

微分方程式（1年）2018年度 期末試験（2019年1月30日実施）

担当：真貝寿明・大島一能

対象：IS科 IN科 1年

参照可能物：なし

- 【重要】 別紙の答案用紙に記入すること。問題用紙は回収しない。
解答順は自由とするが、答案用紙には、どの問題か分かるように記載すること。
答案には、答えだけではなく導出の過程も記すこと。導出の過程にも配点がある。

問題 1 （自然現象のモデル化，20点）

次の微分方程式を立てよ。各自で導入した記号には説明をつけること。2次以上の微小量は無視してよい。

- (1) xy 平面上の各点で、法線の傾きが $\cos x$ である曲線がみたす微分方程式。
- (2) 時間に対して一定の割合で増加しつつも、全体量に比例して減少傾向を示す人口を表す微分方程式。
- (3) x 方向の加速度が、原点からの距離の2乗に比例し、常に原点方向に向くことを示す微分方程式。
- (4) 一辺が r の立方体を、一辺が $r + \Delta r$ に広げたとき、体積 $V(r)$ がどれだけ増加するかを表す微分方程式。

問題 2 （基本的な微分方程式，30点）

$y(x)$ に対する次の微分方程式の一般解（初期条件が与えられているものは特殊解）を求めよ。

- (1) $y' - 6y = 0, y(0) = 3$
- (2) $y' - 6y = 5e^x$
- (3) $y' - 6y = e^{6x}$
- (4) $y' - 6y = 37 \sin x$
- (5) $y'' + y' - 6y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 5$
- (6) $y'' - 2y' - 6y = 0$

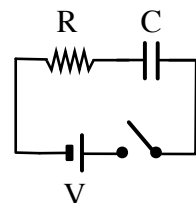
以下の3問のうち、2問を選択して解答せよ。 _____

問題 3 （1階微分方程式の応用，25点）

抵抗値 R の抵抗と容量 C のコンデンサで構成される RC 直列回路に、起電力 V （一定）の直流電源を接続し、時刻 $t = 0$ でスイッチを入れる。コンデンサに蓄電される電荷の量 $Q(t)$ は、微分方程式

$$\text{起電力} = \sum \text{電圧降下} \quad \text{すなわち} \quad V = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

をみたす。 $Q(t)$ を求め、グラフの概形を描け。



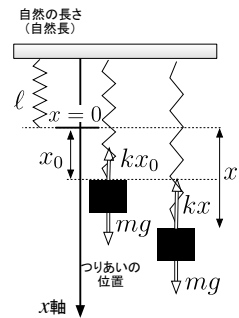
問題 4

(2階微分方程式の応用, 25点)

鉛直面上で上下に振動するばねに取り付けられた物体の運動を考えよう. 長さ l のばねを天井に取り付け, 鉛直に垂らす. ばねの最下点を原点とし, 下向きに x 軸を取る. 質量 m の物体を取り付けると, 物体には鉛直下向きに重力 mg が働くとともに, ばねの伸びが x のときには弾性力 kx を受ける. 重力と弾性力がつりあって, おもりが静止するとき, ばねの伸びを x_0 とすると, 力のつりあいから $0 = mg - kx_0$, すなわち, $x_0 = mg/k$ が成り立つ. おもりが位置 x のときの運動方程式は,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - kx$$

である. この式の一般解を求め, 振動の中心・振動の周期を求めよ.



問題 5

(微分方程式の概念, 25点)

- (1) $y(x)$ に対して, 2階の定数係数・非同次・線形常微分方程式の例を1つ挙げよ.
- (2) 「一般解」「特殊解」「特異解」の違いを説明せよ.
- (3) ロンスキー行列式について説明せよ.
- (4) 次の文は微分方程式の分類である. 空欄を埋めよ.

微分方程式は変数が1つしかない (a) 微分方程式と, 変数が2つ以上ある (b) 微分方程式に分けられる. 源項 (source term) があるものを (c) 型微分方程式, ないものを (d) 型微分方程式とよぶが, いずれもすべて紙と鉛筆で解けるとは限らない. 1階の微分方程式については, (e) 法や (f) 法などの名前のついた解法があり, 2階の微分方程式では, (g) 法や (h) 法などの解き方がある.