微分方程式（1 年）期末試験 2013-02-07

問題 1　（自然現象のモデル化，20 点）
次の微分方程式を立てよ．各自で導入した記号には説明をつけること．

(1) xy 平面上の各点で，法線の傾きが $\tan x$ である曲線が満たす微分方程式．

(2) 時間に対して一定の割合で成長してゆく雪の結晶の大きさを求める微分方程式．

(3) x 方向の加速度が，原点からの距離に反比例することを示す微分方程式．

(4) 質量 m の落下傘が重力 mg を受けて落下するとき，高さ y が満たす運動方程式は，

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg$$

である．さらに，速度の 2 乗に比例する抵抗力が加わるとすると，どのような式になるか．

問題 2　（基本的な微分方程式，30 点）
$y(x)$ に対する次の微分方程式の一般解（初期条件が与えられているものは特殊解）を求めよ．

(1) $y' - 4y = 0,\ \ y(0) = 2$

(2) $y' - 4y = 8e^{-4x}$

(3) $y' - 4y = 2e^{4x}$

(4) $y' - 4y = 17\sin x$

(5) $y'' + 4y = 0$

(6) $y'' + 4y = 0,\ \ y(0) = 5,\ \ y'(0) = 2$

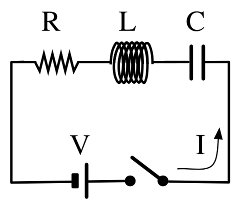
以下の３問のうち，２問を選択して解答せよ．

問題 3　（1 階微分方程式の応用，25 点）
人口 y の増加率のモデルとして，次の式がある．

$$\frac{dy}{dt} = (1 - ay)y$$

ここで，t は時間，a は正の定数である．人口の増加率は，人口の 1 次項 y で加速するが，人口の 2 次項 y^2 によってブレーキがかかる，というモデルである．これを解き，結果をグラフで示せ．ただし，$y(0) = y_0\ (> 0)$ とする．
ヒント：変数分離して，部分分数に分けて積分

問題 4　（2 階微分方程式の応用，25 点）
抵抗値 R の抵抗，インダクタンス L のコイル，容量 C のコンデンサで構成される RLC 直列回路を考える．V を回路の起電力とすると，Kirchhoff の法則により，時間 t を変数にする電流 $I(t)$ に対して次の微分方程式が成り立つ．



$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dV}{dt}$$

R, L, C は正の定数とし，$CR^2 < 4L$ の関係があるとする．いま，電源として直流電源 $V = (一定)$ をつなぎ，時刻 $t = 0$ でスイッチを入れた．この微分方程式の一般解 $I(t)$ を求め，概形をグラフで示せ．

問題 5　（微分方程式の概念，25 点）

(1) 「同次（斉次）型微分方程式」と「非同次（非斉次）型微分方程式」の違いを説明せよ．

(2) 「線形微分方程式」と「非線形微分方程式」の違いを説明せよ．

(3) 微分方程式の解として「一般解」と「特殊解」の違いを説明せよ．

(4) 2 階微分方程式の解を求める際の「基本解の 1 次独立性」について説明せよ．