

合体する直前のブラックホール連星のラグランジュ点の動き

大阪工業大学 情報科学部 情報システム学科
B15026 奥村 成吾

2019年2月10日

目次

1	概要	3
1.1	本論文の目的	3
1.2	始めに	3
1.3	動機	4
2	基本事項	5
2.1	万有引力	5
2.2	ブラックホール連星とは	6
2.3	ラグランジュ点の応用例	6
2.4	Schnittman の議論	7
3	通常の天体のラグランジュ点	7
3.1	位置エネルギーによる理解	7
3.2	ラグランジュ点の周囲の天体の安定性	9
3.3	ラグランジュ点発生条件	13
3.4	まとめ	16
4	ブラックホール連星	17
4.1	ブラックホール連星のシミュレーション	17
4.2	ブラックホール連星のラグランジュ点	18
4.3	まとめ	23
5	ラグランジュ点とコリオリの力	24
5.1	目的	24
5.2	コリオリの力とは	24
5.3	コリオリの力の基本的な説明	24
5.4	ラグランジュ点におけるコリオリの力	27
5.5	ブラックホール連星時のラグランジュ点とコリオリの力	29
6	結論	31

1 概要

1.1 本論文の目的

本研究ではラグランジュ点がブラックホール連星の時にどのようなようになるかをシミュレーションした。

ブラックホール連星は重力波を出しながら合体するがその時のラグランジュ点移動が他の周囲の小天体に一部に集まるような影響を与え観測の際に重力波が妨げられる可能性がある。

シミュレーションの結果からこれらのことを推測する。

1.2 始めに

ラグランジュ点とは質量の大きい天体 M のまわりを質量の小さい天体 m が周回している時に生じる万有引力と遠心力の均衡点である。

周囲に二つの天体以外の物質が存在し、さらにその物質が二つの天体に対して無視できるほどの小さな質量しかない場合、ラグランジュ点の安定・不安定の影響を大きく受けることになる。

例えば、ラグランジュ点に人工衛星を配置すれば小さい天体に対してその場に留まると考えられる。

各ラグランジュ点には番号が振られていて、地球と太陽を結ぶ直線上で、地球から見て太陽側にある L_1 と、太陽とは反対側にある L_2 。そして太陽を回る地球の公転軌道において、太陽をはさんで 180 度反対の少し外側に L_3 とする。

この 3 点は、1760 年頃、レオンハルト・オイラーによって発見されたもので、制限三体問題におけるオイラーの直線解という。

さらに、1722 年に、ジョゼフ＝ルイ・ラグランジュが、地球を回る月の公転軌道上で、地球と月を結ぶ半径を底辺とした正三角形の頂点に、均衡点地球の公転方向前方 60 度に位置する L_4 と、後方 60 度にある L_5 の二点を見つけた。

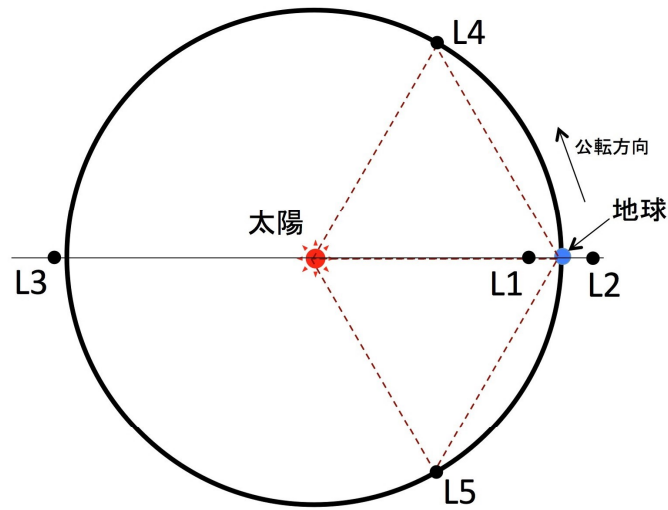


図1 ラグランジュ点各位置 [1]

この図1の L_1 から L_5 の5点がラグランジュ点である。

1.3 動機

私がラグランジュ点を調べようと思った主な理由は二つある。

一つ目は1974年にジェラルド・オニールによって提唱された、宇宙空間に作られた人工の居住地であるスペースコロニーと呼ばれるものを設置するには、地球と月のラグランジュ点が最も適しているということを詳しく調べたい。

二つ目はブラックホール連星でのラグランジュ点に第3の星がある可能性が指摘されていて、重力波の波形に影響を与えるかもしれないと考えられているのでブラックホール連星時のラグランジュ点がどのような動きをするかを検証したい。

本論文の構成は第二章で基本事項の説明を行い、第三章で通常の連星でのラグランジュ点動きを調べ、第四章でブラックホール連星のラグランジュ点を調べ、第五章でコリオリの力を使ってラグランジュ点を説明し、第六章でまとめを行う。

2 基本事項

2.1 万有引力

万有引力とは質量を持つすべての物質の間に作用する力である。ここではその万有引力について説明する。

万有引力は存在しているそれぞれの物体が互いに引き寄せあう力のことである。二つの物体間での万有引力の大きさ F は力を受ける側の物体の質量 m 、力を与える物体の質量 M 、二つの物体の距離 r 、万有引力定数 G を使って以下の式となる。

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (1)$$

加速度を a とすると、運動方程式 $F = ma$ より、

$$a = G \frac{M}{r^2} \quad (2)$$

となる。

(2) より、万有引力の加速度では力を受ける側の物体の質量 m は考えなくてよいことがわかる。

(1) の公式がすべての空間で成り立つならば地球上に存在するすべての物体が引かれ合うと考えられるが、人間同士が引かれ合う力よりも地球から受けている力が圧倒的に強いいため、人間同士の引きあう力は無視できる。

このことは宇宙でも同じであり、大きな天体から万有引力を受けている場合、大きな天体と比べればとても小さな天体が多く存在する場合、小さな天体同士の力はシミュレーション等では条件にもよるが無視しても構わない。このような小天体をシミュレーション上では「テスト粒子」と呼ぶ。世間では「デブリ」と呼ばれる。

今回のシミュレーションでは大きな天体に比べて極めて小さな物体を使うが、力を与えることは無く、(2) でその物質の質量を必要することは無いため、大きな質量を持つ二つの天体以外のデブリは質量が無視できるもの（すなわち、その重力は考えなくてよいものとする）として、いわゆるテスト粒子として扱う。

2.2 ブラックホール連星とは

連星が二つのブラックホールで出来ている天体をブラックホール連星と言う。連星系では質量が大きいブラックホールを主星、小さい方を伴星という。

通常の連星と違い、ブラックホール連星は公転していると強い重力の影響によって重力波を放出する。そして、系全体のエネルギーが失われ、ブラックホール同士は近づくことになり、最終的には合体する。

ブラックホールが、重力波放出に伴って接近する様子はある程度モデル化されており、公転軌道半径の近づく方にも「公式」が存在する。

2015年9月に、初めての重力波が直接観測された際、ブラックホール連星が存在し、合体する現象が確認された。その後、今日までに10例のブラックホール連星合体現象が知られている。

実際の天文現象では周囲にも多くの天体が存在することが考えられ、それらが重力波の波形にも影響を及ぼすことが考えられる。そこで本研究ではラグランジュ点の動きやそれに伴う周辺の天体の運動を議論する。

ブラックホール連星のシミュレーションを行う際に通常の天体の連星と違い、ある決められた速度でブラックホール同士が近づいていくように設定することで、連星の軌道進化を考える。

2.3 ラグランジュ点の応用例

ラグランジュ点とは力の均衡点であり、人工衛星などを配置した場合、小さな天体に対して場に留まると考えられている場所である。

そのラグランジュ点の利用方法として、地球と月のラグランジュ点 L_1 に地球と月との中継ステーションを作り、月開発の拠点の一つにしようという考えもある。

他にはラグランジュ点 L_4 や L_5 に外宇宙へ進出するためのステーションを作るという考えもある。

最も有名なものはジェラルド・オニールによるスペースコロニーという新天地を建造するというアイデアである [2]。この考えの背景には世界人口の爆発的に増加というものがある。スペースコロニーという発想は、人口爆発という近未来に対するひとつの解として考えられたものである。

