

相対性理論

アインシュタインはどこまで正しいのか

1. 序論

2. 特殊相対性理論

時間の進み方は観測者によって異なる

$E=mc^2$, 原子核反応, 星の一生

干渉計

GPS

3. 一般相対性理論

時間の進み方は重力によって異なる

ブラックホール, 重力波

光格子時計

真貝寿明 (しんかい ひさあき)

大阪工業大学 情報科学部 教授

武庫川女子大学 非常勤講師

理化学研究所 客員研究員



<http://www.oit.ac.jp/is/shinkai/>

一般相対性理論

強い重力場での時空の力学

「空間が歪むのが重力の正体である」

特殊相対性理論

光の速さに近い場合の力学

「時間の進み方は観測者によって異なる」

ニュートン力学

$$F = ma$$

ニュートン : リンゴはなぜ落ちる？



by Frits Ahlefeldt

<http://hikingartist.com/>



by Frits Ahlefeldt



by Frits Ahlefeldt



by Frits Ahlefeldt



by Frits Ahlefeldt

ニュートン : 万有引力の法則



by Frits Ahlefeldt

<http://hikingartist.com/>

万有引力の法則

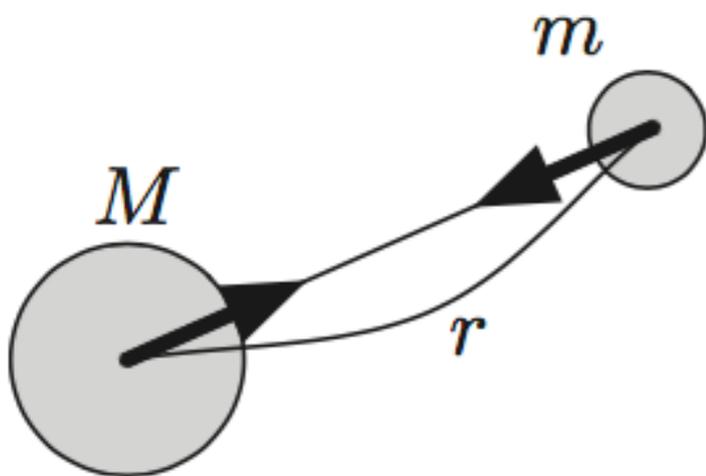
すべてのものは、引力で引き合う

◆ Advanced 万有引力の法則

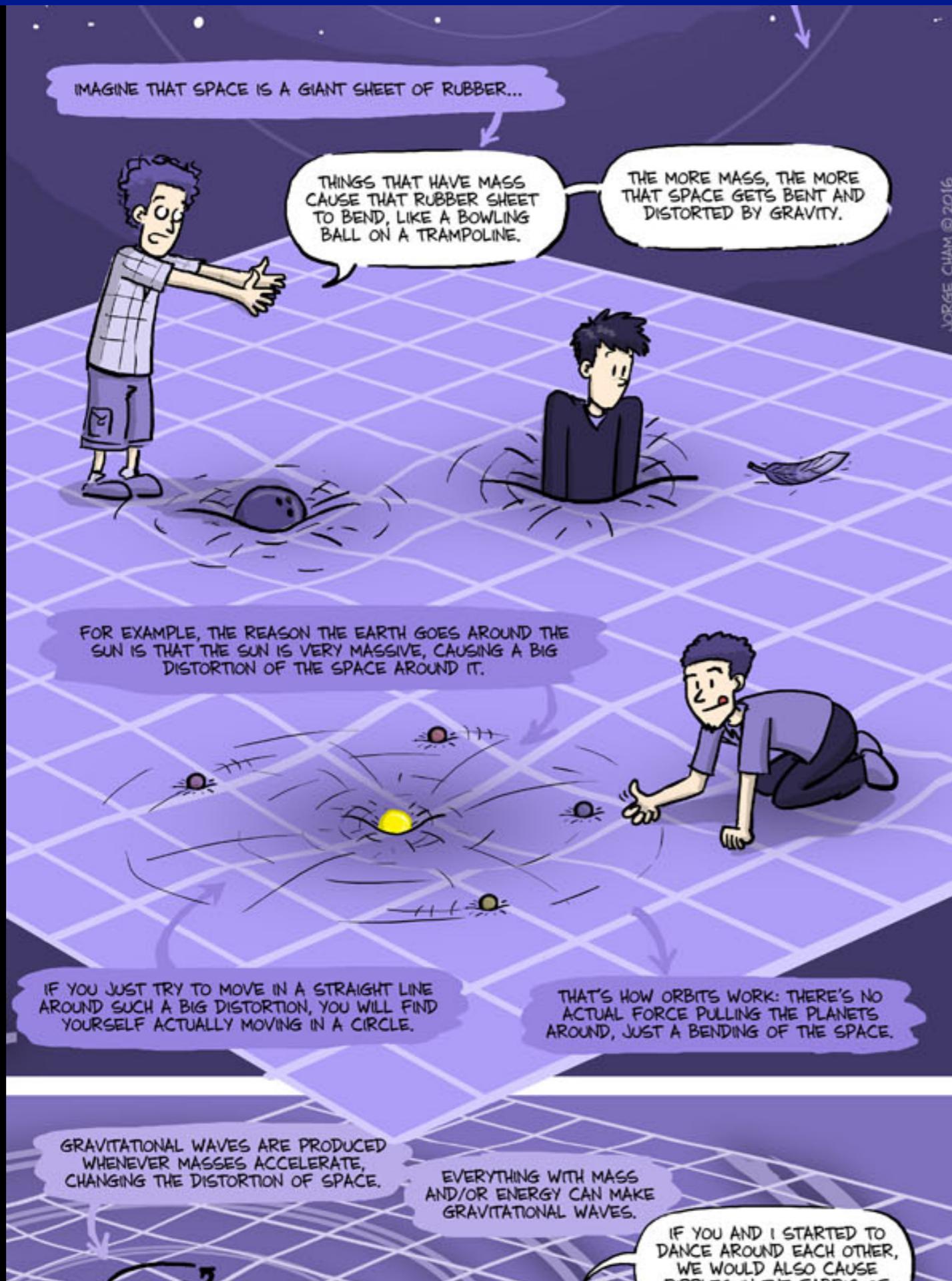
質量 m と M の質点が r だけ離れて置かれているとき、両質点にはたらく力 F は、大きさが

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (2.2)$$

でつねに引力である。 G は定数であり、万有引力定数と呼ぶ。

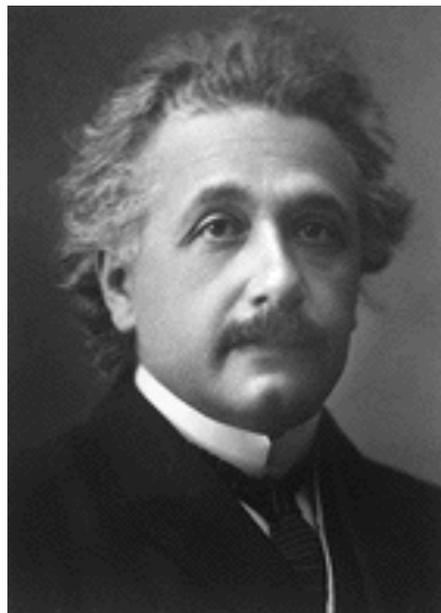


一般相対性理論



空間のゆがみが重力の原因だ

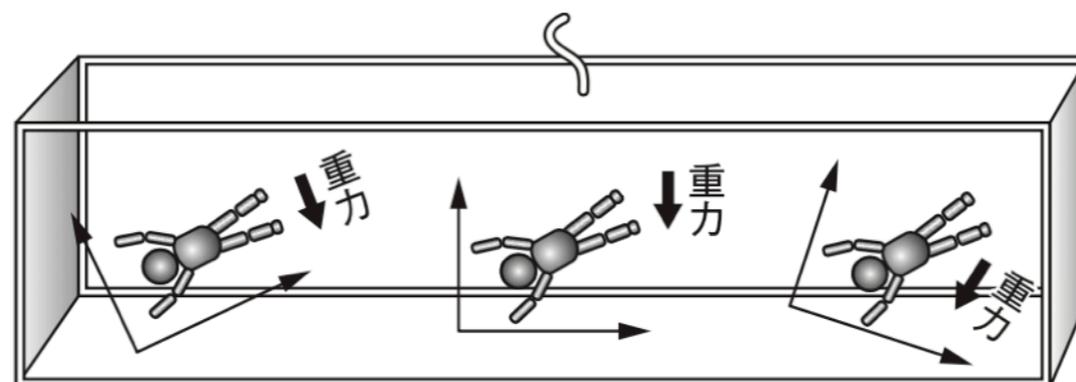
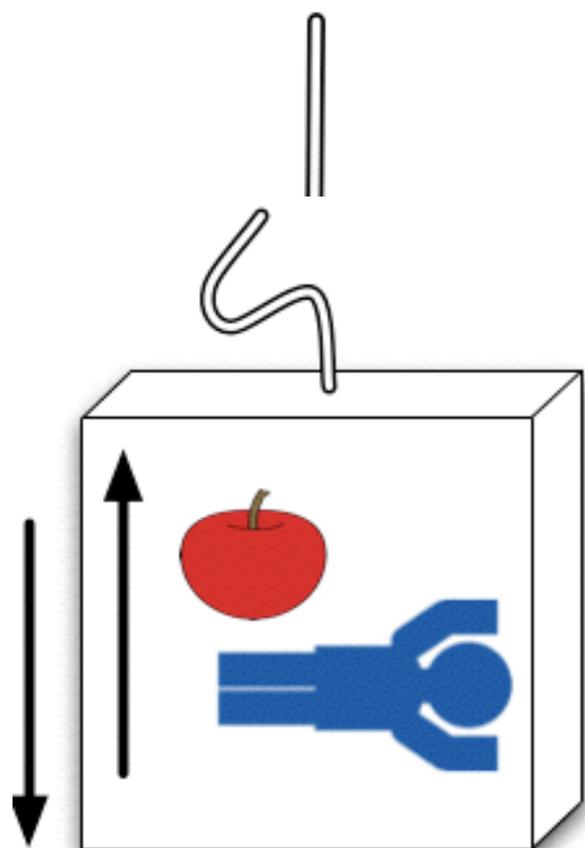
光や物体は、まっすぐ進んでいるつもりでも、曲がって進む



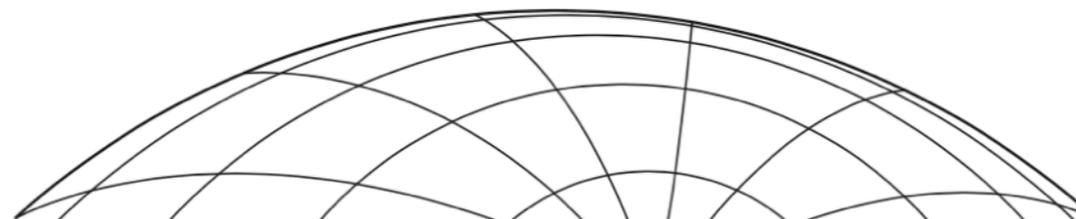
1905年の相対性原理では、等速運動しか扱っていない。
加速度運動する場合の相対性理論はどうなるだろうか。

