2016 年度「微分方程式」　期末試験 2017 年 1 月 24 日実施

担当：真貝寿明・大島一能　　　対象：IS 科 IN 科 1 年　　　参照可能物：なし

【重要】　別紙の答案用紙に記入すること．問題用紙は回収しない．
解答順は自由とするが，答案用紙には，どの問題か分かるように記載すること．
答案には，答えだけではなく導出の過程も記すこと．導出の過程にも配点がある．

問題 **1**　（自然現象のモデル化，20 点）

次の微分方程式を立てよ．各自で導入した記号には説明をつけること．

(1) xy 平面上の各点で，法線の傾きが $\sin x$ である曲線が満たす微分方程式．

(2) 各時刻でのガン細胞数に比例して増加していくガン細胞の数を求める微分方程式．

(3) x 方向の加速度が，原点からの距離の 2 乗に反比例することを示す微分方程式．

(4) 半径 r の円を，半径 $r+\Delta r$ に広げたとき，円周の長さ $L(r)$ がどれだけ増加するかを表す微分方程式．

問題 **2**　（基本的な微分方程式，30 点）

$y(x)$ に対する次の微分方程式の一般解（初期条件が与えられているものは特殊解）を求めよ．

(1) $y' - 3y = 0$,　$y(0) = 2$

(2) $y' - 3y = 6e^{-3x}$

(3) $y' - 3y = 2e^{3x}$

(4) $y' - 3y = 10 \sin x$

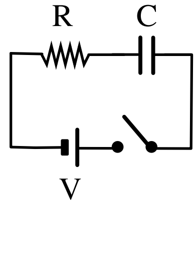
(5) $y'' + 5y' - 6y = 0$

(6) $y'' + 5y' - 6y = 0$,　$y(0) = 0$,　$y'(0) = 7$

以下の 3 問のうち，2 問を選択して解答せよ．

問題 **3**　（1 階微分方程式の応用，25 点）

抵抗値 R の抵抗と容量 C のコンデンサ（キャパシタ）で構成される RC 直列回路に，起電力 V（一定）の直流電源を接続し，時刻 $t=0$ でスイッチを入れる．コンデンサに蓄電される電荷の量 $Q(t)$ は，微分方程式



$$\text{起電力}=\sum \text{電圧降下}\quad \text{すなわち}\quad V = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

をみたす．$Q(t)$ を求め，グラフの概形を描け．

$\boxed{\text{問題 }\mathbf{4}}$　（2 階微分方程式の応用，25 点）

メトロノームの振動を考える．振動の振幅 x を時間 t の関数とすると，$x(t)$ は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

の微分方程式にしたがう．ω は定数である．

(1) $x(t)$ の一般解を求め，一往復する時間（周期）を求めよ．

(2) 時刻 $t = 0$ で，$x = x_0$ の位置から，静かに手を離した．$x(t)$ を求めよ．

２つのメトロノームを用意し，$\omega = 1$ となるような同じテンポで振動するようにして，スケートボードの上に並べた．メトロノームは互いに振動の影響を及ぼすため，振幅 $x(t)$ は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x + 4\sin t$$

の微分方程式にしたがうことになった．

(3) $x(t)$ の振動を論じよ．また振動のグラフの概形を示せ．

$\boxed{\text{問題 }\mathbf{5}}$　（微分方程式の概念，25 点）

(1) $y(x)$ に対して，2 階の定数係数非同次線形常微分方程式の例を 1 つ挙げよ．

(2) 「常微分方程式」と「偏微分方程式」の違いを説明せよ．

(3) 「初期値問題」とは何か．説明せよ．

(4) 空欄を埋めよ．
ばねや振り子のような単振動を起こすものに対して，決まった振動数をもつ力を加え続けて生じる運動を $\boxed{\text{(a)}}$ という．また，ばねや振り子の系のもつ $\boxed{\text{(b)}}$ と同じ振動数をもつ力を与え続けると $\boxed{\text{(c)}}$ が引き起こされる．これらは，微分方程式としては，非同次項がもたらす $\boxed{\text{(d)}}$ 解の影響であるといえる．