2.4 Schnittman の議論

本研究では Schnittman の論文 [3] を前提にしている。そのため、ここで議論を行う。

Schnittman はブラックホール合体の時にブラックホールのまわりのガスがどう動くかを理解しようとして、テスト粒子と言う数値シミュレーションを行いブラックホール連星時のラグランジュ点の安定性を調べている。

その結果、 L_4 は L_5 に比べて周囲のテスト粒子を失いやすく、伴星ブラックホールに近づく、それに対し L_5 は伴星ブラックホールから離れ、周囲のテスト粒子の安定性が増した。

本研究では同じようにテスト粒子を使用したシミュレーションと何故そうなるかの考察も踏まえて考えている。

3 通常の天体のラグランジュ点

3.1 位置エネルギーによる理解

ラグランジュ点とは二惑星の万有引力と遠心力がつりあう場所である。まずは二惑星の万有引力を求め、そこに各点の円運動する速度を引くことで求めることができる。

本研究では光の速さ $c = 1$ 、万有引力定数 $G = 1$ 、太陽質量 $M_{\odot} = 1$ としてシミュレーションを行う。

以下では質量の大きい天体を原点 $(0,0)$ とする xy 座標 (x,y) 、質量の大きい天体の質量を m_S 、質量の大きい天体の座標を (x_S, y_S) 、質量の小さい天体の質量を m_E 、質量の小さい天体の座標を (x_E, y_E) とする。この系で m_E を角速度 ω で、ケプラー回転する位置 (x,y) の天体を考える時、そのポテンシャル $Z_{(x,y)}$ は、

$$Z_{(x,y)} = \frac{-Gm_S}{\sqrt{(x-x_S)^2 + (y-y_S)^2}} + \frac{-Gm_E}{\sqrt{(x-x_E)^2 + (y-y_E)^2}} - \frac{\omega^2}{2}((x-x_S)^2 + (y-y_S)^2) \quad (3)$$

のように式に表すことができる。

また、ここでは質量の大きい天体の質量 1、質量の大きい天体の座標を原点、質量の小さい天体の質量を 0.02、質量の小さい天体の座標を $(1,0)$ とする。この値がポテンシャルの図にした時に分かり易いと判断した。

ちなみに太陽の質量を 1 とすると、木星の質量は 0.00095、地球の質量は 0.000003 である。地球の質量を 1 とすると、月の質量は 0.0123 である。

横軸が x 、縦軸が y とする。

横の色分けの図がポテンシャルの大きさである。黄色に近づくほどポテンシャルの山になり、紫に近づくほどポテンシャルの谷になり、周辺に物質があれば谷に向かって移動する。ただ、山の頂点に存在すれば傾きが 0 なので移動することは無い。

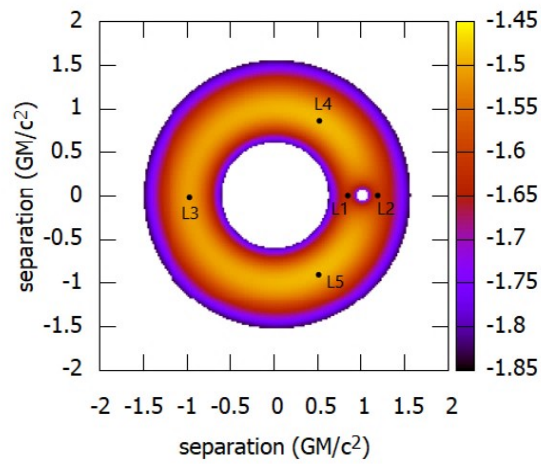


図2 ポテンシャル等高線の色付け

図2は(3)の式を使い、位置エネルギーの等高線の色付けをしたものにラグランジュ点の印をつけたものである。

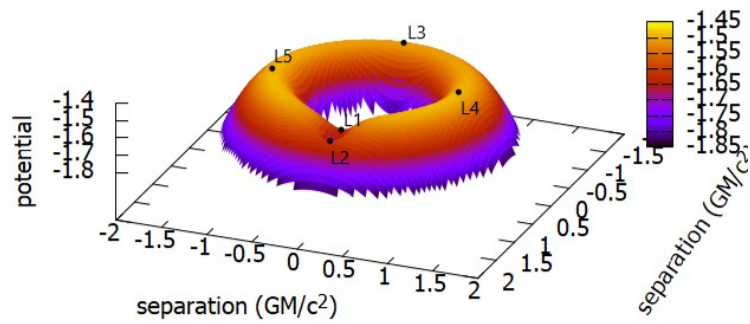


図3 回転系のポテンシャル

図3は図2を立体的に見たものである。

図2と図3により位置エネルギーの山や谷があり、 L_1 と L_2 と L_3 が y 方向では谷になっていて安定しているが x 方向では山になっていて不安定な鞍点である。 L_4 と L_5 では x 方向と y 方向共に山になっていて不安定な頂点である。この5点がラグランジュ点であることがわかる。

3.2 ラグランジュ点の周囲の天体の安定性

図1と図2のポテンシャルの図から安定不安定が分かったが、主に L_1 や L_2 では勾配が急になっており、山や谷で判断できるほど安定しているとは思えない。

その為、実際にシミュレーションを行い、その安定性を確認する。

ここでは質量の大きい天体の質量 5000、質量の大きい天体の座標を原点、質量の小さい天体の質量を 2.5、質量の小さい天体の座標を (30,0) とする。式 (3) を使い、各ラグランジュ点を求め、質量 0 のテスト粒子としてデブリを各ラグランジュ点から半径 3 以内各点の距離を 0.5 ごとに約 100 個配置し、各ラグランジュ点の安定性を調べるシミュレーションを作成した。

デブリは二惑星に対して無視してもいい程の質量しか持たないものとし、質量の小さい天体が無ければ質量の大きい天体に対して円運動をするように初速度を与える。質量の大きな天体は初速も受ける力も無いものとする。各点と質量の大きい天体との距離を $r_{(x,y)}$ とする円運動の方程式

$$m \frac{v^2}{r_{(x,y)}} = G \frac{Mm}{r_{(x,y)}^2} \quad (4)$$

より

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r_{(x,y)}}} \quad (5)$$

となり、これが質量の小さな天体とデブリの初速となる。この初速の向きは接線方向であるので、二惑星を結ぶ直線を角度 0 として、 ϕ_d を各点の角度とした時、この値に $\cos \phi_d$ をかけることで x 方向、 $\sin \phi_d$ をかけることで y 方向の初速を求めることが出来る。ここでは M と m_S は同じとする。

各時刻の運動は、運動方程式により速度を求めることになる。 x 方向の加速度を a_x 、 y 方向の加速度を a_y とする。

$$a_x = \frac{-m_S x_E}{r_{(x,y)}^3} \quad (6)$$

$$a_y = \frac{-m_S y_E}{r_{(x,y)}^3} \quad (7)$$

これにより、小さい天体は円運動を行う。

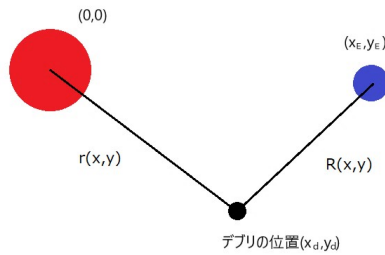


図4 r と R の説明

デブリの場合は、各デブリの x 座標を x_d 、 y 座標を y_d 、質量の小さい天体との距離を図4のように $R_{(x,y)}$ として以下ようになる。

$$a_x = -\frac{m_S}{r(x,y)^2} \cdot \frac{x_d}{r(x,y)} - \frac{m_E}{R(x,y)^2} \cdot \frac{x_d - x_E}{R(x,y)} \quad (8)$$

$$a_y = -\frac{m_S}{r(x,y)^2} \cdot \frac{y_d}{r(x,y)} - \frac{m_E}{R(x,y)^2} \cdot \frac{y_d - y_E}{R(x,y)} \quad (9)$$