加速度運動する代表が重力のはたらきだ。
重力の正体はなんだろうか。

自由落下するエレベータ内では、重力がはたらいていることを感じない。
重力の局所的には消すことができるが、大域的には消せない。

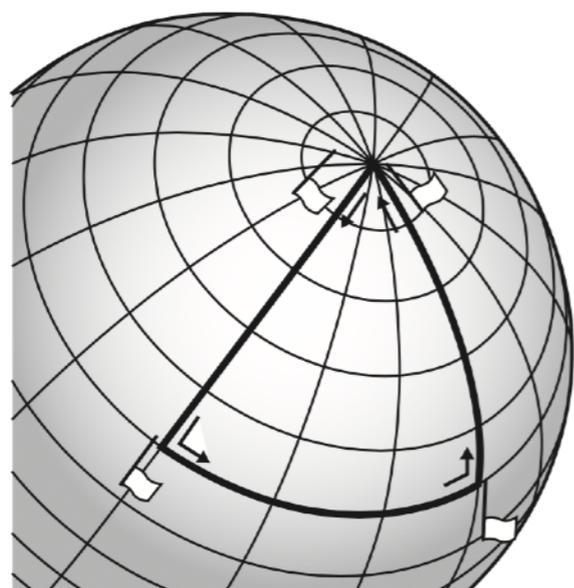


地球の半径ていどの大きさのエレベータだと重力の向きがちがうので、全体で重力を打ち消すことができない。



重力の正体は、空間の性質だ

空間のゆがみが
重力の正体だ



正の曲率 (地球表面)

4次元距離を一般化

計量 (metric)

Σ記号省略
(上下添字が同じなら和をとる)

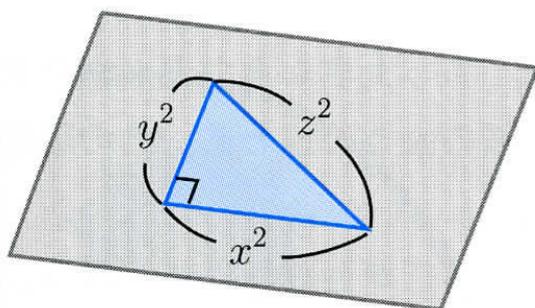
$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{tx} & g_{ty} & g_{tz} \\ & g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ & & g_{yy} & g_{yz} \\ sym. & & & g_{zz} \end{pmatrix}$$

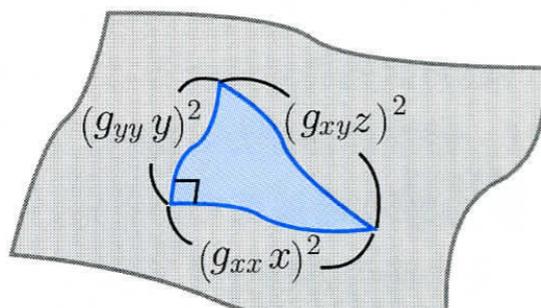
時空の曲がりを表す計量 $g_{\mu\nu}$

平らな面ではピタゴラスの定理が成り立つ。

曲がった空間でも成立するために計量関数で調整する。



$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$



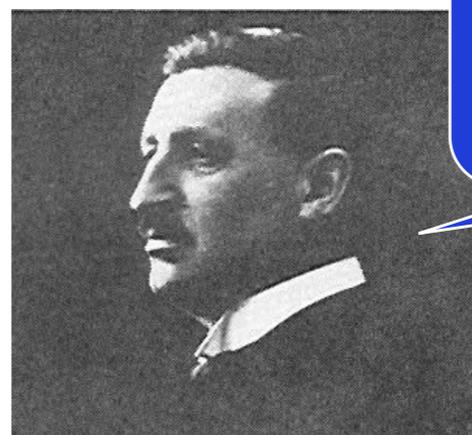
$$(g_{xx}x)^2 + (g_{yy}y)^2 - (g_{xy}z)^2 = 0$$

このように、曲がり具合は関数 $g_{\mu\nu}$ に押し付けて表すことができる。アインシュタイン方程式は、3次元空間+時間の4次元の曲がり $g_{\mu\nu}$ を解く方程式である。

平坦な時空 (ミンコフスキー時空) ならば

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \end{aligned}$$

物理学者は、リーマン幾何学に深入りしないほうがいいよ。



Marcel Grossmann

計量 (metric)

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

計量は添字mu, nuに対して対称：10成分

Christoffel記号 $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \sum_{\beta=0}^3 \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} \right)$ 40成分

Riemann テンソル $R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \sum_{\sigma=0}^3 \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma_{\nu\beta} - \sum_{\sigma=0}^3 \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\nu\alpha}$ 21成分

Ricci テンソル $R_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=0}^3 R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$ 10成分

Ricci スカラー $R = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ スカラー



これらを物理と結び付

弱い重力場ときには、Newton力学に帰着する式を...

一番シンプルな式が物理の式だ

重力場の方程式の導出は、紆余曲折し、アインシュタイン自身も最終的な式に達したのは、直前だった。1915年11月は1週間おきに学士院で途中経過を発表し、その翌週には報告として論文を書き、自宅にこもりきりで計算を続けていた。というのも、10月になって、それまでの考えが間違っていたことに気がついたからだ。

その年の夏（**6月28日ー7月5日**）、アインシュタインはヒルベルトに招かれて、ゲッティンゲンで2時間の講義を6回行った。ヒルベルトはアインシュタインの考えをよく理解してくれたことで、アインシュタインも上機嫌だった。この段階での重力理論は、しかし、まだ未完成で、アインシュタイン自身も満足のものではなかった。**弱い重力のときには、ニュートンの理論に戻るような理論にはなっていたが、方程式がこの形に限られる、とするような数学的な裏付けがなかった**からだ。重力場の問題は簡単に実験で確かめられるものではないため、誰もが納得できるような「真理」であることを証明するためには、何らかの納得できる論理が欲しかったのである。

アインシュタインが、後にゾンマーフェルトに宛てた書簡では、10月の時点で、これまでの論文では「回転する座標系が正しく扱えていなかった」「理論的に得られた水星の近日点移動の値が観測値の半分でしかない」そして「重力場の方程式が『共変性』をもたないと考えていたことは誤りだった」と問題点を述べている。



重力場の方程式の導出は、紆余曲折し、アインシュタイン自身も最終的な式に達したのは、直前だった。1915年11月は1週間おきに学士院で途中経過を発表し、その翌週には報告として論文を書き、自宅にこもりきりで計算を続けていた。というのも、10月になって、それまでの考えが間違っていたことに気がついたからだ。

(中略)

1915年**11月4日の論文**では、座標系に制限をおいた上で、重力場の方程式を得た。

翌週**11日の論文**ではこの座標条件を出発点とすることを主張する

(2週間後の論文では撤回する)。次週**18日の論文**では、水星の近日点移動の値が(以前得た値の倍の)100年間に43秒角になるという正しい値を得た(当時観測から知られていた値は45秒角±5秒角だった)。この値を得たときには「心臓の鼓動(palpitation)を感じた」と述懐している。また、この論文には半ページだけ使って「太陽のそばを通過する光は、重力によって、(以前得た値の倍の)1.7秒角だけ湾曲する」とも述べている。

(中略)

アインシュタインは演繹的方法で得られた重力場の方程式を**25日に投稿して受理される**。アインシュタインの論文は、12月2日に出版された。



一般相対性理論 (1915年)



重力の正体は、空間の性質だ

空間のゆがみが
重力の正体だ

重力場の方程式 (アインシュタイン方程式, 1915年)

重力の正体は、時空の歪みである。その関係は、次の式で表される。

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R}_{\text{時空の歪み}} = \frac{8\pi G}{c^4} \underbrace{T_{\mu\nu}}_{\text{質量の分布}}$$

左辺はリーマン幾何学にもとづいて時空がどのように曲がっているのかを表している。右辺は物体がどのように分布しているのかを表す量である。

空間の曲がりモノの運動を決める \Leftrightarrow モノがあると空間が曲がる

アインシュタイン曲率テンソル
<空間の歪み>

エネルギー運動量テンソル
<モノの分布>

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &\equiv \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_{\nu}g_{\beta\mu} + \partial_{\mu}g_{\beta\nu} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu}) \\ R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} &\equiv \partial_{\alpha}\Gamma_{\nu\beta}^{\mu} - \partial_{\beta}\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} + \Gamma_{\sigma\alpha}^{\mu}\Gamma_{\nu\beta}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\beta}^{\mu}\Gamma_{\nu\alpha}^{\sigma} \\ R_{ab} \equiv R^{\mu}_{a\mu b} &\equiv \partial_{\mu}\Gamma_{ab}^{\mu} - \partial_b\Gamma_{a\mu}^{\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^{\mu}\Gamma_{ab}^{\nu} - \Gamma_{\nu b}^{\mu}\Gamma_{a\mu}^{\nu} \\ R &= g^{ab}R_{ab} \end{aligned}$$

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_{\mu}u_{\nu} + pg_{\mu\nu}$$

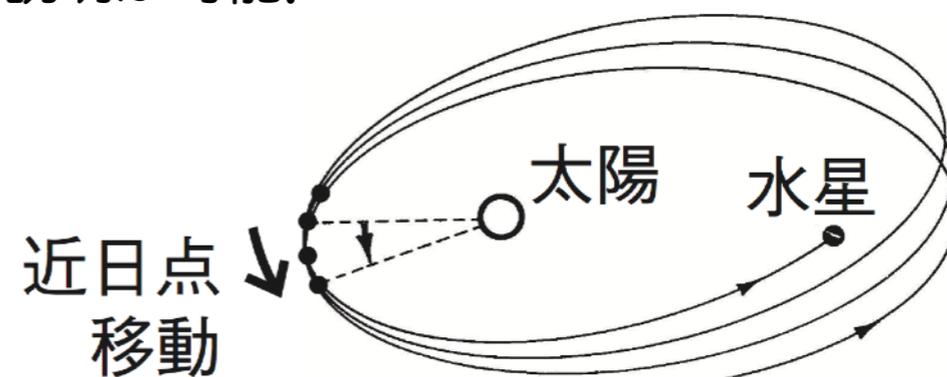
一般相対性理論が説明するもの



水星の近日点移動の問題 (ルベリエ, 1854)

100年で574秒角ずれる。2250世紀で完全な「ばら模様」。
→→金星の影響で277秒角, 木星で153秒角, 地球で90秒角,
その他の惑星で10秒角分の説明が可能。

残りの43秒角は???



