

研究成果報告書

一般相対論に於ける数値計算を安定化させる数学的背景の解明
－ 一般相対論における新しい数値計算手法の開発 －

Several New Approaches to Numerical Simulations in General Relativity

平成 14/15 年度 科学研究費補助金 若手研究 (B) 研究課題番号 14740179
平成 13/14/15 年度 理化学研究所 基礎科学特別研究員研究費

平成 15 年 (2003 年) 12 月

真貝寿明 Hisaaki Shinkai

理化学研究所 (計算宇宙物理研究室) 基礎科学特別研究員

この報告書は, <http://atlas.riken.jp/~shinkai/report/> よりダウンロードできます.

1 本研究課題の概要

近年の宇宙観測技術の進歩によって、一般相対論研究には、より定量的で正確な計算が要求されるようになった。ブラックホールや中性子星連星の合体で発生する重力波の波形の計算や、高次元宇宙モデルのもとらす描像を得るためには、非線形な Einstein 方程式を直接数値積分することが欠かせない。

数値相対論研究は、日本を含め世界の各拠点で精力的に進められているが、現在でもその基本的手法が確立していない発展途上の分野である。数年前までは、安定した時間発展が実現できないのはゲージ条件の設定が悪いか計算機能力が不足しているからだと考えられてきた。しかし、最近になって、これまで「標準」として使われていた Einstein 方程式の表現方法 (Arnowitt-Deser-Misner (ADM) 形式) が、実は数値計算に必ずしも適していないこと、及び Einstein 方程式の定式化の違いで、数学的には互換であっても、数値的な安定性が変わることが次第に明らかになってきた。

本研究の目的は、

- (1) 一般相対論における数値計算を安定に行うための数学的理論を構築し数値実例を示すこと
- (2) 新しい視点を持ち込んだ数値計算を行って次世代の一般相対論研究への道を開拓すること

の2点であった。

目的の(1)に対しては、これまでに試行錯誤的にしか行われていなかった「数値計算に適した Einstein 方程式の定式化」の研究を、数学的な背景（発展方程式の双曲性問題、満たされるべき拘束条件式の時間発展解析）を援用して統一的に理解することを試みた。従来の ADM 形式がなぜ安定性に問題があったのか、を初めて解析的に明らかにし、併せてどのように修正すれば数値シミュレーションを長く続けることができるのかを提案した。また、広く使われている修正 ADM 形式（いわゆる BSSN 形式）についても、なぜこの定式化が利点を持つのかを初めて明らかにし、同時にさらに安定な数値計算が期待できる再定式化を提案した。

我々は、一般相対論の数値計算コード（大規模並列計算コード）を新たに作成し、上記の提案を数値的に実証することを進めている。いくつかのテスト計算では予想通りの結果が得られている。また、すでに我々の提案は世界のいくつかのグループでシミュレーションに応用され始め、その肯定的な成果が報告されている。

上記目的の(2)に対しては、これまでの標準的なアプローチである「時空の3+1分解」とは別の「時空の2+2分解」を用いた数値的アプローチについての提案も行った。重力波の抽出に関して、「時空の2+2分解」に基づく新たな近似方法は、将来有用であろうという結論を得た。また、「時空の2+2分解」数値シミュレーションコードを用いて、ワームホール時空の安定性問題にも取り組み、負のエネルギー状態を許すならば、我々の想像を超えた「時空トラベル」が可能になることを結論し、一部マスコミでも紹介されることになった。

本研究を遂行したことは、世界の数値相対論グループに「定式化問題」の存在を広く正確に認識させることに有用であった。これは、世界の各グループが、混沌とした研究状況をまとめ、統一的な比較を行うべきだ、という機運に発展した。そこで、「定式化問題」の存在を共通な課題として世界の各グループが共通に取り組みめる土台となるテスト問題を提示し、それらを比較するプロジェクトを立ち上げることになった。我々は発起人の一人として、そのプロジェクトの遂行に尽力している。

2 本研究課題の財源

本研究は次の2つの研究費をもとに遂行した。

理化学研究所 基礎科学特別研究員研究費

研究課題名	一般相対論における新しい数値計算手法の開発	
研究遂行者	真貝寿明（理化学研究所 基礎科学特別研究員）	
研究アドバイザー	戎崎俊一（理化学研究所 情報基盤研究部部長）	
研究経費	平成13年度	1,380千円
	平成14年度	1,300千円
	平成15年度	1,300千円
	計	3,980千円

