# 1 Mathematica を用いた数学実習

*Mathematica* は，Wolfram 社の販売する数式処理ソフトです．グラフ化やシミュレーションまで，今後の学習・研究に役立つことでしょう．

- 情報科学部ではサイトライセンス契約で利用可能となっています．
- 利用方法の詳細は，次のページを参照してください．（講義ページからリンクされています）．
`http://www.oit.ac.jp/is/shinkai/lecture/mathematica.html`

演習室の PC からの起動方法（Windows から）

- 普通のソフトウェアと同じように，「アプリ一覧」から「Wolfram Mathematica」を選択する．（「Wolfram Mathematica Kernel」ではない．）
- 起動したら，「ファイル」>「新規作成 (N)」>「ノートブック (.nb) (N)」を選び，ノートブック画面を出す．
5! と入力し，「shift+中央の enter」または「右端の enter」とキーボードを押して，120　と計算されるかどうか確かめよう．

## 本日の課題

$\boxed{\text{M.1}}$ 教科書[1]の p204–209 （§7.2.1 基本的な数式処理　から §7.2.4 基本的な描画　まで ）を熟読しながら，すべて実行して確かめよ．

$\boxed{\text{M.2}}$ 【教科書 p48　例題 2.5　Malthus の人口モデル】微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = kx \qquad (k > 0) \tag{1.1}$$

の一般解は，$x(t) = x_0 e^{kt}$ （$x_0$ : 定数）であった．

(1) 時刻 $t = 0$ での人口を $x(0) = 100$ として，$k = 0.1, 0.2, 0.3$ としたときの $x(t)$ のグラフを描け．

```
Xend=20; k = 0.1; p1 = Plot[100*Exp[k*x], {x, 0, Xend}]
         k = 0.2; p2 = Plot[100*Exp[k*x], {x, 0, Xend}]
         k = 0.3; p3 = Plot[100*Exp[k*x], {x, 0, Xend}]
Show[p1, p2, p3]
```

(2) $k = 0.1$ として，$x_0 = 100, 200, 300$ としたときの $x(t)$ のグラフを描け．

$\boxed{\text{M.3}}$ 【教科書 p49　例題 2.6　ロジスティックモデル】微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = (a - bx)\,x \qquad (a > 0,\, b > 0) \tag{1.2}$$

の一般解は，$x(t) = \dfrac{a}{Ce^{-at} + b}$ （$C$ : 定数）であった．$x(0) = 100$ とする．

(1) $a = 0.1$ として，$b = 0, 0.0001, 0.0002$ の 3 つの場合を考える．それぞれの場合の積分定数 $C$ の値を求めよ．

(2) 上記の 3 つの場合について，$x(t)$ のグラフを描け．

[1]「徹底攻略　常微分方程式」（真貝著，共立出版，2010 年 8 月）2021 年印刷版から §7.2 は Mathematica 12 に対応．

$\boxed{\text{M.4}}$ 【教科書 p54　例題 2.12　空気抵抗のある場合のボールの軌跡】
水平方向を $x$ 軸，鉛直方向を $y$ 軸（上向きが正）に取り，ボールを投げる位置を原点とする．抵抗の比例定数を $k$，粒子の質量を $m$，重力加速度を $g$，時刻 $t$ での速度を $(v_x(t), v_y(t))$ とすれば，運動方程式は，

$$m\frac{dv_x}{dt} = -kv_x \tag{1.3}$$
$$m\frac{dv_y}{dt} = -mg - kv_y \tag{1.4}$$

となる．初速度を $v_0$，投げ上げる角度を $\theta$ とすれば，初速度の $x, y$ 成分は $(v_0\cos\theta, v_0\sin\theta)$ となる．ボールは，時刻 $t = 0$ で原点にあるとする．

(1) 空気抵抗がない場合（$k = 0$），この微分方程式を解き，

$$\begin{aligned} x(t) &= (v_0\cos\theta)t \\ y(t) &= (v_0\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

であることを示せ．

(2) (1) の解で，$v_0 = 10$[m/s]，$g = 9.8$[m/s$^2$] とし，$\theta$ を変化させて，$\theta = \pi/4$ のときに，もっとも遠くまでボールが飛ぶことを図で示せ．（教科書 p54 の図を描け）．[2]

(3) 空気抵抗がある場合の微分方程式 (1.3), (1.4) を解き，解が

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{mv_0\cos\theta}{k}(1 - e^{-(k/m)t}) \\ y(t) &= \frac{m}{k}\left(v_0\sin\theta + \frac{mg}{k}\right)\left(1 - e^{-(k/m)t}\right) - \frac{mg}{k}t \end{aligned}$$

であることを示せ．

(4) (3) の解で，$v_0 = 10$[m/s]，$g = 9.8$[m/s$^2$] とし，$k = mg/v_0$ として，$\theta$ をいろいろと変え，最大の飛距離を得る場合をグラフで示せ．（教科書 p55 の図を描け）．$m$ の値は適当に想定してよい．

$\boxed{\text{M.5}}$ 【教科書 p82　研究課題 2.2　空気抵抗が速度の 2 乗に比例する場合のボールの軌跡】
雨滴の場合は速度に比例する抵抗力（これを**粘性抵抗**という）だが，落下傘・パラシュートなど運動量が大きな物体に対しては，速度の 2 乗に比例する抵抗力（**慣性抵抗**）が働くことが知られている．
上記 $\boxed{\text{M.4}}$ で扱った，抵抗力が働くときのボールの軌跡を，速度の 2 乗に比例する抵抗力の場合に置き換えて解き[3]，解いた結果を同様にグラフにして示せ．

$\boxed{\text{M.6}}$ 教科書の p210 （§7.2.5 微分方程式を解く ）を読み，`DSolve` のコマンドがどの程度使えるものなのか，教科書の例題等を実行して確かめよ．

[2] ヒント：パラメータ表示された曲線を描く方法として，例えば半径 2 の円を描くときに $(x, y) = (2\cos\theta, 2\sin\theta)$ として `ParametricPlot[{2 Cos[t], 2 Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi}]`　というコマンドがある．

[3] 教科書の章末問題 $\boxed{2.3}$ では，抵抗力が速度の 2 乗に比例する場合の一直線上の運動を取り上げています．ヒントにしてください．