「2-3日間, 興奮のため,
我を忘れてしまった」

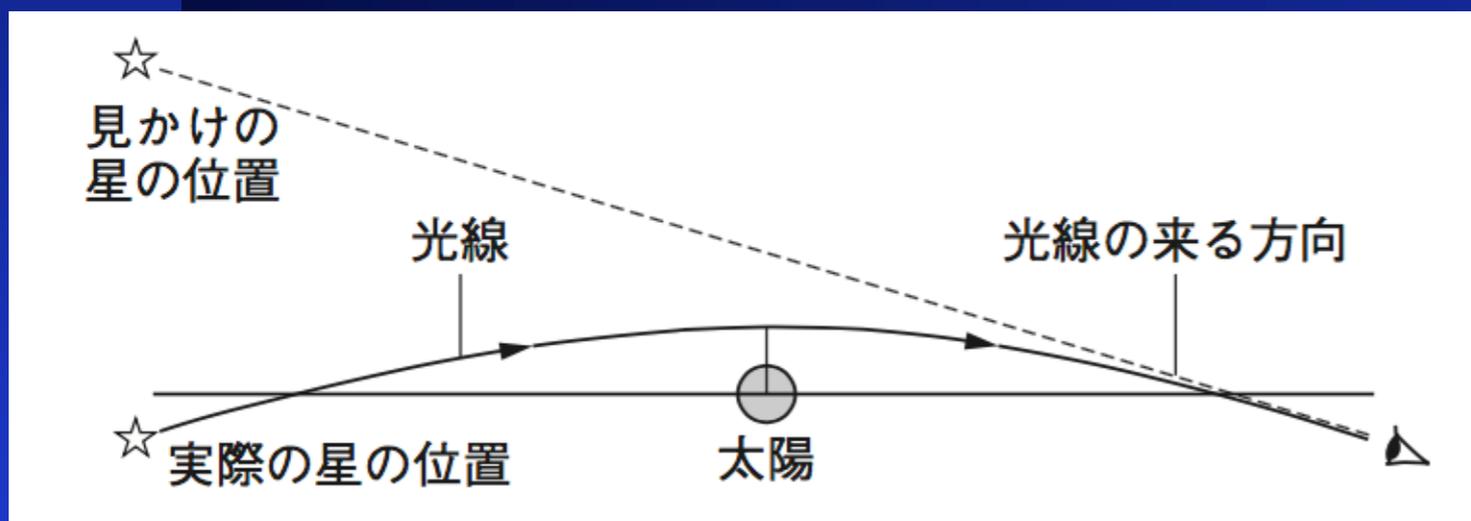
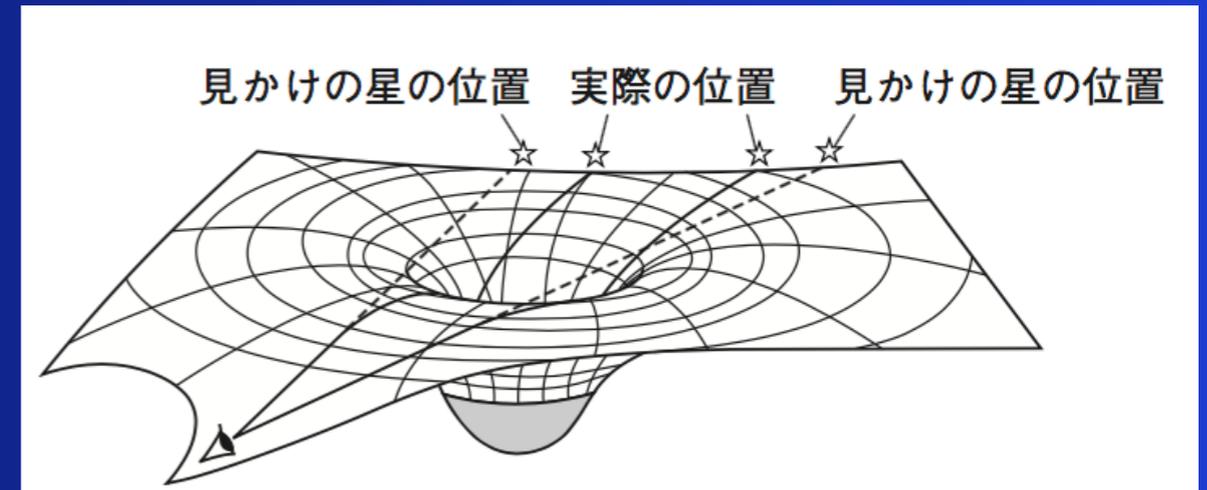
1915年, アインシュタインが, できたばかりの一般相対性理論を適用すると, 「43秒角の歳差運動」が出てきた。

一般相対性理論が予言したもの

- 重力によってゆがんだ空間では, 光の経路も曲がる
- 重力によってゆがんだ空間では, 時間の進み方は遅くなる。
- 強い重力のもとでは星はつぶれ続ける。
- 宇宙全体は動的でなければならない。
- 重力波が宇宙空間を伝わる

一般相対性理論の予言【光の曲がり】

光は時空を直進するが、重い天体の周りでは、時空の歪みにより、曲がって進むことになる。



1919年、エディントンが、皆既日食を利用して、光の曲がりを確認（0.875秒角）

一般相対性理論は正しい

Taken from the 22 November 1919 edition of the Illustrated London News.

Coverage in the (more excitable) New York Times.

LIGHTS ALL ASKEW IN THE HEAVENS

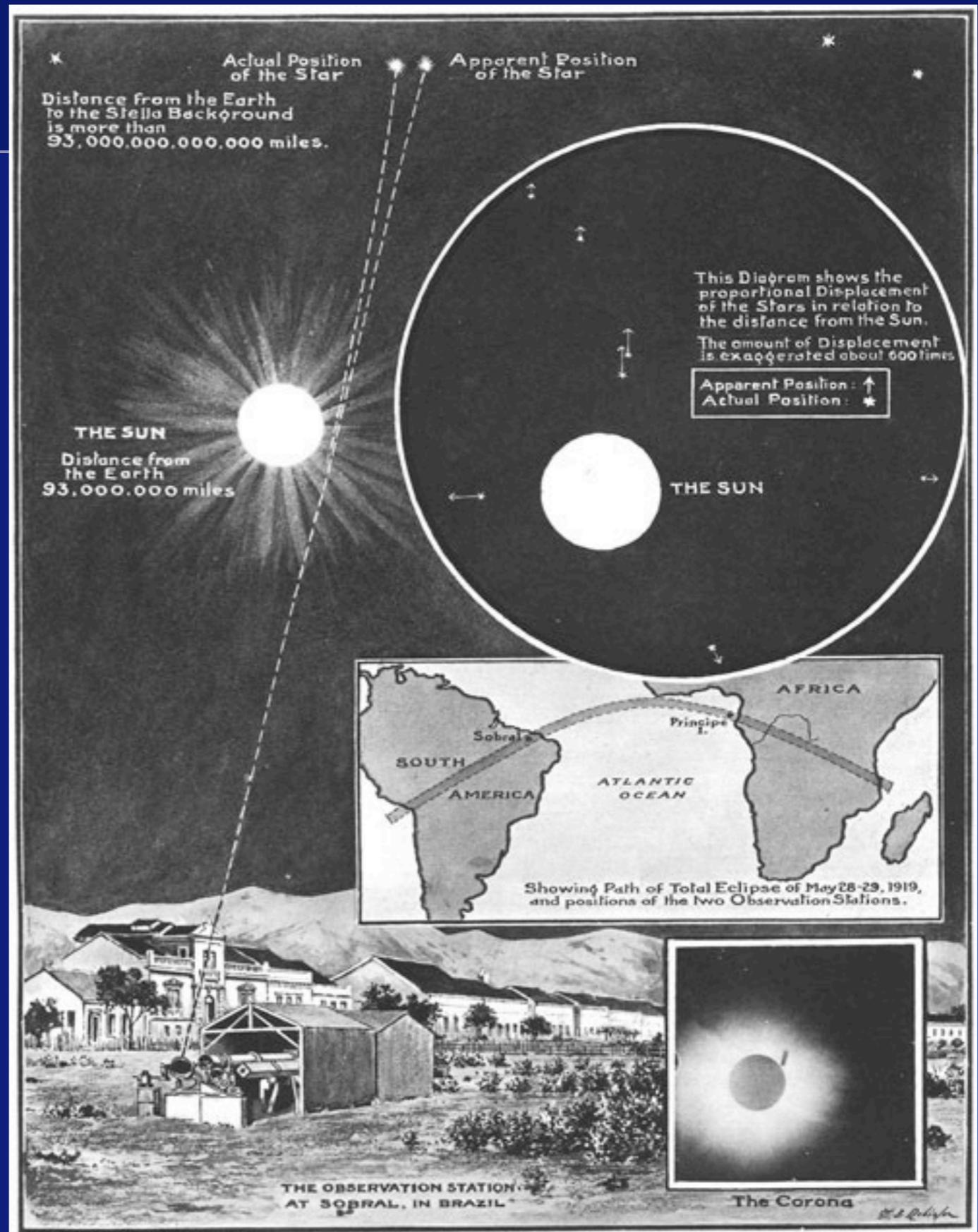
Men of Science More or Less
Agog Over Results of Eclipse
Observations.

EINSTEIN THEORY TRIUMPHS

Stars Not Where They Seemed
or Were Calculated to be,
but Nobody Need Worry.

A BOOK FOR 12 WISE MEN

No More in All the World Could
Comprehend It, Said Einstein When
His Daring Publishers Accepted It.