加速度として式(8)と式(9)を与えることで各デブリが二つの天体から万有引力を受けている状態になる。

作ったシミュレーションを使用して、二惑星からの万有引力を受けた各デブリがラグランジュ点に収束するかどうかで各ラグランジュ点の安定性を確認する。

以下では、ラグランジュ点の位置を議論するために、計算してえられた惑星 E やデブリの位置の結果を、惑星 E が x 軸上にあるように回転して引き戻して図示する。

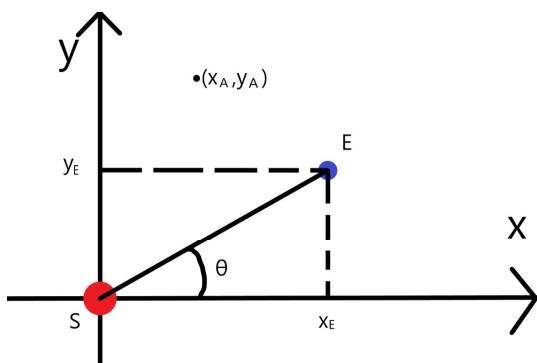


図5 θ 角度確認

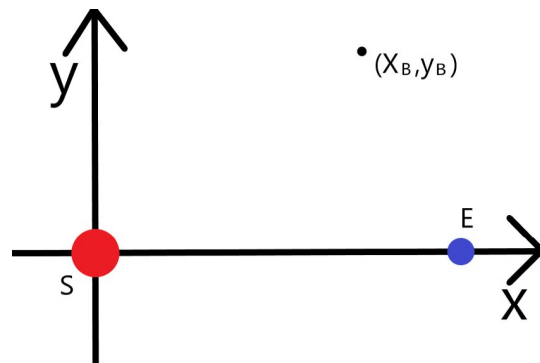


図6 θ 回転

まず、引き戻す角度は図に示すように惑星 E の位置と、 x 軸の角度を θ として、 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ を求める。この時、 $\sin \theta$ は回転させる角度の \sin を求めたいので y_E に -1 をかける。

$$\sin \theta = \frac{-y_E}{r(x,y)} \quad (10)$$

$$\cos \theta = \frac{x_E}{r(x,y)} \quad (11)$$

その後、回転前の座標 x_A と y_A から、 x_B と y_B を求める。

$$x_B = x_A \cdot \cos \theta - y_A \cdot \sin \theta \quad (12)$$

$$y_B = x_A \cdot \sin \theta + y_A \cdot \cos \theta \quad (13)$$

この結果、回転座標系での質量の小さい天体の位置が分かる。軸にしているので常に同じ位置に存在する。デブリも同様に (12) と (13) を使って、回転させる。

以下の図では緑の点が各ラグランジュ点、青の点が質量の小さい天体、黄色の点が質量の大きい天体、紫の点が L_1 付近のデブリ、黄色く四角い点が L_2 付近のデブリ、青く丸い点が L_3 付近のデブリ、赤い点が L_4 付近のデブリ、黒い三角の点が L_5 付近のデブリとなっている。

各ラグランジュ点付近のデブリは約 100 個ずつである。

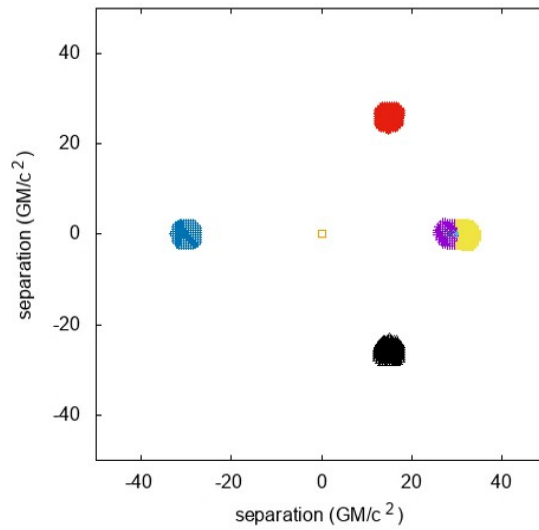


図 7 初期状態

図 7 は初期状態であり、ラグランジュ点の付近にデブリが配置されている状態である。

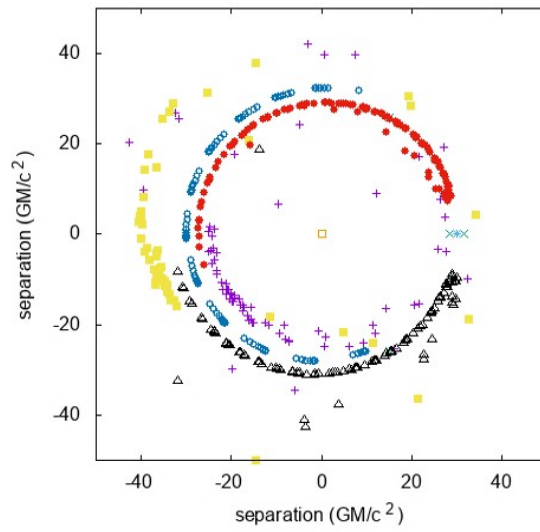


図8 二周目

図8は公転二周目だが、 L_1 と L_2 付近にデブリが無く、不安定であることがわかる。

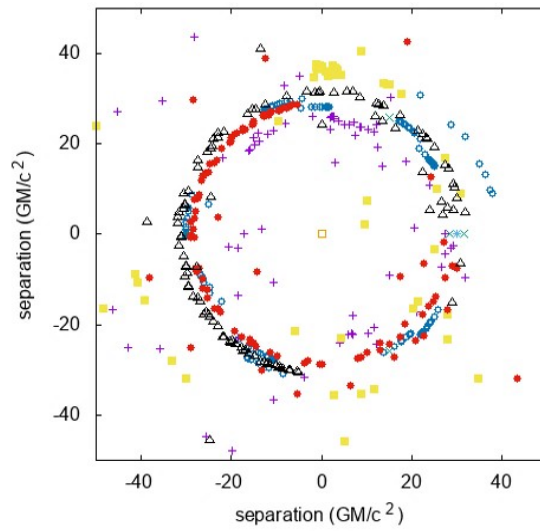


図9 八周目

図9では多くのデブリがあるが、 L_3 と L_4 と L_5 付近に比較的多くのデブリが集まっていることがわかる。

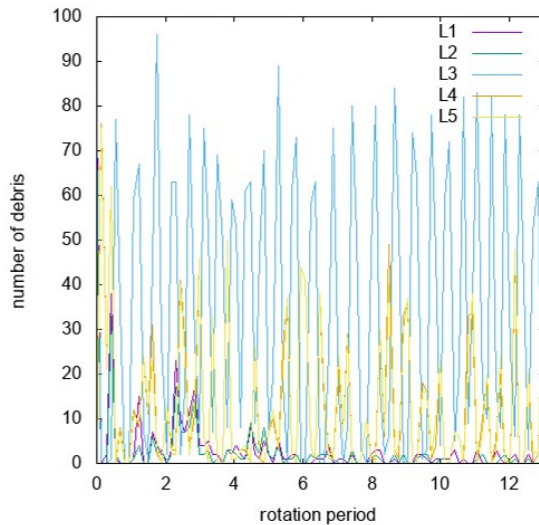


図 10 各ラグランジュ点付近のデブリ数

横軸は質量の小さい天体の公転数、縦軸は各ラグランジュ点の半径 3 に存在するデブリ数である。

図 10 は質量の大きい天体の質量を 4850、質量の小さい天体の質量を 150、すなわち質量比 (m/M) は 0.03 とし、デブリの配置を質量の大きい天体の半径 25 から半径 35 の間のデブリごとの距離を 1 とした場合のグラフである。質量を変更した理由はラグランジュ点ごとの差を大きくするためであり、デブリの配置を変えた理由は均等に配置しグラフに反映しやすくした。