科学研究費補助金 若手研究(B) 研究課題番号 14740179

研究課題名	一般相対論に於ける数値計算を安定化させる数学的背景の解明、及びその実証と応用	
研究組織	研究代表者：真貝寿明（理化学研究所 基礎科学特別研究員）	
研究経費	平成14年度	2,400千円
	平成15年度	600千円
	計	3,000千円

研究費は主に、数値計算用のコンピュータ（並列処理用のPCクラスタ、データ処理用のPC）の購入、関連するソフトウェアの購入、海外出張、国内出張、論文掲載費、図書購入費などに使用した。本研究に関連した、海外渡航は以下の通り（*印は、滞在費を先方から一部補助していただいたもの）：

H13年7月	南アフリカ	第16回「重力と一般相対論」国際会議 講演
H13年7月	南アフリカ	「数値相対論」国際研究会 講演
H13年10月	韓国	梨花女子大学短期客員研究員*
H14年5月	メキシコ	第1回「数値相対論のための Einstein 方程式定式化」研究会 講演
H14年6月	アメリカ	ペンシルバニア州立大学短期客員研究員*
H14年7月	ドイツ	アインシュタイン研究所短期客員研究員*
H14年8月	フランス	「理論物理学」国際会議 講演
H14年8月	フランス	「一般相対論におけるコーシー問題」国際研究会 出席*
H14年10月	アメリカ	カリフォルニア工科大学客員研究員*
H15年1月	韓国	「韓国一般相対論 2003 年冬の学校」 講師（招待）*
H15年6月	アメリカ	「重力物理：今後 10 年」国際研究会 講演
H15年7月	オーストラリア	第5回「応用数理」国際学会 招待講演
H15年12月	メキシコ	第2回「数値相対論のための Einstein 方程式定式化」研究会 講演

3 研究発表リスト

- 書籍など

1. Re-formulating the Einstein equations for stable numerical simulations: Formulation Problem in Numerical Relativity
H. SHINKAI, G. YONEDA (招待論文)
For a part of the book *Recent Progress in Astronomy and Astrophysics* (Nova Science Publ., New York, 2004), available as <http://xxx.lanl.gov/abs/gr-qc/0209111>
2. 数値相対論における定式化問題 一般相対論における数値シミュレーションを安定化させる指針の探求
真貝寿明 米田元 (招待論文)
日本応用数学会学会誌「応用数理」2004年, 掲載予定
3. Introduction to Numerical Relativity
Four hour invited lecture at Asia-Pacific Center for Theoretical Physics *Winter School on Gravitation and Cosmology* (Ewha Womans University, Seoul, Korea, 2003年1月)
H. SHINKAI (招待講演)
Lecture note is available from <http://atlas.riken.jp/~shinkai/winterAPCTP/>

- 学会誌掲載, 国際会議発表

1. Constraint propagation in the family of ADM systems
G. YONEDA, H. SHINKAI
Physical Review **D 63** (2001) 124019 (9 pages)
2. Quasi-spherical approximation for rotating black holes
H. SHINKAI, S.A. HAYWARD
Physical Review **D 64** (2001) 044002 (8 pages)
3. Adjusted ADM systems and their expected stability properties: constraint propagation analysis in Schwarzschild spacetime
H. SHINKAI, G. YONEDA
Class. Quantum Grav. **19** (2002) 1027-1049 (23 pages)
4. Advantages of modified ADM formulation: constraint propagation analysis of Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura system
G. YONEDA, H. SHINKAI
Physical Review **D 66** (2002) 124003 (10 pages)
5. Fate of the first traversible wormhole: black-hole collapse or inflationary expansion
H. SHINKAI, S.A. HAYWARD
Physical Review **D 66** (2002) 044005 (9 pages)
6. Diagonalizability of constraint propagation matrices
G. YONEDA, H. SHINKAI
Class. Quant Grav. **20** (2003) L31-36 (Letter, 6 pages)