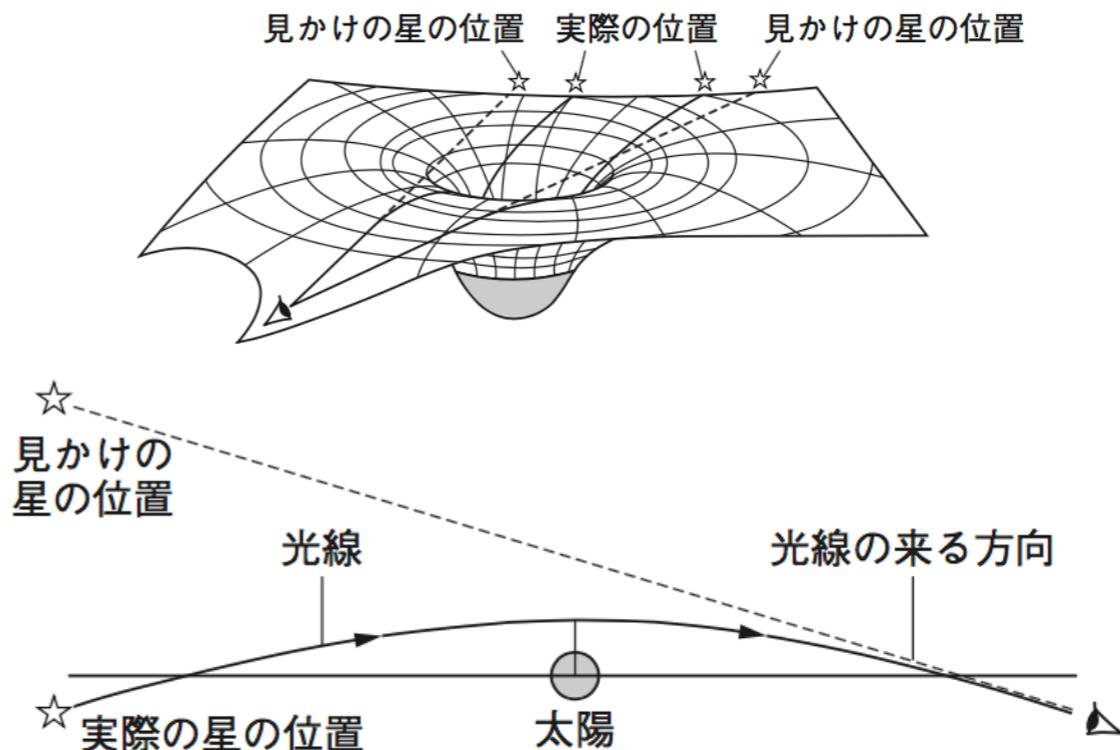
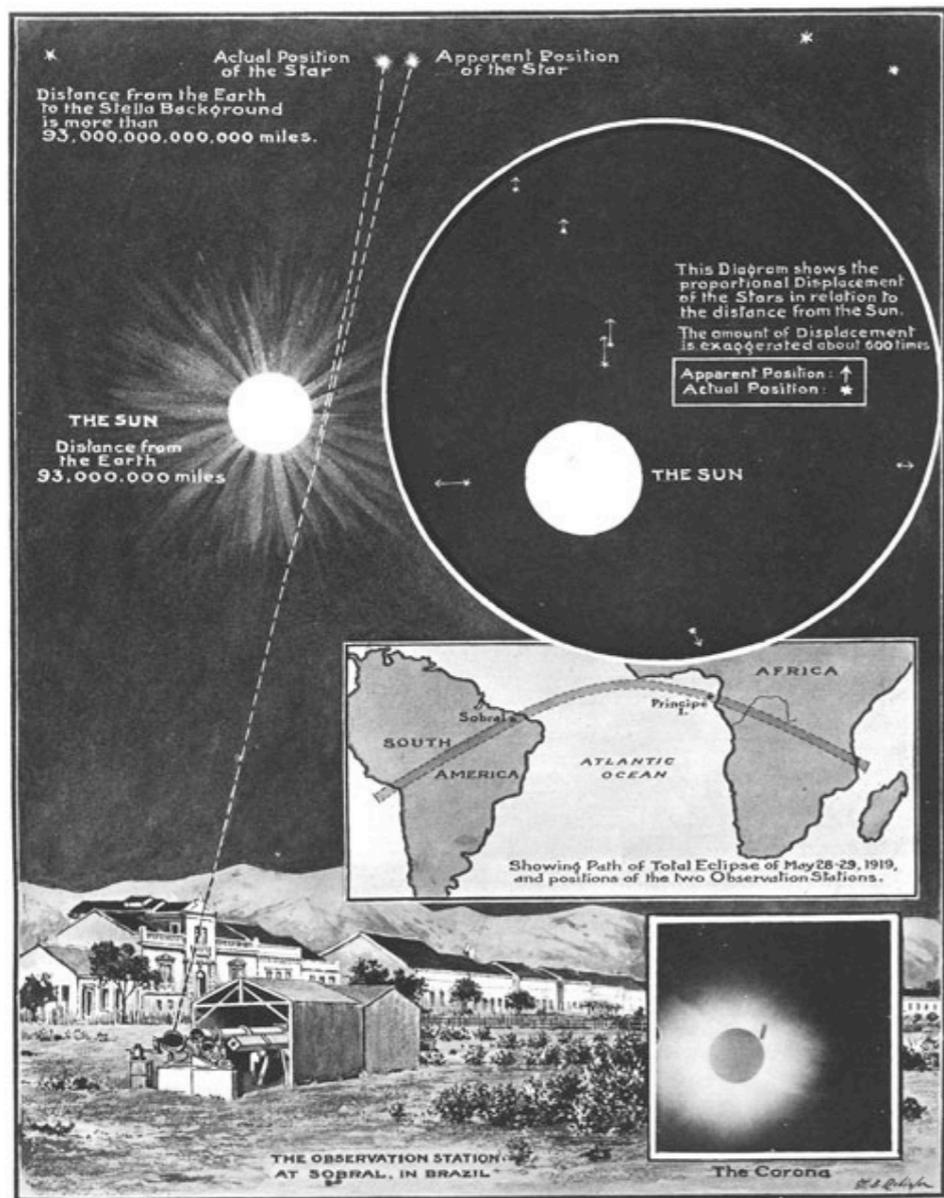


Arthur Stanley Eddington
(1882–1944)

He was an early advocate of Einstein's General Relativity, and an interesting anecdote well illustrates his humour and personal intellectual investment: Ludwig Silberstein, a physicist who thought of himself as an expert on relativity, approached Eddington at the Royal Society's (6 November) 1919 meeting where he had defended Einstein's Relativity with his Brazil-Principe Solar Eclipse calculations with some degree of scepticism and ruefully charged Arthur as one who claimed to be one of three men who actually understood the theory (Silberstein, of course, was including himself and Einstein as the other two). When Eddington refrained from replying, he insisted Arthur not be "so shy", whereupon Eddington replied, **"Oh, no! I was wondering who the third one might be!"**

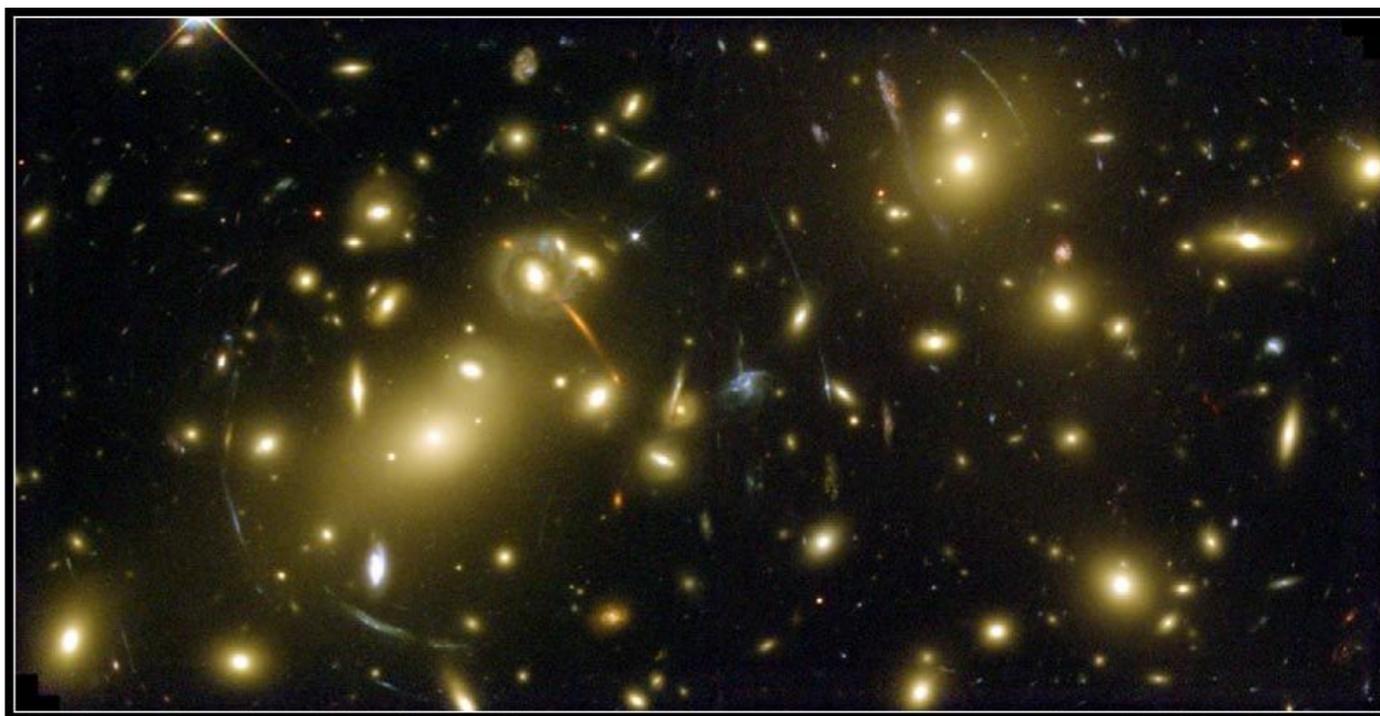
一般相対性理論が予言した「重力レンズ」

- 重力によってゆがんだ空間では、光の経路も曲がる



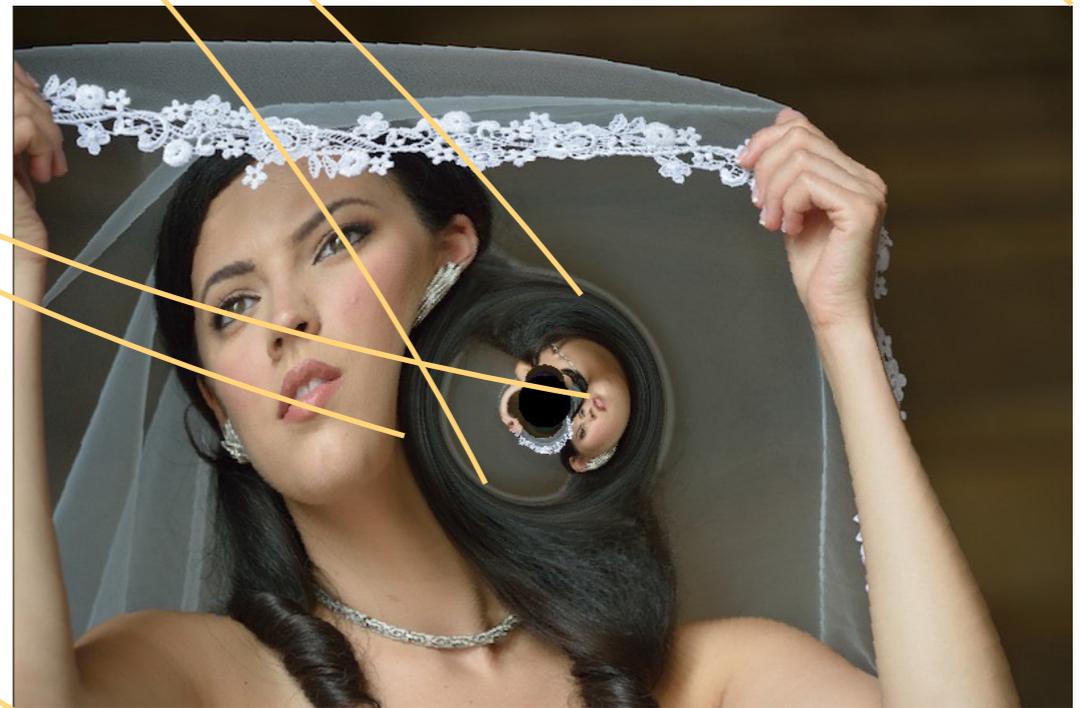
1919年5月の皆既日食で
太陽のすぐ近くにみえる星の位置が
普段の位置とずれていた

重力レンズ効果として観測される▶



Galaxy Cluster Abell 2218

HST • WFPC2



ブラックホールの周りで
光は曲がる



大阪工業大学 元学長 井上正崇 名誉教授

2015年8月 工学実感フェアにて撮影, 重カレンズプログラムで画像処理



大阪工業大学 前学長 西村泰志 教授

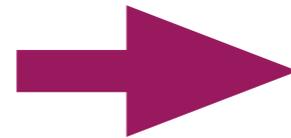
2015年8月 工学実感フェアにて撮影, 重カレンズプログラムで画像処理

Einstein方程式を解く = 時空の計量を決めること

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

- (1) 時空の対称性を決める (変数を決める)
- (2) 物質の種類・構成・配置を決める
- (3) 境界条件を決める

- (1) 球対称・静的
- (2) 真空, 1点だけ質量
- (3) 漸近的平坦



Schwarzschild解
(ブラックホール解)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{a}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