図 10 より、 L_1 と L_2 は図 8 でわかるように周囲にデブリがほとんどない。 L_4 と L_5 は周囲のデブリの数がほぼ同じで一定の周期でデブリが多くなっている。 L_3 は圧倒的な数が一定の周期で集まっている。

これらの図から L_3 と L_4 と L_5 はデブリが集まってきて安定していることがわかる。 L_1 と L_2 は安定ではないことがわかる。

3.3 ラグランジュ点発生条件

ラグランジュ点にデブリが集まるには二惑星の質量比 $m/(M + m)$ が 0.0385 以下でなくてはならない (Murray & Dermott)[4] と言われており、それをここで確認する。ラグランジュ点があってもそのラグランジュ点にデブリが集まらなくてはシミュレーションとして成り立たないので、この条件について調べる。

ここでは質量比が 0.03 と 0.04 の二つの図を確認し、どのような違いがあるかを検証する。この検証では簡易的に L_4 と L_5 で調べる。デブリの配置も L_4 と L_5 付近にのみ配置する。図では天体が公転三周した時の周囲のデブリの様子を表している。三周である理由は双方の条件を見比べたときに最も差が出ている時間帯であったためである。

以下の図では紫の点がデブリ、緑の点が L_4 と L_5 のラグランジュ点、青の点が公転する惑星、黄色の点が軸となる惑星となっている。

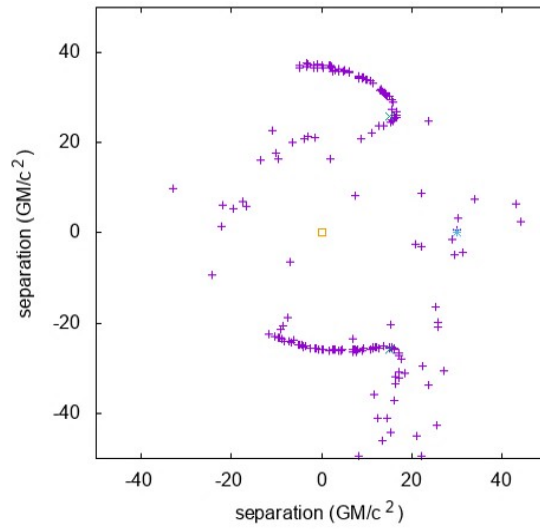


図 11 質量比 0.03

図 11 は質量比が 0.03 の場合である。 L_4 と L_5 の二点付近でデブリが曲線を描いており、ラグランジュ点が存在していることがわかる。

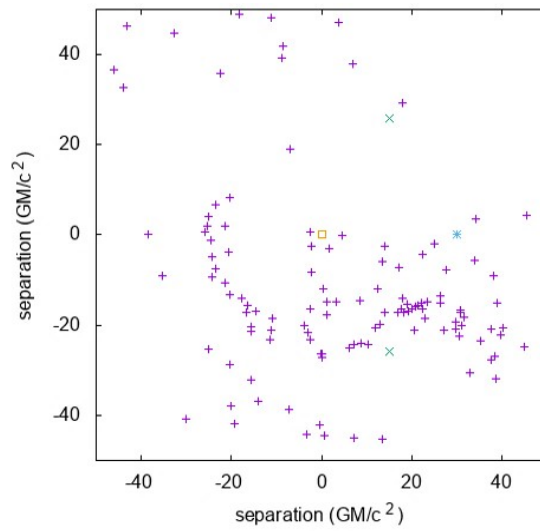


図 12 質量比 0.04

図 12 は質量比が 0.04 の場合である。不規則な動きになり、デブリが集まるような動きも見られない。

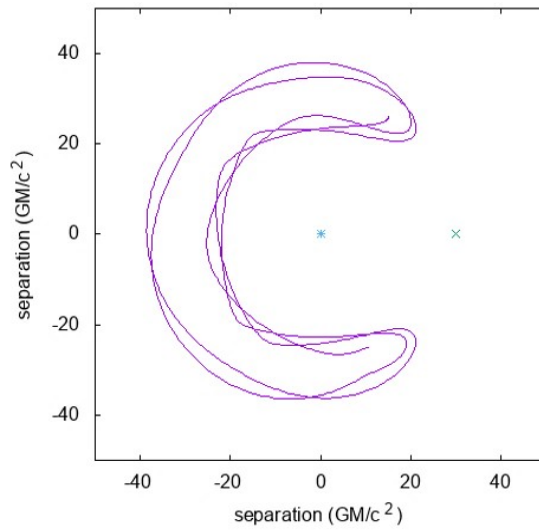


図 13 質量比 0.03 のデブリの動きの一例

青い点が質量の大きい天体、緑の点が質量の小さい天体、紫の線がデブリの軌跡である。

図 13 は質量比 0.03 の場合の初期位置 (15,26) のデブリの動きを軌跡にしたものである。この図から質量比 0.03 ではラグランジュ点 L_4 と L_5 を L_3 を経由して行き来していることがわかる。この動きがラグランジュ点付近で曲線を描いているという状況である。

図 2 を見ると、この軌跡は同じようなポテンシャルの大きさの位置で動いていることが推測できる。

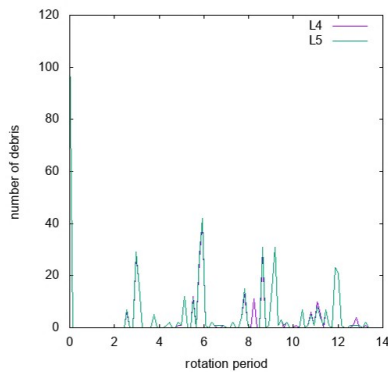


図 14 質量比 0.03 の時の周囲のデブリの数

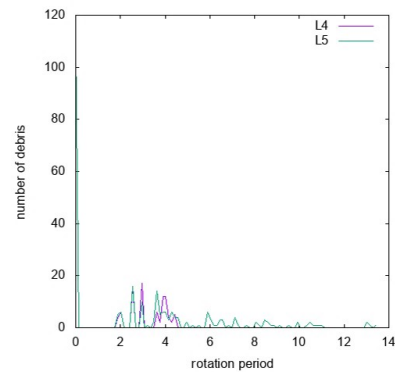


図 15 質量比 0.03 の時の周囲のデブリの数

上の二つの図は図 10 のようにラグランジュ点付近のデブリの数を質量比が違う場合で比べたものである。

図 14 と図 15 を見てわかるように質量比が 0.03 ではラグランジュ点に定期的集まるような動きがみられるが、質量比が 0.04 ではその動きがみられないことがわかる。

このことから、ラグランジュ点にデブリが集まるには条件があり、質量比 $m/(M+m)$ が一定以下なければラグランジュ点にデブリが集まらないということがわかる。

3.4 まとめ

安定性を求めるシミュレーションでラグランジュ点には安定、不安定がある事がわかった。

ラグランジュ点に物を配置する場合は不安定な L_1 や L_2 よりも安定性の高い、 L_3 や L_4 、 L_5 の方が適している事がわかった。

ここで、図 13 のデブリの軌跡を見ると、 L_3 付近を経由して L_4 と L_5 を移動していることがわかる。このことから L_3 は安定ではなくデブリの通り道であるためデブリが集まっているように錯覚したことが推測される。

