33
ロープの両端を持ったとき，重力をうけてたわむロープの曲線の形は，方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}\int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

で与えられる．両辺をさらに微分し，$z(x) = \dfrac{dy}{dx}$ と置換することにより，微分方程式を解いて曲線の式 $y(x)$ を求めよ．

3.6.5　最速降下線：（変分法の紹介）

例題 3.34
最速降下線問題は，

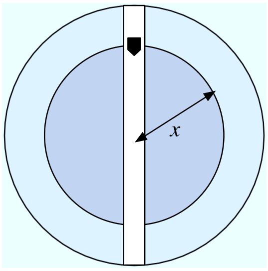
$$T = \int_0^x f(x, y(x), y'(x))\, dx, \qquad f(x, y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{-2gy}}$$

の T を最小化する $y(x)$ を求めればよい．y の関数形を仮に $y(x) + \varepsilon\phi(x)$ とずらしたものを考えるとき，T を最小化する y の解の付近では，$\dfrac{dT}{d\varepsilon} = 0$ であることを用いて，$y(x)$ を求めよ．ただし，「仮想的な変位」$\phi(x)$ は端点で $\phi = 0$ としてよい．

3.6.6 研究課題:地球を貫くトンネル

研究課題 3.4
北極から南極まで一直線にトンネルを掘り，北極から初速度ゼロで質量 m の物体を落下させる．この物体はどのような運動をするだろうか．また，南極に到達するのは何分後か．物体が受ける力は地球からの万有引力のみとする．

物体が受ける万有引力の向きは常に地球の中心を向き，その大きさは地球中心から距離 x の位置にあるとき $G\dfrac{M(x)\,m}{x^2}$ である．ここで，$M(x)$ は，地球内部の半径 x の球内の質量である．地球内部の密度は一様であるとし，地球の質量を 5.9×10^{24} kg，地球の半径を 6400 km，万有引力定数 $G = 6.7\times10^{-11}\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2}$ とする．



章末問題

$\boxed{3.1}$ 次の語句の意味を説明せよ．

(1) 関数の 1 次独立性
(2) 基本解の 1 次独立性
(3) 減衰振動
(4) 共振

$\boxed{3.2}$ $y(t)$ に対する 2 階の微分方程式

$$y'' + 2ay' + by = 0 \quad (a, b : \text{定数})$$

について，

(1) 特性方程式を導け．
(2) 一般解を導出せよ．

$\boxed{3.3}$ 質量 m の人が長さ L のゴムひもをつけて，バンジージャンプを行う．ゴムひもは L より伸びているときには，伸びた長さ Δx に比例して縮もうとする力 $k\Delta x$ （k は正の定数）を及ぼす．働く力は，重力・ゴムひもからの力・速度に比例する空気抵抗の 3 つとする．

(1) 運動方程式を立てよ．ただし，飛び降りる点を $x = 0$ として下向きに x 軸を考え，重力加速度の大きさを g（したがって重力の大きさは mg），速度 v のときの空気抵抗の大きさは cv（c は正の定数）とする．
(2) どのような運動になるか概略を論ぜよ．

第 4 章 連立微分方程式と解の定性的分類

4.1 連立微分方程式の例

4.2 線形連立微分方程式

例題 4.1
$x(t), y(t)$ に対する次の連立微分方程式の一般解を求めよ．

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x + 4y \end{cases} \tag{4.2.1}$$

4.3 微分方程式の大域理論

4.3.1 臨界点

4.3.2 安定性

4.3.3 固有値が 2 つの異なる実数の場合

例題 4.2
例題 4.1 において，初期条件 $x(0) = 2$, $y(0) = 1$ をみたす解を求めよ．

問題 4.3
$x(t), y(t)$ に対する次の連立微分方程式の一般解を求めよ．(4)(5) は与えられた初期条件での特殊解も求めよ．

(1) $\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -2x - 4y \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 4x + y \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 3x - 4y \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = -1 \\ y(0) = -3 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 4x + 2y \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 6 \end{cases}$