- (1) 球対称
- (2) $p=p(\rho)$
- (3) 一様等方的時空構造



Friedman解
(膨張宇宙解)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right\}$$

Schwarzschild解を導出せよ

課題 3.1. 【Schwarzschild 解の導出】

(3.11) を Einstein 方程式から導出しよう。球対称時空の計量 $g_{\mu\nu}$ として

$$ds^2 = -e^{p(r)} c^2 dt^2 + e^{q(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.10)$$

の形を仮定する。以下では

$$x^0 = ct, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi \quad (3.11)$$

とする。 $g_{\mu\nu}$ の成分で 0 でないものは以下のものである。(添え字の上付き・下付きに注意せよ。)

$$g_{00} = -e^{p(r)}, \quad g_{11} = e^{q(r)}, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta, \\ g^{00} = -e^{-p(r)}, \quad g^{11} = e^{-q(r)}, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$$

物質分布は、原点以外は真空とする (Einstein 方程式の右辺 $T_{\mu\nu} = 0$ とする)。 $p(r)$, $q(r)$ は Einstein 方程式を解いて決める。但し、 $r \rightarrow \infty$ で式 (3.10) の平坦な時空の計量に一致させるため、この極限で $p(r)$, $q(r)$ は 0 になるとする。

- (1) Christoffel 記号 $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ のなかで 0 でないものを求めよ。
- (2) $T_{\mu\nu} = 0$ なので、(3.4) は、 $R_{\mu\nu} = 0$ を解くことと等価になる。独立な方程式を 3 本導け。

得られた式から $\frac{dp}{dr} = -\frac{dq}{dr}$ が得られ、積分して $p = -q$ となる ($r \rightarrow \infty$ で p, q は 0 だから積分定数は 0)。

- (3) p, q を求め、 g_{00}, g_{11} を求めよ。

Schwarzschild解を導出せよ

(1) 次の成分がゼロではない。

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2} \frac{dp}{dr}, & \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} e^{p-q} \frac{dp}{dr}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{dq}{dr}, & \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-q}, \\ \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta e^{-q}, & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\end{aligned}$$

(2) 独立な方程式は次の3個となる。

$$R_{00} = e^{p-q} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{dp}{dr} - \frac{dq}{dr} \right) \frac{dp}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} \right\} = 0 \quad (3.16)$$

$$R_{11} = -\frac{1}{2} \frac{d^2 p}{dr^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{dp}{dr} - \frac{dq}{dr} \right) \frac{dp}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dq}{dr} = 0 \quad (3.17)$$

$$R_{22} = 1 - e^{-q} \left\{ 1 + \frac{r}{2} \left(\frac{dp}{dr} - \frac{dq}{dr} \right) \right\} = 0 \quad (3.18)$$

($R_{33} = \sin^2 \theta R_{22}$, これ以外の $R_{\mu\nu}$ は0.)

(3) 式(3.18)に代入して

$$1 - e^p \left(1 + r \frac{dp}{dr} \right) = 1 - \frac{d}{dr} (r e^p) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr} (r e^p) = 1$$

積分定数を $-a$ とすれば,

$$r e^p = r - a \quad \Rightarrow \quad e^p = 1 - \frac{a}{r}, \quad e^q = e^{-p} = \left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-1}$$

テンソル計算ソフトウェア リーマンテンソルが一瞬で計算できる

真貝 寿明

筆者はこれまで、一般相対性理論のテンソル計算で、Mathematica と Maple の 2 つを使い、独自のスクリプトで Riemann テンソル・Ricci テンソル・Weyl テンソルなどを計算してきた。今回の執筆依頼を契機に、テンソル計算の「お助けソフト」をサーベイしてみた。最近では、無料で公開されているソフトウェアや市販されているアプリケーションを強化するスクリプトも増えていて、結構使えそう。これまで知らなかったことが悔やまれる。

Einstein 方程式を習った後に学生に出される宿題は、おそらく世界中の大学でどこでも共通に、「Schwarzschild が求めたように、球対称真空解を求めてみよう」という問題（本稿 §3）であろう。計量を仮定し、Christoffel 記号を求め、Ricci テンソルを計算し、Einstein テンソルを導出する、という地味で長い長い長い長〜い計算に、一晩以上費やされた方も多だろう。計算機的能力も上がった現在では、この作業が 1 秒以内に終了する、素晴らしい時代である。

本稿の目的は数々のソフトウェアの優劣を比較することではなく、いくつか特徴のあるものの「紹介」である。また、一般相対性理論での応用にや偏った紹介であることをご容赦いただきたい。

1. 数式処理ソフトウェア

以前、本誌では「数式処理とその周辺」という特

集が組まれた（1998 年 11 月号）。その後、GNU プロジェクトによって、善意のプログラマによるソフトウェアのオープンソース化が進み、Linux OS マシンが普及した。また、Macintosh OS の基盤が OS X の登場から Unix ベースになっている（つまり、Mac OS X では Linux で開発されたソフトウェアが利用できる）。

大きく環境が変化したが、現在でも代表的な数式処理アプリケーションとして、Mathematica¹⁾ と Maple²⁾ の 2 つを両横綱として挙げることに誰しも異存はないだろう。高価ではあるが、どちらも改良が継続的に行われていて、使えるプラットフォームも Linux/Unix/Mac OS X/Windows をカバーしている。どちらも、微分・積分をはじめとする数式処理計算、グラフや動画による可視化、プログラミング機能、 \LaTeX 出力を含む文書作成機能をサポートしている。

他の汎用数式処理システムとして、現在でも定期的に更新されているものには、商用のものに MATLAB³⁾、オープンソースのものに GNU Octave⁴⁾、REDUCE⁵⁾、Sage⁶⁾、Maxima⁷⁾ などがある。

基本的には、ベクトルや行列の構造体が定義できて微積分計算がサポートされていればテンソル計算のスクリプトを記述することができる。学生にとってはよいプログラミング問題にもなる。

しかし、ここで本稿を終えずに、ブラックホールの計算例を使って、もう少し具体的なツールを紹介することにしよう。

2. Einstein 方程式とテンソル

Einstein は、重力の正体を時空の歪みで説明する一般相対性理論を構築した。強い重力のため、光さえも脱出できないブラックホールは、一般相対性理論で予言される天体である。

Einstein 方程式は、時空の計量テンソル (metric) $g_{\mu\nu}$ を求める式である。計量とは座標を x^μ ($\mu = 0, 1, \dots, n-1$) としたとき (0 番目の成分 x^0 は時間に光速を乗じた ct , 他は空間座標を示す)、2 点間の距離を表すときの係数に相当するものだ。時空での 2 点間の微小距離は

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1)$$

となる。以後、Einstein の記法にしたがって上下に同じ添字があるときは和を取ることにしてシグマ記号を略す。すなわち、(1) を $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ と表すことにする。 $g_{\mu\nu}$ は添字 μ と ν について対称なので n 次元時空では $n(n+1)/2$ 個の独立な成分をもつ。

あるベクトル $A^\alpha(x^\mu)$ の微分 $\frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\alpha (\equiv \partial_\mu A^\alpha)$ を曲がった空間で考えるときには、空間の曲がりによる変化を加えた微分を定義する必要がある。このような微分を共変微分⁸⁾ といひ、

$$\nabla_\mu A^\alpha \equiv \partial_\mu A^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A^\nu \quad (2)$$

として表される。 $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ は、Christoffel 記号と呼ばれるもので、計量の微分から

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\nu g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \quad (3)$$

として計算される。 $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ は添字 μ と ν について対称なので n 次元時空では $n^2(n+1)/2$ 成分ある。

共変微分はテンソルに対しても定義され、例えば 2 階の共変テンソル $B_{\alpha\beta}$ に対しては、

$$\nabla_\mu B_{\alpha\beta} \equiv \partial_\mu B_{\alpha\beta} - \Gamma_{\mu\alpha}^\nu B_{\nu\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^\nu B_{\nu\alpha} \quad (4)$$

である。計量に対しては、次式が成り立つ。

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0. \quad (5)$$

空間の曲がり具合を示す Riemann 曲率テンソル $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ は、時空の 1 点の周りでベクトル A^α を 1 周させたとき、どれだけ元とずれるかを表す量として

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) A^\alpha = -R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} A^\beta \quad (6)$$

として定義される。具体的には、

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha + \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\sigma \quad (7)$$

となる。Riemann テンソルの独立な成分は n 次元時空では $n^2(n^2-1)/12$ である。

Einstein は、Riemann テンソルの足を縮約してつくられる

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}, \quad (8)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (9)$$

で定義された Ricci テンソル $R_{\mu\nu}$ と曲率スカラー R を組み合わせた

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (10)$$

が、重力場の方程式に登場すると洞察した。物質分布を表すエネルギー運動量テンソルを $T_{\mu\nu}$ とすると、Einstein 方程式は、

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (11)$$

となる。 Λ は後に加えられた宇宙項であり、 κ^2 は弱い重力場の極限で Newton 力学と一致するようにして定められる定数である。時空が 4 次元 ($n=4$) ならば、(11) は全部で 10 本の 2 階の偏微分方程式で、非線形な楕円型と双曲型の組み合わせである。(11) からブラックホールや膨張宇宙を表す解が得られることになる。

3. ブラックホール解の具体的な計算

ここでは、時空が 4 次元で、球対称で静的であると仮定して、ブラックホール解を導く過程をみてみよう。時空が球対称で静的であるとすれば、計量は球座標 (t, r, θ, ϕ) を用いて

ベースとなるアプリケーション	スクリプト名	A/C	備考	url	ref.
Mathematica ¹⁾	MathTensor	AC	有料, 1994年登場. 英語版マニュアルも書籍として入手できるが, 最新版への対応はない.	⁸⁾	⁹⁾
	RGTC	C	無料, 2013年5月が最新版. (本稿 §5.1 参照)	¹⁰⁾	
	xAct	AC	無料, 2004年登場. マニュアルも充実, 多くの研究者が精力的に更新. (本稿 §5.2 参照)	¹¹⁾	¹²⁾
	CARTAN	C	1995年発表, 2005年頃まで更新された.		¹³⁾
Maple ²⁾	GRTensorII	C	無料, 1992年登場. 最新版 Maple への対応はない.	¹⁴⁾	
	Differential Geometry	AC	Maple に ver.11 以降組み込まれているもの.	¹⁵⁾	¹⁶⁾
Mathematica/Maple	Atlas2	C	有料, 微分幾何学計算を中心にしたパッケージ. 最新版対応.	¹⁷⁾	
Sage ⁶⁾	SageManifolds	C	無料, 2014年に登場. (本稿 §5.3 参照)	¹⁸⁾	¹⁹⁾
単独 (Linux/Mac OS)	Cadabra	A	無料, 場の理論計算を目的に開発. L ^A T _E X 形式で入出力可. (本稿 §5.4 参照)	²⁰⁾	²¹⁾
単独 (要 JDK7 と Groovy)	Redberry	A	無料, 2013年登場, テンソル計算全般を目的に開発. L ^A T _E X 形式で入出力可.	²²⁾	²³⁾

表 1 最近の主なテンソル計算ツール. Mathematica, Maple, Maxima など汎用数式処理システムでもテンソル計算は可能だが, ここでは特化したツールを挙げる. A/C の欄は, A:抽象的計算対応 (abstract calculus) か C:成分計算対応 (component calculus) かを示す. これより網羅的なリストはウェブサイト²⁴⁾などを参照されたい.

$$ds^2 = -e^{f(r)}c^2dt^2 + e^{g(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (12)$$

となる. これから, $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ を計算し, $R_{\mu\nu}$ を計算し, $G_{\mu\nu}$ を計算して (11) の左辺に代入する. そして, 真空 ($T_{\mu\nu} = 0$) かつ宇宙項ゼロ ($\Lambda = 0$) と仮定すれば, $f(r)$ と $g(r)$ についての微分方程式が得られる. この方程式を無限遠方で漸近的に平坦であると仮定して得られる解は,

$$ds^2 = -(1 - \frac{2GM}{rc^2})c^2dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2GM/rc^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (13)$$

となる. これが Schwarzschild が得た解で, 後に質量 M のブラックホール解と判明した.