よって、安定性が高いのは L_4 と L_5 である。

ラグランジュ点にはデブリが集まる条件があり、安定性の高いラグランジュ点であっても質量比に差が少なかった場合、安定していないことがわかった。

4 ブラックホール連星

4.1 ブラックホール連星のシミュレーション

二つのブラックホール連星の主星の質量を M 、伴星の質量を m として、質量比を以下のように μ_1, μ_2 とする。

$$\mu_1 = \frac{M}{M+m} \quad (14)$$

$$\mu_2 = \frac{m}{M+m} \quad (15)$$

この (14)、(15) と二つのブラックホール間の距離 (separation) r を使いブラックホールの近づく速度 $n = \frac{dr}{dt}$ は

$$n = \frac{96}{5} \mu_1 \mu_2 r^{-11/2} \quad (16)$$

となることが、知られている。これは Peters[5] による重力波放出量の計算から導出されたものである。

(16) を使い、仮に μ_2 を 0.03 と設定した場合、ブラックホール間の距離 r とブラックホールが近づく速度 n を伴星ブラックホールの周回数と時間経過で図に示す。ブラックホール間の距離は初期位置では 7 とする。

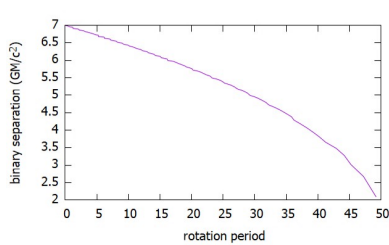


図 16 伴星ブラックホールの周回数ごとのブラックホール間の距離

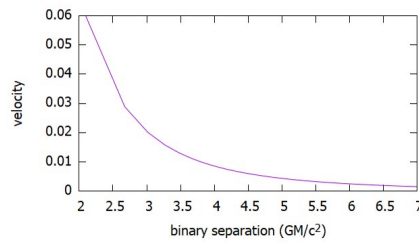


図 17 ブラックホール間の距離とブラックホールが近づく速度

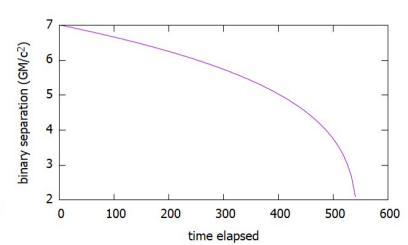


図 18 時間経過ごとのブラックホール間の距離

図 16 では縦軸がブラックホール間の距離、横軸が伴星ブラックホールの周回数である。図 17 では縦軸がブラックホールが近づく速度、横軸がブラックホール間の距離である。図 18 では縦軸がブラックホール間の距離、横軸が時間経過である。

図 17 から、最初の頃は近づく速度は速くないが、近づくにつれ引き寄せられる力が大きくなっていくことがわかる。

4.2 ブラックホール連星のラグランジュ点

ブラックホール連星でもラグランジュ点は存在している。

ただし、ブラックホール同士が近づいて行くにつれ、ラグランジュ点の L_4 と L_5 の位置が変わる。 L_4 は伴星のブラックホールの方向に近づき、安定性が低下する。 L_5 は伴星のブラックホールから離れ、安定性が増すことが [3] で示されている。本研究では、この結果を確認し、デモンストレーションすることにする。

以下では、ブラックホールにおけるラグランジュ点のシミュレーションを L_4 と L_5 に重点を置いて行う。

今回のシミュレーションではブラックホールが合体する直前のラグランジュ点の動きを確認したいため、二つのブラックホールの初期距離を 7 に設定する。この場合は約 50 周して、合体する。また、ラグランジュ点にデブリが安定するように伴星ブラックホールを 10 周させてから、ブラックホールが近づくように設定する。デブリの位置を変更し、主星ブラックホールの半径 6 から半径 8 の間に 0.5 間隔で約 350 個、配置する。

ブラックホール連星の μ_2 は 0.03 と設定してシミュレーションを行う。

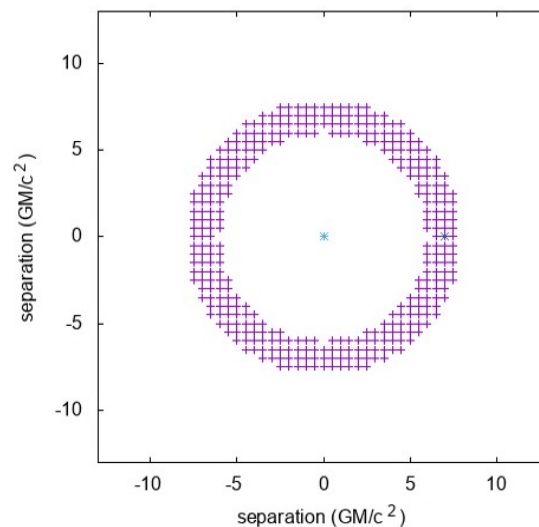


図 19 初期状態のテスト粒子の配置 伴星ブラックホールの距離は 7 である

図 19 は初期状態である。原点に主星ブラックホール、(7,0) に伴星ブラックホールがある。

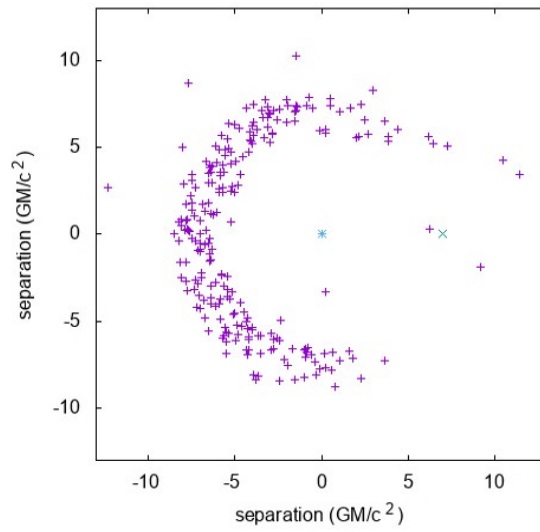


図 20 伴星ブラックホール 10 周経過後のテスト粒子の分布 伴星ブラックホールの距離は 7 である

図 20 はラグランジュ点付近にデブリが集まり、ブラックホール連星が近づく前の状態である。

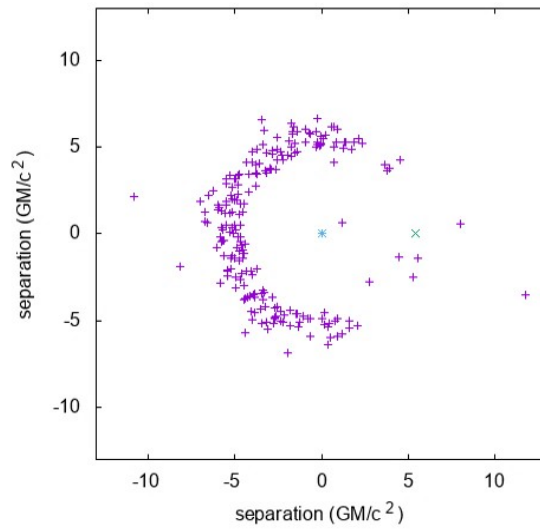


図 21 伴星ブラックホール 35 周経過後のテスト粒子の分布 伴星ブラックホールの距離は 5.3 である

図 21 はブラックホール連星が近づいている途中である。ブラックホールが近づくことにより、周囲デブリも近づくことがわかるが、伴星のブラックホールに近づくことや離れていくことを確認することはできない。

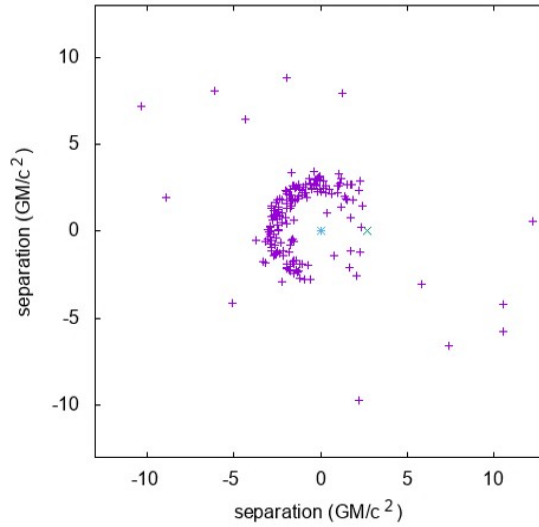


図 22 伴星ブラックホール 60 周経過後のテスト粒子の分布 伴星ブラックホールの距離は 2.6 である

図 22 はブラックホールが合体を行う直前である。この図ではデブリに動きがあり、伴星のブラックホールに近づくことや離れていくことを確認出来る。このデブリを見ればラグランジュ点と付近のデブリに動きがあり、 L_4 が伴星ブラックホールに近づき、 L_5 が伴星ブラックホールから離れることが推測できる。