7. Toward standard testbeds for numerical relativity
M. ALCUBIERRE, G. ALLEN, C. BONA, D. FISKE, T. GOODALE, F.S. GUZMAN,
I. HAWKE, S. HAWLEY, S. HUSA, M. KOPPITZ, C. LECHNER, D. POLLNEY, D.
RIDEOUT, E. SCHNETTER, E. SEIDEL, H. SHINKAI, D. SHOEMAKER, B. SZILAGYI,
R. TAKAHASHI, J. WINICOUR (MEXICO NUMERICAL RELATIVITY WORKSHOP 2002
PARTICIPANTS)
Class. Quant. Gravity **21** (2004) 589-613
8. Constraint propagation in $(N + 1)$ -dimensional space-time
H. SHINKAI, G. YONEDA
submitted to Gen. Rel. Grav.
9. Quasi-spherical approximation for rotating black holes
H. SHINKAI, S.A. HAYWARD
The 16th International Conference on General Relativity and Gravitation [South Africa,
2001 年 7 月]
10. Cosnstraint propagation in the family of ADM systems
H. SHINKAI, G. YONEDA
The 16th International Conference on General Relativity and Gravitation [South Africa,
2001 年 7 月]
11. Adjusted Systems – adding constraints in RHS
H. SHINKAI
Workshop on Numerical Relativity 2002 [South Africa, 2001 年 7 月]
12. Adjusted ADM systems and their expected stability properties
H. SHINKAI, G. YONEDA
The 11th Workshop on General Relativity and Gravitation, [Waseda Univ., 2002 年 1 月]
(Proceedings, p223-227)
13. Systematic understanding of asymptotical stability via constraint propagation analysis
— Proposals of Adjusted ADM Systems and Adjusted BSSN Systems —
H. SHINKAI (60 min talk)
Formulations of Einstein Equations for Numerical Relativity [Mexico City, 2002 年 5 月]
14. Re-formulations of Einstein equations for stable numerical simulations
H. SHINKAI (15 min talk)
International Conference on Theoretical Physics [Paris, UNESCO 2002 年 7 月]
15. Re-formulate the Einstein equations for stable numerical simulations
H. SHINKAI (招待講演)
The 12th Workshop on General Relativity and Gravitation, [Tokyo Univ., 2002 年 11 月]
(Proceedings, p137-151)
16. Controlling constraints in free evolution systems
H. SHINKAI (30 min talk)
Gravitation: A Decennial Perspective, [Penn State Univ., 2003 年 6 月]

17. Controlling constraints in general relativity
H. SHINKAI (招待講演 at Minisymposia, “Numerical Methods for PDEs with Constraints”)
The 5th International Congress on Industrial and Applied Mathematics [Sydney, Australia, 2003 年 7 月]
 18. Gravitational Waves from merging intermediate-mass black-holes
H. SHINKAI, T. MATSUBAYASHI, T. EBISUZAKI (poster)
Stellar-Mass, Intermediate-Mass, and Supermassive Black Holes, [Kyoto, 2003 年 10 月]
 19. Constraint propagation analysis and adjusted systems
H. SHINKAI, G. YONEDA
Numerical Relativity: Formulation Problem II, [Mexico, 2003 年 12 月]
- 学会誌投稿中
 1. Constraint Propagation in $N + 1$ -dimensional space-time
H. SHINKAI, G. YONEDA
submitted to General Relativity and Gravitation (2003)
 2. Gravitational waves from inter-mediate black-hole mergers
T. MATSUBAYASHI, H. SHINKAI, T. EBISUZAKI
submitted to Astrophysical J. (2003)
 - 口頭発表 (国内会議)
 1. Asymptotically constrained systems for Numerical Relativity
真貝寿明
第 14 回 理論天文学懇談会シンポジウム [大阪大学, 2001 年 12 月] (集録 p.93)
 2. Stability of Wormholes
真貝寿明
「特異点とその周辺」研究会 [大阪市立大学, 2002 年 1 月]
 3. Numerical Experiments of Adjusted Einstein equations
真貝寿明
第 15 回 理論天文学懇談会シンポジウム [国立天文台, 2001 年 12 月] (集録 p.??)
 4. Cactus as a Problem Solving Environment
真貝寿明 (招待講演)
Grid-Computing Workshop, [Fujitsu, Tokyo, January 2003]
 5. Numerical experiments of the adjusted Einstein equations
真貝寿明
「重力波とその周辺」研究会 [基礎物理学研究所, 2003 年 1 月]
 6. Gravitational waves from merging intermediate-mass black holes
真貝寿明, 松林達史, 戎崎俊一
第 2 回 DECIGO 研究会 [国立天文台, 2003 年 5 月]