(13) より, この解は, $r = 2GM/c^2$ と $r = 0$ で特異性を持つ. 前者はブラックホールの地平面の位置で後者は原点の特異点である. 曲率の絶対値の尺度として, Kretschmann 不変量 I

$$I = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (14)$$

を計算すると, $I = 48G^2M^2/c^4r^6$ となるので,

地平面のところでは特異性はないことがわかる.

ブラックホール時空での物体 (質点) の運動方程式は, (13) の計量から計算された Christoffel 記号を用いて,

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = -\Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} \quad (15)$$

となる. τ は質点の固有時を表すパラメータである.

4. テンソル計算ツールの簡単な歴史

上記で紹介したような, 解くべき Einstein 方程式を求める過程や, Einstein 方程式の解が与えられたときに, その解の性質や物質の動きを知ろうとすると, 地味な計算が必要になる. 現在流通している主なテンソル計算ツールを表 1 にまとめたが, これらのほとんどが一般相対性理論の研究者によって作成されている.

相対性理論で, このような計算ツールを初めて作成したのは, Fletcher である (1965年)²⁵⁾. GEOM と呼ばれたツールは Lisp 言語で書かれた. その後, d'Inverno がアセンブラ LAP で書いた ALAM

(1969年), Lisp で書いた CLAM (1974年) を開発し, 80年代には, それらを発展させた SHEEP, CLASSI, STENSOR と, REDUCE や MAPLE が登場する. こうしたツールは, 複雑な Einstein 方程式の計算や解の確認・分類に欠かせないものになっていった. このあたりの歴史は文献²⁶⁾を参照されたい.

さて, テンソル計算には 2 種類ある. 1 つは, (12) や (13) のように具体的な計量が与えられたときに, 曲率テンソルや運動方程式を計算するもので, いわば「成分を与えて微分計算をする」代数計算である. もう 1 つは「(5) が成立することを示す」というような, 抽象的な代数計算である. 表 1 では, 前者に対応するものを C, 後者に対応できるものを A として分類してみた.

(5) を示そうと (4) の計算をはじめると, 我々は項ごとに, Γ_{bc}^a の添字が矛盾しないように置き換え操作をしなければならないことに気づく. 抽象的な計算に対応するためには, このような添字操作を自動化する工夫が必要になる. 例えば, GRTensorII はこの機能をサポートしていないが, MathTensor や xAct (§5.2) はサポートしている.

5. テンソル計算ツールを使った計算例

5.1 RGTC

ギリシャ・デモクリトス大学の Sotirios Bonanos が無料で公開している RGTC (Riemannian Geometry & Tensor Calculus)¹⁰⁾ は, Mathematica¹⁾ で動作するスクリプトである. *1)

サイト¹⁰⁾ から, パッケージをダウンロードしたら, EDCRGTCcode.m ファイルを所定の場所に置く (Mathematica で \$Path として出てくるフォルダリストの中のどこかに, このファイルを置く) ことで準備終了だ. 使い方は, Mathematica のシートで,

```
<< EDCRGTCcode.m
```

*1) ちなみに彼は Exterior Differential Calculus (EDC), Graded Exterior Differential Calculus (superEDC) も公開している.

とパッケージをロードすればよい.

例として, Schwarzschild 解 (13) の Kretschmann 不変量 I (14) を計算するシートを図 1 に示す.

```
In[1]:= << EDCRGTCcode.m

(* Schwarzschild coordinate *)
xCoord = {t, r, \theta, \phi};
g = DiagonalMatrix[
  {-(1 - 2M/r), 1/(1 - 2M/r),
   r^2, r^2 Sin[\theta]^2}];
simpRules = TrigRules;
RGtensors[g, xCoord]

(* Kretschmann Rijkl*Rijkl *)
RUUUU = Raise[RUddd, 2, 3, 4];
Kretschmann = 0;
Do[
  Do[
    Do[
      Kretschmann = Kretschmann
        + RUUUU[[i, j, k, l]] Rddd[[i, j, k, l]]
        , {i, 1, Dim}]
      , {j, 1, Dim}]
      , {k, 1, Dim}]
      , {l, 1, Dim}]
  Kretschmann
```

図 1 RGTC を使って Schwarzschild 解 (13) の Kretschmann 不変量 I (14) を計算する Mathematica シート. 後半は自分で準備したが, これだけで済む!

4次元時空の計量であれば Petrov 分類もしてくれる*2) し, 高次元でも自動で計算してくれる. 実に簡単で, 迅速だ.

5.2 xAct

José M. Martín-García が 2004 年に発表した xAct¹¹⁾ も, Mathematica¹⁾ で動作するスクリプトである. 彼は一般相対性理論の研究者だったが, 現在の所属は Wolfram 社のようだ.

xAct は, 基本的な 4 つのパッケージ (xCore, xPerm, xTensor, xCoba) から構成され, 成分計

*2) RGTC で定義された Classify の機能は, Mathematica10 から, Mathematica の関数として別の意味で組み込まれてしまった. そのため, EDCRGTCcode.m ファイルの Classify[x.]:= の部分を ClassifyRGTC[x.]:= などと再定義するとい (著者に修正提案を出しているがまだ修正対応されていない). この修正をしなくても, Petrov 分類をするときは ClassifyWeyl[Wdddd] すれば結果を返してくれる.

算と抽象計算の双方をサポートしている。このうち xPerm は、先に触れた添字操作の部分を、Butler-Portugal のアルゴリズムをコード化¹²⁾している。xPerm は、C プログラムでも提供され、他のコードへ移植が可能となっている。xAct には、テンソルの球面調和展開 (Harmonics), スピノール計算 (Spinor), 宇宙論摂動解析 (xPand), 外微分 (xTerior) などのパッケージも有志によって提供されている。

サイト¹¹⁾ から、パッケージをダウンロードしたら、それらを所定の場所 (Mathematica で \$Path として出てくるフォルダリストの中のどこか) に置くことで準備終了だ。図 1 と同じスクリプトを組むと図 2 のようになる。

```

In[1]:= << xAct`xCoba`

DefManifold[M4, 4, IndexRange[a, q]]
DefMetric[-1, metric[-a, -b], CD, PrintAs -> "g"]
DefChart[B, M4, {0, 1, 2, 3}, {t[], r[], \theta[], \phi[]}]
MatrixForm[metricarray = {
  {- (1 - 2 M/r[]), 0, 0, 0},
  {0, 1/(1 - 2 M/r[]), 0, 0},
  {0, 0, r[]^2, 0},
  {0, 0, 0, r[]^2 Sin[\theta[]]^2}
}]

TensorValues[metric]

MetricCompute[metric, B, "Kretschmann"[],
  CVSimplify -> Simplify]
KretschmannCD[] // ToValues

```

図 2 xAct を使って Schwarzschild 解 (13) の Kretschmann 不変量 I (14) を計算する Mathematica シート。これだけで済む!!

5.3 SageManifold

パリ天文台の Ericourgoulhon らが 2014 年に公開した SageManifolds¹⁸⁾ は、Linux/Mac OS X で動作する数学アプリケーション Sage⁶⁾ で動作するパッケージである。2005 年に登場した Sage は、Mathematica や Maple など既存の商用ソフトに対抗するオープンソースを目指して拡大中である。Sage は、開発当初は 1 からすべてを作り始める形態ではなく、Python 言語を使って既存のオープンソースの共有を可能にする意図があったため、Maxima, Pynac (シンボリック計算), GAP (群論), PARI/GP (数論), Singular (多項式計算),

matplotlib (2次元描画) などへのリンクを実現しているが、現在では Sage 単体でも広い数学分野をサポートしている。

SageManifolds は、Sage において、微分幾何・テンソル計算をサポートするライブラリとして登場した。2015 年 3 月現在の version は 0.7 だが、300 ページを超えるマニュアルが準備されている。インストールするには、先に Sage をインストールする必要がある。

実行ファイルへのリンク名を例えば Sage と設定したとすれば、ターミナルで

```
%% Sage
```

で使い始めることができる (%% はターミナルのプロンプト)。終了は、> quit である。図 1, 図 2 と同じ計算をした例が、図 3 である。

5.4 Cadabra

Kasper Peeters が公開している Cadabra²⁰⁾ は、場の計算を目的に作成されたツールである。最大の特徴は、入力も出力も TeX ベースであることだ。Cadabra の抽象計算の添字操作には、上記の xAct/xPerm が取り込まれている。

Linux ベースで作成されており、Linux あるいは Mac OS X でインストールできる (Mac なら、MacPorts や Homebrew などのパッケージ管理システムを利用するのが良い)。ターミナルで操作するコマンドライン版なら、起動は、

```
%% cadabra
```

とすればよい (終了は > @quit.)。X11 を使うグラフィカルインターフェース版では、起動は、%% xcadabra である。

先にコメントした「(5) が成立することを示す」という、抽象的な代数計算の際に入力するコマンド例を図 4 に示す。

相対論の理論研究では、違うソフトウェアで同じ結果を出して、計算結果を確認する、ということがしばしば必要になる。相互チェックの意味でも、複数のソフトが存在することは好ましいし、使いこなせておくことを心がけたい。

```

Sage Version 6.3, Release Date: 2014-08-10
Type "notebook()" for the browser-based notebook interface.
Type "help()" for help.