デブリでの動きは確認出来た。文献 [3] より、ブラックホール連星時のラグランジュ点の動きを式にすることが出来る。

ϕ_L は二つの天体を結ぶ直線を 0 度とした時の L_4 と L_5 の角度である。

$$\sin \phi_L \left(\frac{1}{(2 - 2 \cos \phi_L)^{3/2}} - 1 \right) = \frac{32}{5} r^{-5/2} \quad (17)$$

(17) の式を解くことにより以下の図が得られる。縦軸は各ラグランジュ点の角度 ϕ_L 、横軸はブラックホールの距離である。

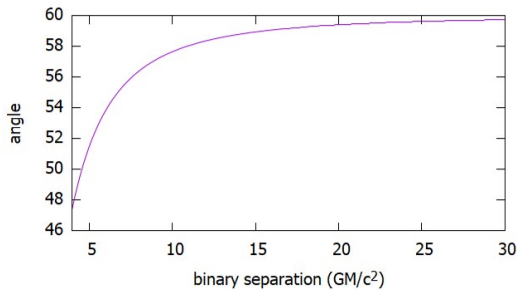


図 23 L_4 の角度

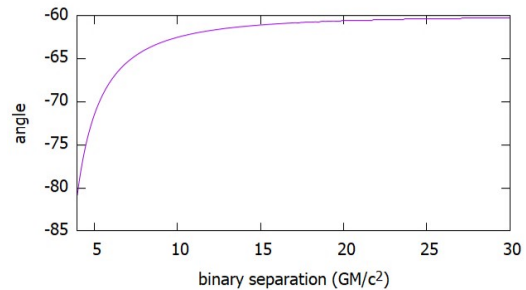


図 24 L_5 の角度

図 23 より、 L_4 はブラックホールの距離が近づけば、伴星のブラックホールの方向に近づく。図 24 より、 L_5 はブラックホールの距離が近づけば、伴星のブラックホールから離れる。

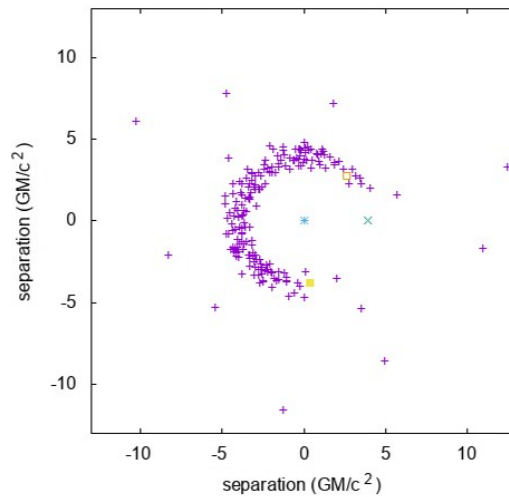


図 25 デブリのシミュレーションとラグランジュ点の位置

黄色く四角い枠の点を L_4 の位置、黄色く四角い点を L_5 の位置である。

図 25 はブラックホール連星のシミュレーションに計算で求められたラグランジュ点の位置を合わせたものである。

この図を見るとデブリの三日月を描く端の部分にラグランジュ点があることから、(17) の式から得られる位置にラグランジュ点があることがわかる。

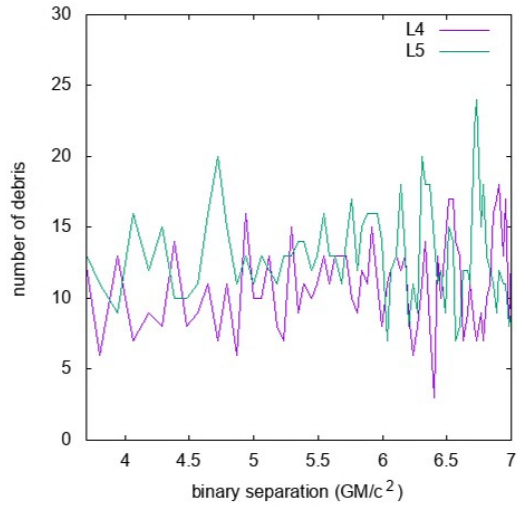


図 26 ブラックホール連星時の L_4 と L_5 付近のデブリ

図 26 はブラックホール連星時の L_4 と L_5 の周囲のデブリの数を数えたものである。周囲のデブリの数える基準は距離 3 にブラックホール同士の初期距離を 1 としたブラックホール同士の距離をかけたものを半径に数える。

数える範囲を変える理由はブラックホール同士が近づくことにより、デブリやラグランジュ点の距離が近づき、範囲を変えなかった場合、 L_4 周囲のデブリを数える時に L_5 の周囲のデブリも数えてしまう恐れがあるからである。

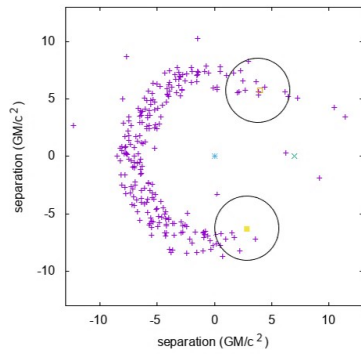


図 27 距離 7 の時の数える範囲

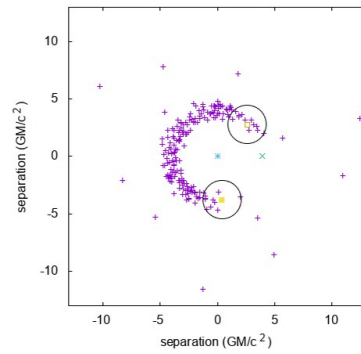


図 28 距離 3 の時の数える範囲

数える範囲は図 27 と図 28 のようになる。

図 10 では L_4 と L_5 の周囲のデブリの数はほぼ同じだったが、図 26 ではデブリの数は L_5 の方が全体的に L_4 よりも多いと考えられる。

よって、 L_4 の周囲のデブリがばらけていることと L_5 の周囲のデブリが収束していることも分かる。この

ことから L_4 の安定性が低下しているのと L_5 の安定性が増していることが推測できる。

4.3 まとめ

シミュレーションの結果よりブラックホール連星の近づいていく速度は近づくほどに速くなることと、ブラックホール合体の直前にラグランジュ点が動き、 L_4 が伴星のブラックホールの方向に近づき、安定性が低下し、 L_5 が伴星のブラックホールから離れ、安定性が増すことがわかる。

L_4 の安定性が低下しているが、従来と比べると低下したということであり、不安定ではないということも確かめられた。

5 ラグランジュ点とコリオリの力

5.1 目的

この章ではブラックホール連星時にラグランジュ点が何故動くのかをコリオリの力を使って説明をするのが目的である。そのため、コリオリの力の説明と通常の連星時とブラックホール連星の二つをコリオリの力で考察する。

5.2 コリオリの力とは

コリオリの力とは地球表面などの回転する物体上での運動を表す際に移動方向と垂直な方向に移動速度に比例した大きさで受ける慣性力の一種である。この力は回転座標から見たときに発生する力であり、静止座標系では発生しない見かけ上の力である。

シミュレーションは静止座標軸で作成しているが、図示する際には伴星の回転分を引き戻して表示している。この場合、表示は回転系であっても実際の計算にコリオリの力を入れる必要は無い。しかし、物理的な理解に類推を使うことが可能と思われる。