7. Formulation of Einstein equations for stable numerical simulations
真貝寿明, 米田元
日本物理学会 [立命館大学, 2002年3月]
 8. Formulation of Einstein equations for stable numerical simulations: II
米田元, 真貝寿明
日本物理学会 [立教大学, 2002年9月]
 9. Fate of the traversible wormholes
真貝寿明, S.A. Hayward
日本物理学会 [立教大学, 2002年9月]
 10. Formulation of Einstein equations for stable numerical simulations: III
真貝寿明, 米田元
日本物理学会 [東北学院大学, 2003年3月]
- 一般誌などへの解説記事
 1. ワームホールは通過可能か? 最近のワームホール研究から
真貝寿明
「パリティ」(丸善) 2003年5月号
 2. 質量とエネルギー 相対論の視点から
真貝寿明
「数理科学」(サイエンス社) 2003年12月号
 3. 先端科学辞典(丸善, 2002年)
項目:「数値相対論」「カーブブラックホール」執筆
 - 書評ほか
 1. シリーズ 海外の研究室事情(16)「ペンシルバニア州立大学 重力と幾何学センター」
真貝寿明
日本天文学会誌「天文月報」2001年4月号
 2. 書評短評「宇宙と素粒子30講」(戸田盛和著, 朝倉書店, 2002)
真貝寿明
日本物理学会誌 2002年11月号
 3. 書評小特集「物理入門書の紹介」第2回「計算機から導く物理の教材」
真貝寿明 山内淳
日本物理学会誌 2003年9月号

この他, 研究業績ではないが, 期間中, 17本の論文の査読を担当し, 学会・研究会の座長を数回務めた。また, 日本物理学会学会誌新著紹介委員を2年間担当した。

4 研究成果の概要

【1】安定な数値計算を行う方法論

一般相対論における安定な数値シミュレーションを行うための、Einstein 方程式の定式化問題を研究した。Einstein 方程式は、楕円型偏微分方程式の拘束条件式と双曲型の運動方程式に分解される。我々は、時空のアトラクターが拘束面に向かうように運動方程式を Lagrange 乗数補正するアイデアを進め、この観点から現在までに行われている試行錯誤的な数値実験事例を統一的に理解でき得ることを見いだした。

我々の理論武装は、拘束伝播方程式を併用して、拘束条件の破れを事前に回避することであり、そのために、拘束伝播方程式のモード解析・固有値解析を行うことを提案した。現在までに得られている事実は次のようである。

- 拘束伝播方程式をみると、元の発展方程式に本来ゼロである拘束条件式を加える操作（補正操作, adjustment）によって、拘束条件の破れの拡大・縮小具合が変化することが予測できる。
- 拘束伝播方程式右辺の固有値解析によって、これまで標準とされてきた ADM 形式が強い重力場では拘束条件の破れを増大するモードを（減少させるモードと共に）含んでいることが明らかになった。
- 平坦な時空での摂動、という限られた場合についてだが、我々は、何故 BSSN 形式が ADM 形式よりも数値的に安定なのか、という説明を、拘束伝播方程式右辺の固有値解析によって明らかにした。
- 元の発展方程式を補正することによって、拘束条件の破れを増大するモードを除去することが可能である。発展方程式の時間対称性を破る補正を行えば、拘束条件の破れが自己収束する「漸近的拘束システム」をつくることも可能である。
- 「漸近的拘束システム」は、ADM 形式でも BSSN 形式でも提案でき、いくつかの数値計算では、実際に数値的安定性が得られ、以前より長時間のシミュレーションが実現できた。米国のグループにより、我々の定式化が有効であることも独立に報告された。

これまでのところ、我々のアプローチは成功を取めているが、より複雑な時空のダイナミクスを追うときには、一層の工夫が必要となるだろう。事実、現在比較を進めている弱い重力波伝播の数値計算では、拘束面に近づいていく様子が見られても最終的に再び計算が破綻してしまう例がある。現在、固有ベクトル解析を用いた、より積極的な拘束条件の制御方法も考案中である。高次元時空での応用を視野に入れた一般論も展開した。将来的には、「拘束面よりどれだけ離れてしまっているか」という「距離」の指標を確立し、「補正係数の自動応答制御」を可能にするなどの前進が必要だと考えている。

【2】世界標準のテスト計算問題の設定と比較の実現

我々の推進する「定式化問題」に注目が集まる中、世界の各グループが独自のテスト問題で独自の比較結果を出すことが混乱のもととも考えられるようになった。そこで、世界のいくつかの主要グループと共通で、比較計算のフォーマット（問題設定と計算方法の詳細設定）を作ることを実現した。実際の比較計算については、現在計算結果を集積して解析中であり、近い将来結果を報告できる状態である。また、比較計算設定は、2年目に入り、第2段階の問題設定に進んでおり、こちらも現在進行中である。