```

```

sage: M = Manifold(4, 'M')
sage: c_BL.<t,r,th,ph> = M.chart(r't r:[0,+oo] th:[0,pi]:\theta ph:[0,2*pi]:\phi')
sage: m = var('m')
sage: g = M.metric('g')
sage: g[0,0], g[1,1] = -(1-2*m/r), 1/(1-2*m/r)
sage: g[2,2], g[3,3] = r^2, (r*sin(th))^2
sage: g.display()
g = (2*m - r)/r dt*dt - r/(2*m - r) dr*dr + r^2 dth*dth + r^2*sin(th)^2 dph*dph
sage: Riemann = g.riemann(); print Riemann
tensor field 'Riem(g)' of type (1,3) on the 4-dimensional manifold 'M'
sage: RiemannD = Riemann.down(g); print RiemannD
tensor field of type (0,4) on the 4-dimensional manifold 'M'
sage: RiemannU = Riemann.up(g).up(g).up(g); print RiemannU
tensor field of type (4,0) on the 4-dimensional manifold 'M'
sage: Kretschmann = RiemannD['_{abcd}']*RiemannU['^{abcd}']
sage: Kretschmann.display()
M --> R
(t, r, th, ph) |-> 48*m^2/r^6

```

図 3 SageManifolds を使って Schwarzschild 解 (13) の Kretschmann 不変量 I (14) を計算する例。ディスプレイ出力を含めているが、これだけで済む!!

```

{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u#}::Indices(position=independent).
g_{a b}::Metric.
g_{a}^{b}::KroneckerDelta.
\partial_{#}::PartialDerivative.
cderiv:=\partial_{c}{g_{a b}} - g_{a d}\Gamma^{d}_{b c} - g_{d b}\Gamma^{d}_{a c};
Gamma:=\Gamma^{a}_{b c} -> (1/2) g^{a d} (\partial_{b}{g_{d c}}
+ \partial_{c}{g_{b d}} - \partial_{d}{g_{b c}}) );
@substitute!(cderiv)@(Gamma);
@distribute! (%);
@eliminate_metric! (%);
@eliminate_kr! (%);
@canonicalise! (%);
@collect_terms! (%);

```

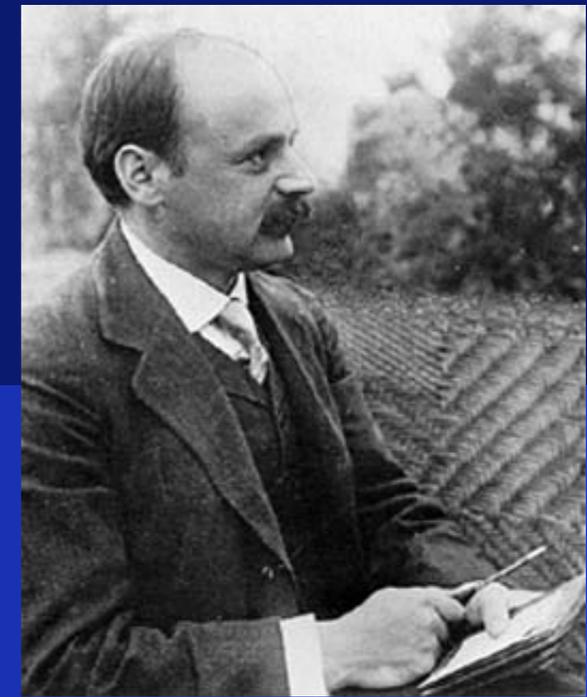
図 4 Cadabra を使って、(5) が成立することを示す入力コマンド (Brewin²¹⁾ が示している例)。一番最後に出力される結果は、cderiv:= 0; である。グラフィカルインターフェース版を使うと、L^AT_EX で組まれた数式が出力される。

参考文献

- 1) <http://www.wolfram.com/>
- 2) <http://www.maplesoft.com/>
- 3) <http://jp.mathworks.com/products/matlab/>
- 4) <http://www.gnu.org/software/octave/>
- 5) <http://www.reduce-algebra.com/>
- 6) <http://www.sagemath.org/>
- 7) <http://maxima.sourceforge.net/>
- 8) <http://smc.vnet.net/MathTensor.html>
- 9) L. Parker, & S.M. Christensen, *MathTensor* (Addison-Wesley, 1994/2002).
- 10) <http://www.inp.demokritos.gr/~sbonano/RGTC/>
- 11) <http://www.xact.es/>
- 12) J. M. Martín-García, *Comp. Phys. Commun.* 179 (2008) 597 (arXiv:0803.0862).
- 13) H.H. Soleng, arXiv:gr-qc/9502035.
- 14) <http://grtensor.phy.queensu.ca/>
- 15) <http://digitalcommons.usu.edu/dg/>
- 16) I.M. Anderson, & C.G. Torre, *J. Math. Phys.* 53 (2012) 013511 (arXiv:1103.1608).
- 17) <http://www.digi-area.com/Mathematica/atlas/>
- 18) <http://sagemanifolds.obspm.fr/>
- 19) E.ourgoulhon, M. Bejger, & M. Mancini, arXiv:1412.4765.
- 20) <http://cadabra.phi-sci.com/>
- 21) K. Peeters, arXiv:hep-th/0701238; L. Brewin, *Comp. Phys. Comm.* 181 (2010) 489 (arXiv:0903.2085).
- 22) <http://redberry.cc/>
- 23) D. Bolotin, & S. Poslavsky, arXiv:1302.1219.
- 24) <http://www.xact.es/links.html>
- 25) J.G. Fletcher, R. Clemens, R. Matzner, K.S. Thorne & B.A. Zimmerman, *Astrophys. J.* 148 (1967) L91.
- 26) M.A.H. MacCallum, J.E.F. Skea, J.D. McCrea, & R.G. McLenaghan, *Algebraic Computing in General Relativity* (Oxford, 1994); M.A.H. MacCallum, *Int. J. Mod. Phys. A.* 17 (2002) 2707.

(しんかい・ひさあき, 大阪工業大学情報科学部)

アインシュタイン方程式の解 【シュワルツシルド解】



Schwarzschild (1916)
球対称, 真空での方程式の厳密解

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

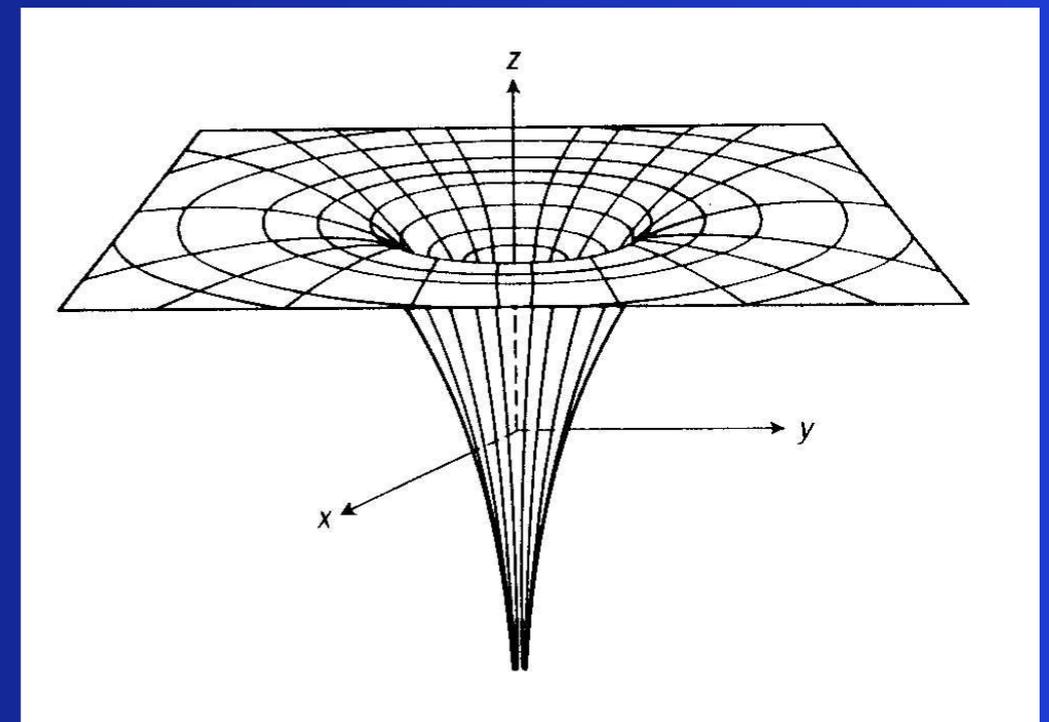
困ったことに, ……

$r=0$ で特異点

⇒ 今でも困ってる

$r=2GM/c^2$ でも特異点

⇒ ブラックホールの境界



重力による時間の進み方の違い

質量 M の重力源から距離 r の位置では

$$\Delta T' = \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} \Delta T$$

重力場にいる観測者の時間

静止している観測者の時間

あるいは、重力ポテンシャル U を用いて

$$\Delta T' = \left(1 - \frac{U}{c^2}\right) \Delta T$$

***重力が強いところにいる観測者は時間の進み方が遅い**

- 未来に行くタイムマシンになる：浦島太郎問題
- GPSによる時刻計測に補正が必要になる
- 光格子時計で検証することができる

“球状の殻のタイムマシン”で未来へ

ブラックホールを利用するには、勇気が必要だ。宇宙船の操作を誤ってブラックホールの中に落ちてしまったが最後、二度と外には出られないからだ。

タイムトラベルの可能性を理論的に研究してきたアメリカ、プリンストン大学宇宙物理学教授のリチャード・ゴット博士は、ユニークな“未来へのタイムマシン”を、著書『時間旅行者のための基礎知識』（草思社。原題『Time Travel in Einstein's Universe』）の中で紹介している。

ゴット博士は、木星（地球の約318倍の質量）をこのタイムマシンの材料として使うことを提案している。まず、タイムトラベルしたい人の周囲に、木星の全物質を使って、木星と同じくらいの大きさの「球状の殻」をつくる。その後、何らかの方法で殻を圧縮し、直径を6メートル程度にすれば、超高密度な球状の殻でできた、未来へのタイムマシンの完成である。

完全に対称な球状の殻の内部は、無重力になることが知られている。殻がおよぼす重力は、内部の人をあらゆる方向へ引っ張る。しかしある方向からの重力は、必ず正反対の方向からの重力と打ち消しあうので、全体としては無重力になるのだ。これなら内部の人は快適にすごせそうだ。

内部は見かけ上、無重力である。しかし外部から見れば、球状の殻は強い重力をおよぼす物体だ。そのためブラックホールと同じように、地球よりも時間の進み方が遅くなるのである。この殻の内部で5年過ごせば、外部では20年が経過する計算になるそうだ。安全のために、殻を膨張させてから外に出れば、15年未来へのタイムトラベルが可能になるわけだ。

ただし、相対性理論に詳しい大阪工業大学の眞貝寿明教授は、「球状の殻自体には、つぶれる方向に大きな重力が作用するので、それを支える技術が必要でしょうね」と指摘する。ゴット博士は著書の中で、電気的な反発力を利用することを提案しているが、いずれにせよ、現在の科学技術をはるかに凌駕するテクノロジーが必要なのは、まちがいないだろう。