5.3 コリオリの力の基本的な説明

簡単なシミュレーションを作成し、コリオリの力を目で見てわかる形にする。

ここで作成するシミュレーションは原点に存在する点と初期位置が $(10,0)$ で時間経過ごとに原点を軸に角速度 0.157 で回転する点の二点を用意する。

他に原点を初期位置として速度 $(v_x, v_y) = (1, 0)$ を持つ物質、 $(10,0)$ を初期位置として角速度 0.157 で回転する点から放たれたものとして速度 $(v_x, v_y) = (-1, 1.57)$ を持つ物質、原点に初期位置として速度 $(v_x, v_y) = (2, 0)$ を持つ物質を用意する。

まずは、静止座標系の場合を確認する。移動している物体は等速直線運動しているものとする。

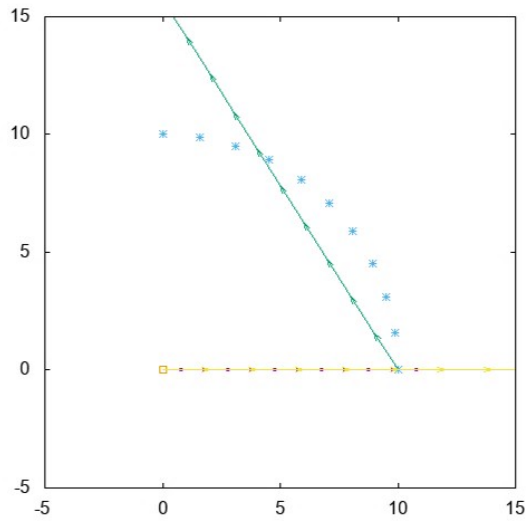


図 29 静止座標系

静止座標系 (x, y) で見た場合は図 29 のようになる。青い点が初期位置が $(10, 0)$ として角速度 0.157 で回転している点、黄色い点が原点、紫の矢印が原点を初期位置として x 軸方向に速度 $(v_x, v_y) = (1, 0)$ を持つ物質の速度ベクトル、緑の矢印が回転する青い点から放たれたものとして $(10, 0)$ を初期位置、速度 $(v_x, v_y) = (-1, 1.57)$ を持つ物質の速度ベクトル、黄色い矢印が原点を初期位置として速度 $(v_x, v_y) = (2, 0)$ を持つ物質の速度ベクトルである。

青い点である原点を軸に角速度 0.157 で回転している点から見たときにどのように見えるかを確認する。

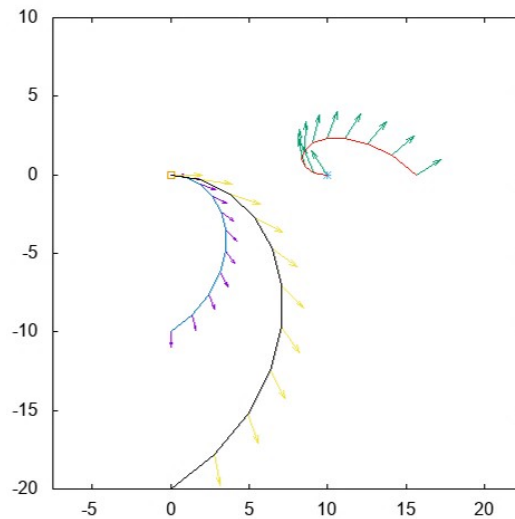


図 30 回転する青い点に合わせて回転させた回転座標系

図 30 では、緑の線が原点にある物質が速度 $(v_x, v_y) = (1, 0)$ を持つ物質の軌跡、赤色の線が回転する青い

点から放たれたものとして $(10,0)$ を初期位置、速度 $(v_x, v_y) = (-1, 1.57)$ を持つ物質の軌跡、黒の線が原点にある物質が速度 $(v_x, v_y) = (2, 0)$ を持つ物質の軌跡である。

図 13 は回転座標系であるため、円運動している点に合わせて座標を回転させている。その為、図 12 では円運動している点が静止している。二つの軌跡を見た場合、緑の線は紫の矢印から最初は右方向に進んでいたが徐々に下方向に曲がっていくことがわかる。黄色の線は青の矢印から最初は左方向に進んでいたが、その後上方向に曲がって行くように見える。

緑の線と黒の線の比較では速度の違いでコリオリの力が変化するかの確認を行っている。

速度が変化しても曲がる速度ベクトルの角度が同じであるからコリオリの力は速度に比例することがわかる。

このことからコリオリの力は回転座標軸上での進行方向に対して垂直方向に速度に比例して働く力であることがわかる。静止座標軸を左向きに回しているのでコリオリの力は進行方向に対して右向きに働く。

これはすなわち北半球で偏西風 (北半球では南から北へ向かう風) が東へ向かうことと同じである。

5.4 ラグランジュ点におけるコリオリの力

本研究は静止座標系を回転させて示している。ラグランジュ点でコリオリの力がどう働いているかを調べる。

図1や図2のポテンシャルの図だけを見ると、山や谷があり山からは落ちて行き谷に集まっていくと思えるが、回転座標系ではコリオリの力が加わり、動きが変わる。

どのように力が働くかと言えば、山から下がってゆくときにその進行方向に右向きのコリオリの力が働き、傾きによって転げ落ちるのではなく同じポテンシャルの大きさの場所を回るような動きになる。

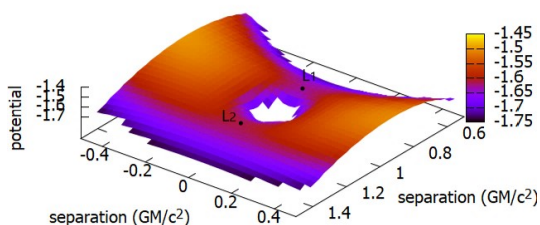


図 31 L_1 と L_2 のポテンシャルの拡大

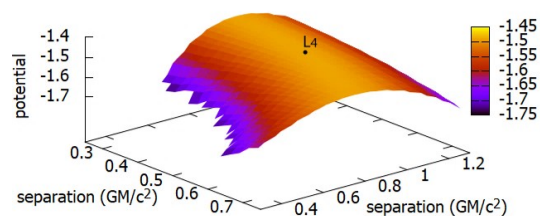


図 32 L_4 のポテンシャルの拡大

だが、この動きは L_4 と L_5 で見られるものであり、 L_1 や L_2 では見られない。なぜなら、 L_1 や L_2 ではポテンシャルの傾きが大きくなっており、離れていってしまう。これは図 31 と図 32 のポテンシャルから推測することができる。

ポテンシャルの傾きによって加速度が決まり、コリオリの力により坂を下る力とその力に対して垂直方向の力が加わり、斜め方向に加速度を受けることになる。

この時、傾きが急ならば坂を下る力が大きいためコリオリの力が加わっても、惑星の万有引力の影響を大きく受ける場所まで移動してしまい、 L_1 や L_2 の周りではコリオリの力によってデブリが集まるといことが起きにくい。

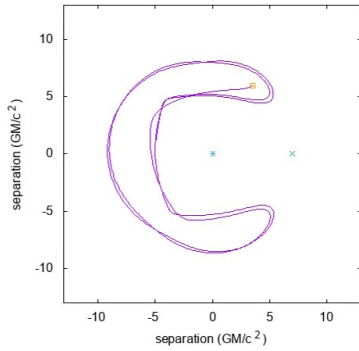


図 33 インゲン豆軌道をする L_4 付近にいたデブリ

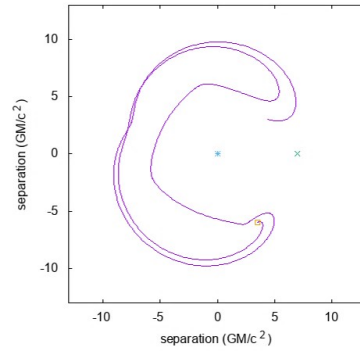


図 34 インゲン豆軌道をする L_5 付近にいたデブリ

図 33 と図 34 の紫の線は図 33 の場合は初期位置 (3.5,6)、図 34 の場合は初期位置 (3.5,-6) に存在するデブリの軌道、青い点が質量を 48.5 持つ主星、緑の点が質量を 1.5 持つ伴星、黄色い点が L_4, L_5 付近にいたデブリの初期位置である。