【3】重力波の新たな計算手法の提案

ブラックホールや中性子星合体の後には、回転するブラックホール (Kerr 解) が形成されると考えられる。通常の ADM 形式で行う数値シミュレーションでは、発生する重力波波形を長時間にわたって観測者方向に積分することは難しい。この困難を補うため、我々は時空を光の進行に沿った座標系で表現し、時空回転によって発生する項を 1 次近似する「擬球対称近似」を提案した。この方法では、背景時空を固定しないので、線形近似よりも良い結果が期待される。我々は、Kerr 厳密解を用いて、この近似から発生する誤差を評価した。結果としてこの近似は、実際の重力波評価に極めて有効であることが示唆された。

【4】ブラックホールとワームホールの 2 重性問題

Morris-Thorne によって提起された通過可能なワームホールという研究テーマは、SF 的な興味から広く紹介されているが、理論相対論研究という観点からは、時空のエネルギー条件についての理解に結びついている。我々は、これまで計算の都合上、静的なものとして扱われてきたワームホール解を、数値シミュレーションを用いてその動的な性質を初めて明らかにした。その結果、Morris-Thorne ワームホールは不安定解であり、正（負）のエネルギー物質が通過するとワームホール自体はブラックホール（インフレーション的膨張領域）に転移することを示した。ただし、ブラックホールに変化する以前に再び負のエネルギーの物質を投入することでワームホールは維持でき、旅行者も無事に通り抜けられることも示した。本研究は、ブラックホールのホライズン構造の分岐・統合を示した初めてのシミュレーションであり、今後ワームホールとブラックホールの双対性研究を加速させると期待される。ここでの数値計算は、ヌル座標を用いており、今後のブラックホールの取り扱いなどで役立つ技法も習得した。

【5】中間質量ブラックホールの合体で放出される重力波の評価

太陽質量の 100 倍から 1000 倍程度の（中間質量）ブラックホールが発見され、銀河中心の大質量ブラックホール形成モデルに、ボトムアップ的なシナリオが現実的になった。これらの中間質量ブラックホールの合体時に放出される重力波の情報から、宇宙の銀河分布と大質量ブラックホール形成過程が決定できうることを、簡単なモデルを設定して議論した。本研究結果は、将来計画されている宇宙空間重力波干渉計の観測目的として、非常に魅力的なものであると考えられる。

5 研究成果の詳細

研究成果の詳細はすでに学会誌などに掲載されている論文や掲載予定の論文に述べられているので、ここにそれらを収録する。(研究期間以前の成果で本研究に非常に関連のある論文2編も併せて収録した.)

Hyperbolic formulations and numerical relativity : Experiments using Ashtekar's connection variables	
by <i>H. Shinkai, G. Yoneda</i>	p.11
Hyperbolic formulations and numerical relativity II : Asymptotically constrained systems of Einstein equations	
by <i>G. Yoneda, H. Shinkai</i>	p.35
Constraint propagation in the family of ADM systems	
by <i>G. Yoneda, H. Shinkai</i>	p.57
Quasi-spherical approximation for rotating black holes	
by <i>H. Shinkai, S.A. Hayward</i>	p.66
Adusted ADM systems and their expected stability properties: constraint propagation analysis in Schwarzschild spacetime	
by <i>H. Shinkai, G. Yoneda</i>	p.74
Advantages of modified ADM formulation: constraint propagation analysis of Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura system	
by <i>G. Yoneda, H. Shinkai</i>	p.97
Fate of the first traversible wormhole: black-hole collapse or inflationary expansion	
by <i>H. Shinkai, S.A. Hayward</i>	p.107
Diagonalizability of constraint propagation matrices	
by <i>G. Yoneda, H. Shinkai</i>	p.116
Toward standard testbeds for numerical relativity	
by <i>M. Alcubierre, G. Allen, C. Bona, D. Fiske, T. Goodale, F.S. Guzman, I. Hawke, S. Hawley, S. Husa, M. Koppitz, C. Lechner, D. Pollney, D. Rideout, E. Schnetter, E. Seidel, H. Shinkai, D. Shoemaker, B. Szilagyi, R. Takahashi, J. Winicour (Mexico Numerical Relativity Workshop 2002 Participants)</i>	p.122
Constraint propagation in $(N + 1)$ -dimensional space-time	
by <i>H. Shinkai, G. Yoneda</i>	p.141
Re-formulating the Einstein equations for stable numerical simulations: Formulation Problem in Numerical Relativity	
by <i>H. Shinkai, G. Yoneda</i>	p.145
数値相対論における定式化問題	
by 真貝寿明, 米田元	p.195
Gravitational waves from inter-mediate black-hole mergers	
by <i>T. Matsubayashi, H. Shinkai, T. Ebisuzaki</i>	p.206
Introduction to Numerical Relativity	
by <i>H. Shinkai</i>	p.220-262