地球

殻の外側の空間は強い重力

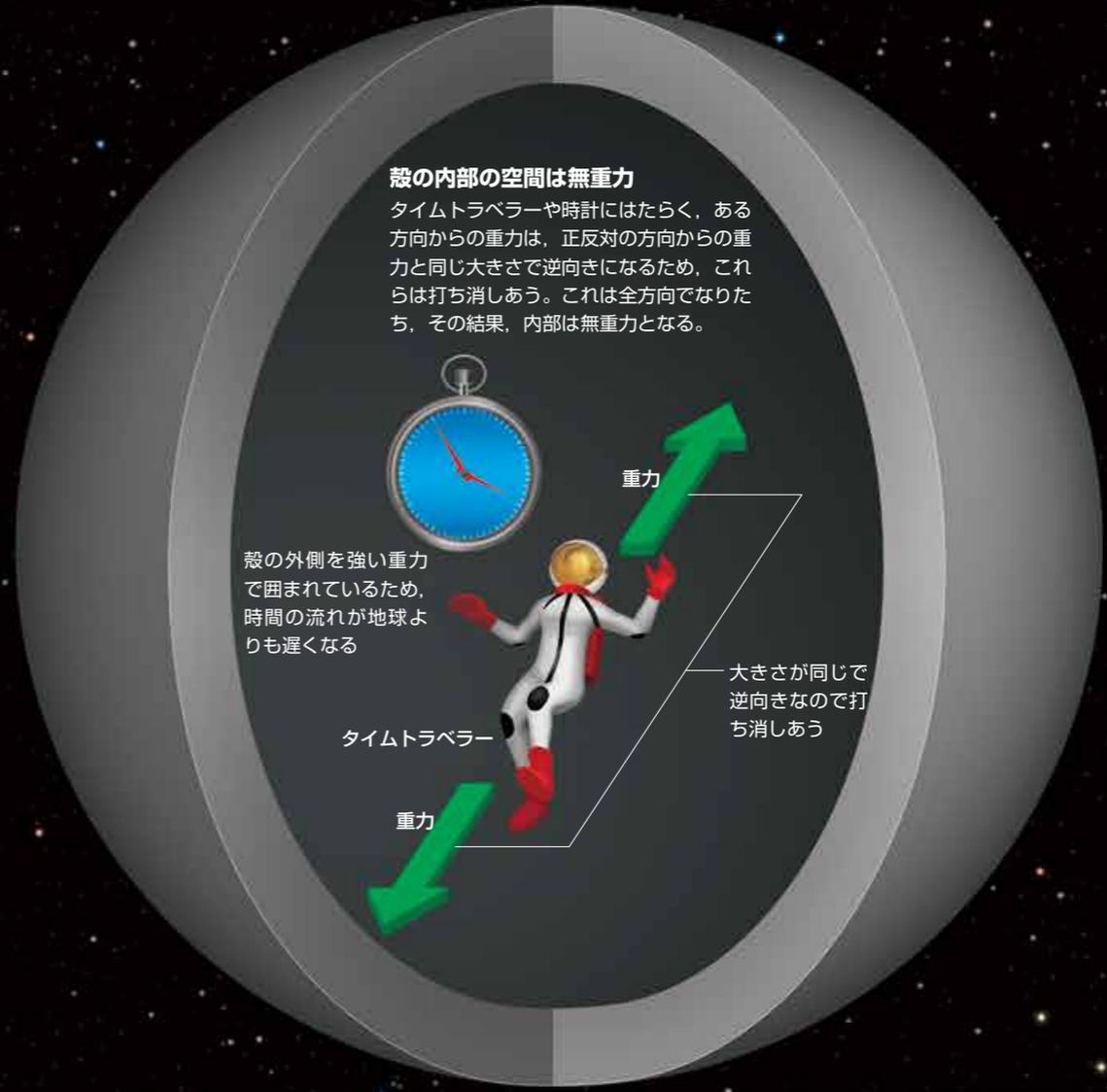
星ほどの大きな質量をもつ球状の殻を小さくつくと、強い重力が生じる。



殻がおよぼす強い重力で、時間の流れが地球よりも遅くなる

殻の内部の空間は無重力

タイムトラベラーや時計にはたらく、ある方向からの重力は、正反対の方向からの重力と同じ大きさで逆向きになるため、これらは打ち消しあう。これは全方向でなりたち、その結果、内部は無重力となる。



殻の外側を強い重力で囲まれているため、時間の流れが地球よりも遅くなる

重力

タイムトラベラー

重力

大きさが同じで逆向きなので打ち消しあう

超高密度の球状の殻を使ったタイムマシン

ゴット博士が著書の中で紹介している、超高密度で完全に対称な球状の殻を使った、未来へのタイムマシンをえがいた。殻は外側に対して強い重力をおよぼすため、地球にくらべて時間の流れがゆっくり進む領域ができる。殻の内部の空間では、重力が完全に打ち消しあって無重力になる。しかし、殻の外側を強い重力で囲まれているため、時間の流れが遅くなる。タイムトラベラー（時間旅行者）は無重力の空間で過ごせるため、ブラックホールのそばよりは快適に過ごせることだろう。

注：イラストでは重力の矢印を二つしかえがいていないが、実際はあらゆる方向から重力がはたらき、それらが打ち消しあう。

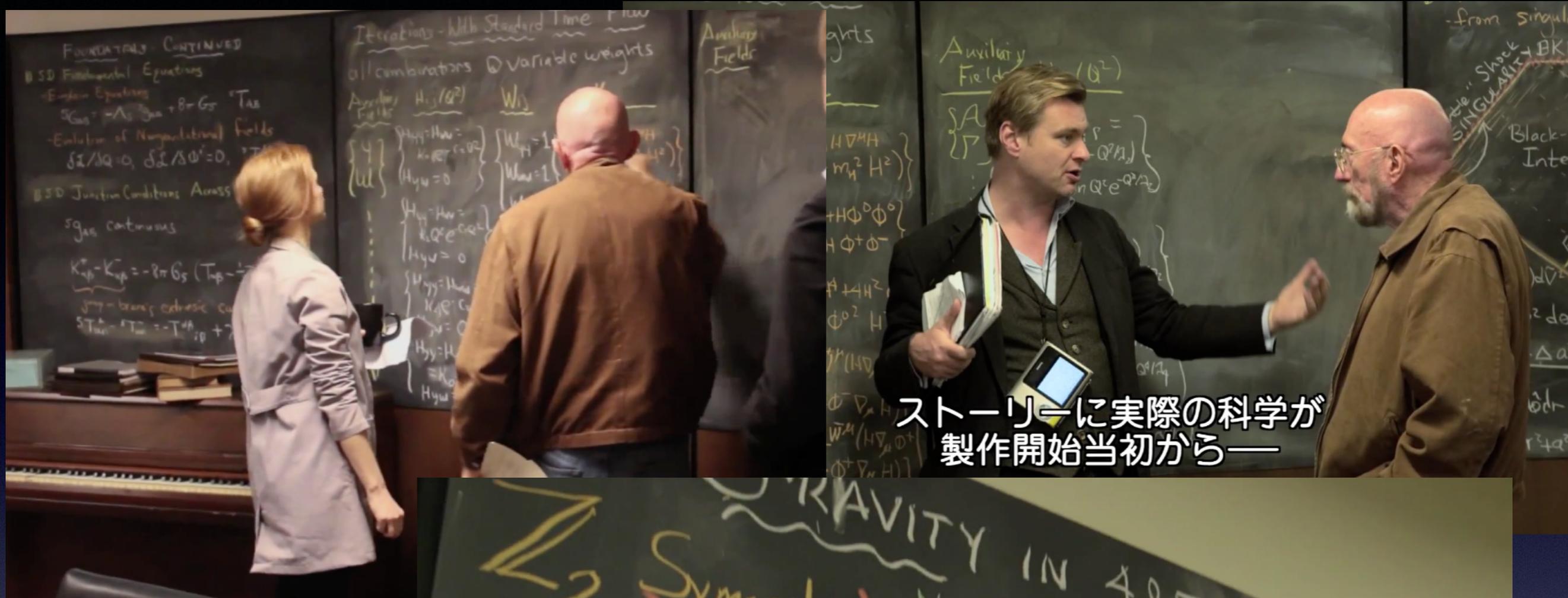


Interstellar (2014)

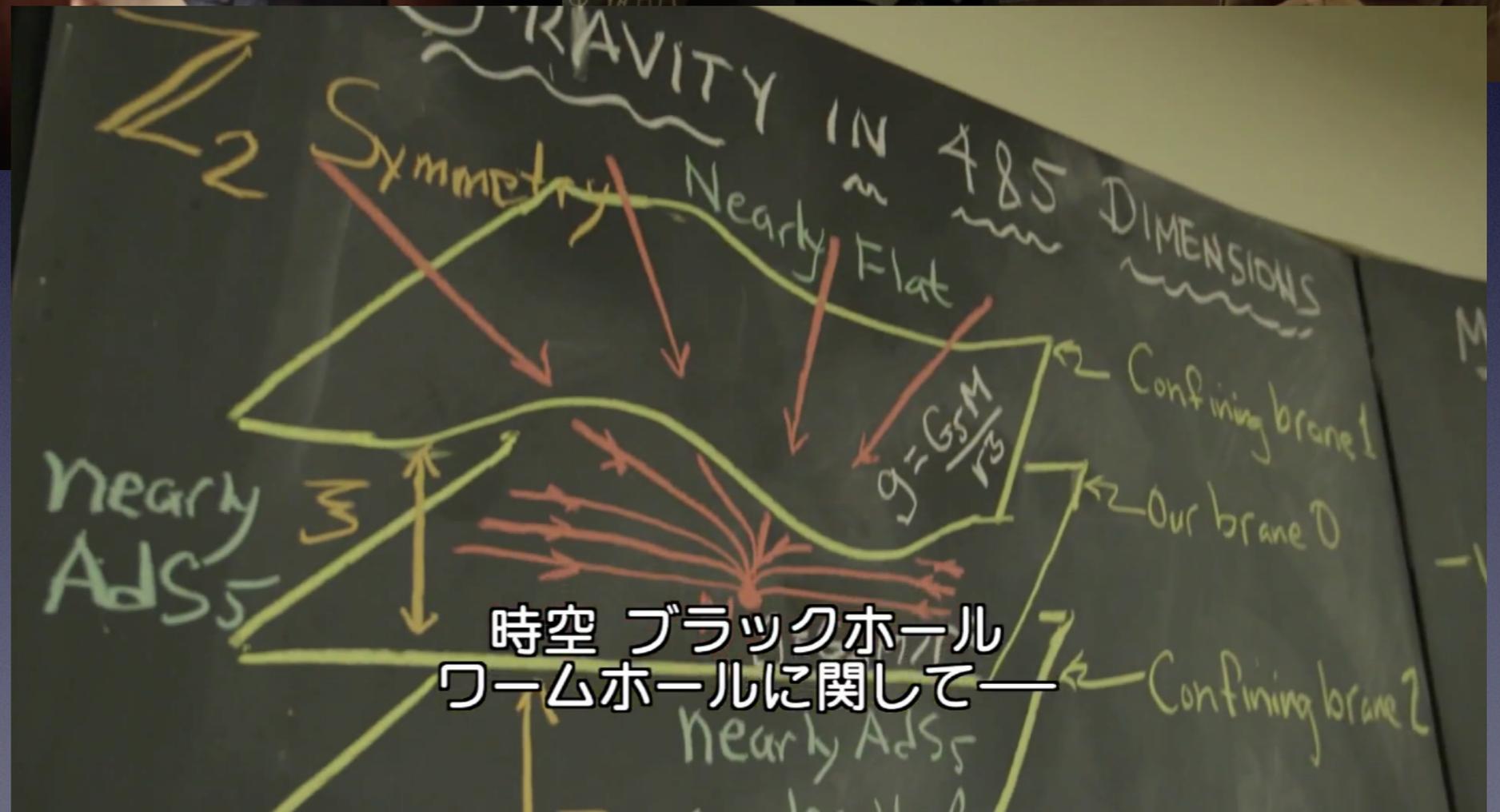


Executive Producer: Kip Thorne

<https://www.youtube.com/watch?v=qZZ9jRan9eo>



ストーリーに実際の科学が
製作開始当初から—



時空 ブラックホール
ワームホールに関して—

Interstellar (2014)

Executive Producer: Kip Thorne