コリオリの力によって、ラグランジュ点付近に存在するデブリは図 33 と図 34 のように初速に対してコリオリの力が加わり、右回りにインゲン豆型の動きをして L_4 と L_5 を往復するような動きをし、さらに離れた点は万有引力により惑星に近づくか遠心力により惑星から離れていくことがわかる。

インゲン豆型の動きをするデブリは図 2 のポテンシャルに沿って移動し、 L_3 付近を通るため、実際はそこまで安定性の高くない L_3 に多くのデブリが集まっているように錯覚する。

ここではポテンシャルの傾きは大きな要素を占めており、3.3 で示した質量比によるラグランジュ点の条件もこの傾きが大きく関わっており、コリオリの力によってラグランジュ点に集まるために必要な質量比 $m/(M + m)$ が 3.3 のように一定以下でなくてはならない。

5.5 ブラックホール連星時のラグランジュ点とコリオリの力

5.4 では円軌道をする惑星同士のラグランジュ点を調べていたが、ここではブラックホール連星時でどうなるかを調べる。

通常の連星とブラックホール連星の決定的な差はブラックホール連星ではブラックホール同士が近づいていくことである。

ブラックホールが近づくことによってポテンシャルの動きも変わっていく、それに伴い周囲のデブリの動きも変わる。ポテンシャルが変わってもコリオリの力により、ラグランジュ点付近に近づこうとする力が働き、ブラックホールが動いた後のラグランジュ点に合わせたデブリの動きに変わる。

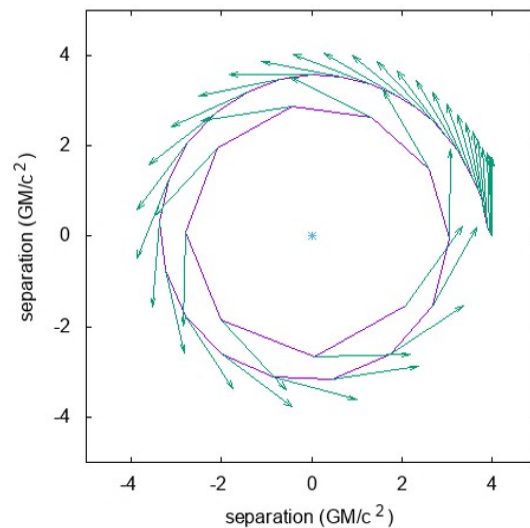


図 35 初期位置の公転速度から見るブラックホール連星

青い点が主星ブラックホール、紫の線が伴星ブラックホールの軌道、緑の矢印が伴星ブラックホールの速度ベクトルを半分に割った大きさのものである。半分にした理由はそのまま使用すると図がベクトルで埋まってしまったからである。

図 35 のように初期位置の公転速度に合わせて伴星ブラックホールの動きを見た場合、伴星ブラックホールが主星ブラックホールに近づくにつれて公転速度が速くなっていくことがわかる。

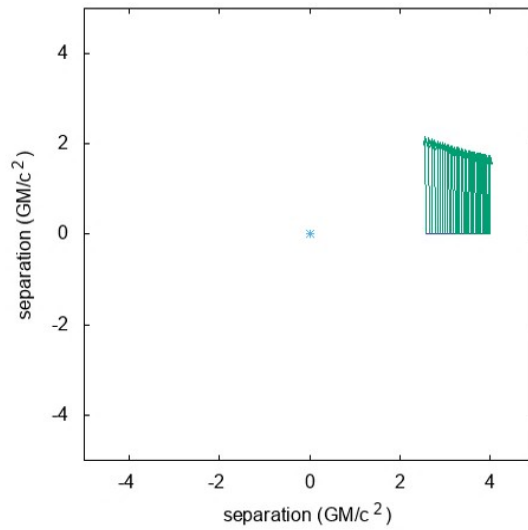


図 36 伴星ブラックホールから見たブラックホール連星

図 36 は回転系で見た場合の図である。速度ベクトルは近づくにつれ大きくなり、公転方向 (L_4 側) へ進む力が大きくなる。

その結果、伴星ブラックホールが公転方向にあるラグランジュ点 L_4 に近づく。伴星ブラックホールから観測した場合、 L_4 が近づき、 L_5 が離れるという動きが観測される。これが L_4 と L_5 の動きが変わる状態である。

L_4 は伴星ブラックホールに近づいたことにより、ポテンシャルの傾きが大きくなり、コリオリの力によるラグランジュ点に近づこうとする動きが鈍くなり、結果的に不安定になる。

これが L_4 の伴星ブラックホールに近づくという状態である。

L_5 は伴星ブラックホールから離れたことにより、ポテンシャルの傾きが緩やかになり、コリオリの力によるラグランジュ点に近づこうとする動きが強くなり、結果的に安定する。

これが L_5 の伴星ブラックホールから離れるという状態である。

よって、ブラックホール連星時の L_4 と L_5 の動きをコリオリの力を使って説明することが出来る。

6 結論

本研究は、通常の連星時とブラックホール連星時のラグランジュ点の動きをシミュレーションした結果、ラグランジュ点の L_4 と L_5 の二点はインゲン豆型の軌道を描きながら往復することがわかった。ブラックホール連星の場合はラグランジュ点 L_4, L_5 は角度を変えることもわかった。そして、コリオリの力でデブリがポテンシャルの大きさが同じところを周回する現象とラグランジュ点が伴星ブラックホールに近づくことと離れていくことが説明できた。

ブラックホール連星時ではブラックホール同士が近づくことによる速度の上昇によって伴星ブラックホールが L_4 に近づく。回転座標系で見たときに L_4 が伴星ブラックホールに近づき、 L_5 離れるように動くという現象がみられる。 L_4 と L_5 が動くことにより、 L_4 と L_5 は通常の連星とは違い、周囲のデブリの動きも変化し、 L_4 は L_5 に比べると周囲のデブリの数が減る。これにより、 L_4 が不安定になり、 L_5 が安定すると言える。

Schnittman は L_4 と L_5 の周囲にデブリが存在し続けるとしているが、本研究ではデブリはインゲン豆型の軌道を取り、 L_4 と L_5 の間を往復していることが確認できた。

最後に動機であるスペースコロニーとブラックホール連星のラグランジュ点の動きが重力波の観測に与える影響であるが、まずスペースコロニーは、ラグランジュ点 L_4 と L_5 ではケプラー運動を行えば力を与えずとも一定の周期の軌道を取ることから、この二点では新たな居住地として安定して位置を確認できる。

次にブラックホール連星のラグランジュ点の動きによる影響は、ブラックホール連星の周囲の小天体が多く存在すれば一定の角度で集まり、壁のような形になり、観測を妨害する可能性はある。ただし、合体直前の L_5 方向は大きく角度を開けることになるので、その方向なら小天体の影響を受けづらいと考えられる。

参考文献

- [1] <http://www.hayabusa2.jaxa.jp/topics/20170411/>
- [2] <https://uchutankentai.com/2018/01/05/スペースコロニー/>
- [3] J. D. Schnittman, The Lagrange Equilibrium Points L_4 And L_5 In Black Hole Binary System, *Astrophysical J.* 724 (2010) 39
- [4] Murray, C. D., & Dermott, S. F, in *Solar System Dynamics* (Cambridge:Cambridge Univ. Press), 1999
- [5] Peters, P. C, *Phys. Rev.*, 136, 1224, 1964