

「特殊相対性理論」の解説 (1)

10月より輪読している「相対性理論」(佐藤勝彦著、岩波書店)の要約を、卒論ゼミ生が解説します。
 アインシュタインが1905年に発表した特殊相対性理論について、

- 「相対性原理とは?」「マイケルソン・モーレーの実験とは?」「ミンコフスキー時空とは?」
- 「ローレンツ変換とは?」「時間の相対性とは?」「双子のパラドックスとは?」「速度の合成則とは?」
- 「物理法則の共変形式とは?」「テンソルとは?」等々の疑問にお答えします。

橘

1 ニュートン力学における 時間と空間

ニュートン力学における3つの法則 **時間と空間**

第1法則・・・慣性の法則
 外力が作用していない時、物体は静止しているか、等速運動をする

第2法則・・・運動の法則
 物体の加速度は外力に比例する

この運動の法則を式で表すと①式になる

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f \quad \text{①}$$

第3法則・・・作用・反作用の法則
 一方が受ける力と他方が受ける力は向きが反対で大きさが等しい

江本

2. 光速不変の原理

・電磁場の方程式と光
 マクスウェルによる電磁場の基礎方程式(1861年)
 →ニュートン力学の法則と違い、光速 c が含まれる。

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{E} = 0, \quad \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{B} = 0 \quad \text{ここで} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

この時の速度 c とは、何に対しての速度なのか

- 第1の立場 無限に存在する慣性系の中で、1つだけ絶対的な慣性系がある。
- 第2の立場 マクスウェル方程式は全ての慣性系で成立している。

犬東

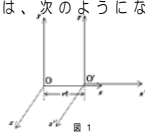
3. ローレンツ変換

ローレンツ変換：ニュートン力学でのガリレイ変換は光速不変の原理に矛盾する。これを解決するために次の3つの条件の下アインシュタインがローレンツ変換へ拡張した。

- ・相対性原理 (座標系 (慣性系) の相対性)
- ・光速不変の原理
- ・ $v/c \ll 1$ の極限でガリレイ変換と一致する

ガリレイ変換

x' 系が x 系に対して速度 v で x 方向に運動している
 と図1のようになる。そして、2つの慣性系の間を結ぶ座標変換をガリレイ (Galilei transformation) 変換と呼び、この変換式は、次のようになる。

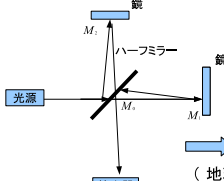
$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad \text{②}$$


①式は x 系の座標系での式である。これを x' 系で表現しても同じ方程式③式になる。

$$m \frac{d^2 x'}{dt'^2} = f \quad \text{③}$$

マイケルソン-モーレーの実験 (1)

1, 2の立場のどちらが正しいかを定めるため、絶対的慣性系に対し、どのような速度で運動しているかを求める実験が行われた。(1887年)



地球の進行方向と、それに垂直な方向では少なくとも30km/s程度異なるはず...

(地球の公転、自転方向)

相対性原理より、座標変換は線形の変換を用いる。

次式の変換では、左辺は x' 系の座標系であり、右辺は x 系の座標系に各成分を加えたものである。

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

相対性原理

相対性原理 (principle of relativity)
 物理法則は座標系の取り方によらず不変であるべきだ

ガリレイの相対性原理 (Galilei's principle of relativity)
 ガリレイ変換に対して物理法則が不変である

相対性原理はアインシュタインが追求した原理で物理法則を考える中で最も重要な原理である

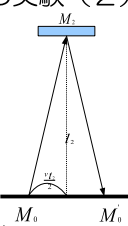
マイケルソン-モーレーの実験 (2)

$M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_0$
 と往復する往復する時間を t_1

$M_0 \rightarrow M_2 \rightarrow M_0$
 と往復する往復する時間を t_2
 とした時の光路差 $\Delta_s = c(t_1 - t_2)$

$$= 2 \left(\frac{L_1}{1 - (v/c)^2} - \frac{L_2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right)$$

らに、装置が90度回転したときに測定すれば

$$\Delta_s = 2 \left(\frac{L_1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - \frac{L_2}{1 - (v/c)^2} \right) \text{ となる。}$$


x' 系が x 系に対して x 軸方向に速度 v で等速運動しているときを考え、また光速不変の原理から考えて、変換は次のようになる

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{bmatrix} 1 & -v/c & 0 & 0 \\ -v/c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1 - (v/c)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{1 - (v/c)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

このような変換を「ローレンツ変換」と呼ぶ

マイケルソン-モーレーの実験 (3)

二つの光路差の差は近似的に

$$\delta = \Delta_s - \Delta'_s = (L_1 + L_2)(v/c)^2$$

となり、90度回転するとこの光路差だけ干渉縞は移動するはずだが、実験では季節に関わらず干渉縞は有意に移動することはなかった。

↓

- ・第1の立場だとこの値は公転速度30km/s以上でなければならない。
- ・公転運動による地球の運動方向は冬と夏では反対方向で、その差が季節変動で観測されるはず。

↓

第2の立場が正しいことを示している。

次は $v/c \ll 1$ の時ガリレイ変換に帰着することを示している。

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -v/c & 0 & 0 \\ -v/c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$