微分方程式（1 年）**2020** 年度　期末試験

担当：真貝寿明・大島一能　　対象：**IS** 科 **IN** 科 **1** 年　　参照可能物：なし

【重要】 別紙の答案用紙に記入すること．問題用紙は回収しない．
解答順は自由とするが，答案用紙には，どの問題か分かるように記載すること．
答案には，答えだけではなく導出の過程も記すこと．導出の過程にも配点がある．

問題 1 （自然現象のモデル化，20 点）
次の微分方程式を立てよ．各自で導入した記号には説明をつけること．

(1) xy 平面上の各点で，法線の傾きが $\cosh x$ である曲線がみたす微分方程式.

(2) 感染者数の 3 乗の割合で増加していく新型コロナ感染者数を求める微分方程式.

(3) 上記に加えて，感染者数の 2 乗の割合で感染者が回復していく新型コロナ感染者数を求める微分方程式.

(4) 質量 m の落下傘が重力 mg を受けて落下するとき，落下傘の位置 y が満たす運動方程式は,

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg$$

である．さらに，速度の 2 乗に比例する抵抗力が加わるとすると，どのような式になるか.

問題 2 （基本的な微分方程式，30 点）
$y(x)$ に対する次の微分方程式の一般解（初期条件が与えられているものは特殊解）を求めよ.

(1) $y' + 7y = 0,\ \ y(0) = 2$

(2) $y' + 7y = 8e^x$

(3) $y' - 7y = e^{7x}$

(4) $y' - 7y = 50\sin x$

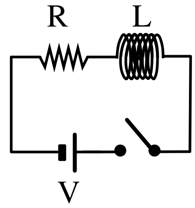
(5) $y'' + 2y' + 5y = 0$

(6) $y'' - 2y' - 8y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 6$

以下の３問のうち，２問を選択して解答せよ．

$\boxed{\text{問題}\,\mathbf{3}}$ （1 階微分方程式の応用，25 点）

抵抗値 R の抵抗とインダクタンス L のコイルで構成される RL 直列回路に，起電力 V（一定）の直流電源を接続し，時刻 $t=0$ でスイッチを入れる．電流 $I(t)$ に関する微分方程式は，



$$V - L\frac{dI}{dt} = RI$$

となる． $I(t)$ を求め，グラフの概形を描け．

$\boxed{\text{問題}\,\mathbf{4}}$ （2 階微分方程式の応用，25 点）

メトロノームの振動を考える．振動の振幅 x を時間 t の関数とすると，$x(t)$ は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

の微分方程式にしたがう．ω は定数である．

(1) $x(t)$ の一般解を求め，一往復する時間（周期）を求めよ．

(2) 時刻 $t=0$ で，$x=x_0$ の位置から，静かに手を離した．$x(t)$ を求めよ．

２つのメトロノームを用意し，$\omega=1$ となるような同じテンポで振動するようにして，スケートボードの上に並べた．メトロノームは互いに振動の影響を及ぼすため，振幅 $x(t)$ は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x + 4\sin t$$

の微分方程式にしたがうことになった．

(3) $x(t)$ の振動を論じよ．また振動のグラフの概形を示せ．

$\boxed{\text{問題}\,\mathbf{5}}$ （微分方程式の概念，25 点）

(1) 「常微分方程式」と「偏微分方程式」の違いを説明せよ．

(2) 微分方程式の特異解とは何か，説明せよ．

(3) 関数の独立性の定義と判定方法を述べよ．

(4) $y(x)$ に対する微分方程式

$$ay'' + by' + cy = 0$$

の特性方程式が

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

の 2 次方程式となることを導け．a, b, c は定数とする．